

## OCENA STANU KONSTRUKCJI BELKOWYCH NA PODSTAWIE ZMIANY PARAMETRÓW MODALNYCH WYWOŁANYCH DODATKOWĄ MASĄ

**Artur Borowiec, Leonard Ziemiański**

Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji  
ul. W. Pola 4, 35-959 Rzeszów, Polska  
e-mail: {aborowie, ziele}@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *This paper presents the application of the nondestructive damage identification method using an additional parameter introduced to the structure. In this method the damage is identified on the basis of the variations of dynamic parameters without knowledge of the initial values of undamaged structures. In the presented numerical examples, method are applied for the analysis of the dynamic response of cantilever beam for identification position of damage and the extent of damage. The assessment of the state of a structure relies on the comparison of the structure eigenfrequencies obtained from the systems with additional masses placed in different nodes.*

---

### 1. WPROWADZENIE

Znajomość aktualnego stanu konstrukcji odgrywa coraz większą rolę w aspekcie obniżania kosztów utrzymania obiektów. Celem oceny stanu konstrukcji jest zapewnienie bezpieczeństwa ludziom oraz zapobieganie stratom materialnym i katastrofom ekologicznym. Właściwy monitoring części lub całości konstrukcji inżynierskich jest jednym z wymogów nowoczesnych rozwiązań technicznych. Wykorzystując dynamiczny rozwój metod pomiarowych i narzędzi numerycznych, prowadzone są stale badania nad doskonaleniem metod wykrywania uszkodzeń. Współcześnie użytkownicy oczekują metod pozwalających ocenić stan konstrukcji w jak najkrótszym czasie, przy jak najmniejszych nakładach finansowych. Obecnie preferowane są metody, które oprócz stwierdzenia faktu wystąpienia uszkodzenia, pozwalają określić położenie i wielkość uszkodzenia. Stosowanie metod nieniszczących oraz bezkontaktowych pozwala na skuteczną ocenę stanu konstrukcji i jest obecnie coraz szerzej stosowane. Użyteczne w tym kontekście wydają się być metody bazujące na analizie zmian parametrów modalnych konstrukcji. Metody modalne pozwalają ocenić w sposób globalny stan konstrukcji ze wskazaniem lokalnych zaburzeń. Zestawienie i klasyfikacje tych metod identyfikacji uszkodzeń można znaleźć w przeglądowych pracach [1, 2]. Większość metod bazuje na znajomości stanu wyjściowego (bez uszkodzeń) diagnozowanej konstrukcji. Wartości

kolejnych  $n$  częstości drgań własnych układu uszkodzonego  ${}_u\omega_n(l_c, h_c, t_c)$  zależą od położenia uszkodzenia  $l_c$  oraz głębokości uszkodzenia  $h_c$  i długości uszkodzenia  $t_c$ . Wyznaczenie ze wzoru

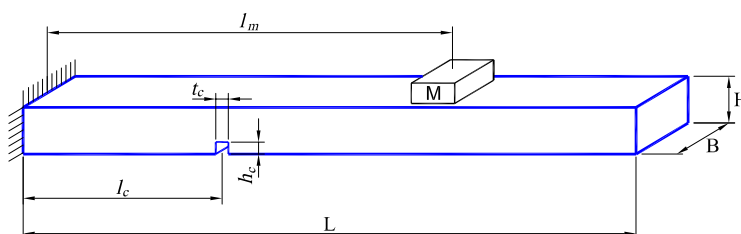
$$\Delta_u\omega_n = \frac{{}_u\omega_n - {}_0\omega_n}{{}_0\omega_n} \quad (1)$$

zmian częstości drgań własnych  $\Delta_u\omega_n$ , określanych na podstawie częstości drgań własnych układu uszkodzonego  ${}_u\omega_n$  oraz częstości drgań własnych układu bez uszkodzenia  ${}_0\omega_n$ , umożliwiła identyfikację uszkodzeń.

Metody bazujące na zmianach częstości drgań własnych konstrukcji są bardzo efektywne zwłaszcza dla układów niesymetrycznych. Zastosowanie kilku pierwszych częstości drgań własnych, bardzo często jest zupełnie wystarczające do identyfikacji uszkodzenia. Dla układów symetrycznych identyfikacja uszkodzenia możliwa jest po wprowadzeniu do układu dodatkowej masy [3]. Zastosowanie zmieniającej położenie dodatkowej masy, jako parametru sterującego zmianami częstości drgań własnych przedstawione w pracy [4], pozwala na identyfikację zmian sztywności w układach belkowych i płytowych. Wymagana jest tam znajomość parametrów modalnych układu bez uszkodzeń.

W niniejszej pracy, autorzy przedstawiają metodę identyfikacji uszkodzenia bazującą na analizie zmian częstości drgań własnych wywołanych zmieniającą masą, w której nie jest wymagana znajomość stanu konstrukcji bez uszkodzenia. Identyfikowane w przykładach uszkodzenia dotyczą belek z ubytkami w materiale spowodowanymi np. korozją, nacięciem itp.

## 2. METODA IDENTYFIKACJI USZKODZENIA – BEZ ZNAJOMOŚCI STANU POCZĄTKOWEGO



Rysunek 1: Belka wspornikowa z uszkodzeniem i dodatkową masą

Efektywność metody autorzy przedstawiają na przykładzie modelu numerycznego (MES) belki wspornikowej pokazanej na Rys. 1. W przykładzie zamodelowano belkę stalową długości  $L = 1,2$  m o przekroju prostokątnym  $40 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$  ( $B \times H$ ) 24 elementami skończonymi. Model numeryczny liniowy, jednowymiarowy uwzględniał elementy belkowe dwuwęzłowe typu Eulera. W przykładach obliczano częstości drgań własnych modelu numerycznego  ${}_m\omega_n(l_c, h_c, t_c, l_m)$  z dodatkową masą, przy stałej długości uszkodzenia  $t_c = 48$  mm. W modelu numerycznym założono zmienne położenie uszkodzenia  $l_c$  w 24 miejscach na całej długości belki oraz głębokość uszkodzenia  $h_c$  zmienną skokowo co 1 mm w zakresie od 1 mm do 8 mm. W przy-

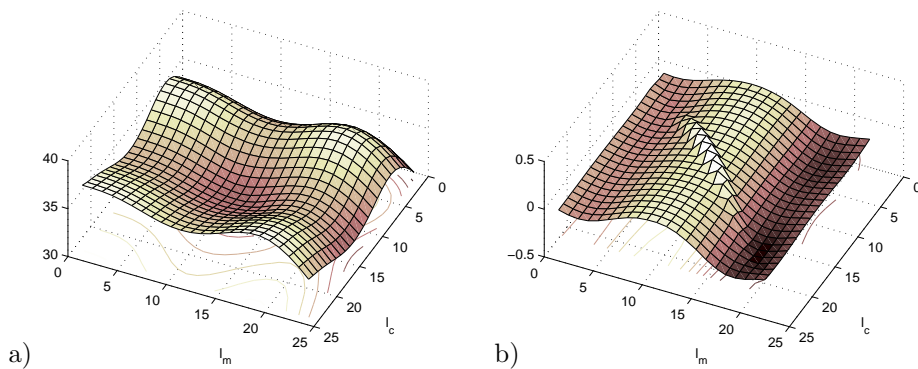
kładach uwzględniano 24 położenia masy  $l_m$  na całej długości belki  $L$ . Dodatkowa sztywnie dołączana w węzłach modelu numerycznego masa ( $M = 0,188$  kg) stanowiła ok. 5% masy całej belki. Dodatkowo, obliczano częstości drgań własnych  ${}^m_0\omega_n(l_m)$  układu bez uszkodzenia ze zmieniającą położenie masą oraz częstości drgań własnych  ${}^u_0\omega_n(l_c, h_c, t_c)$  belki z uszkodzeniem bez dodatkowej masy.

### 2.1. Identyfikacja położenia uszkodzenia

Wprowadzenie do układu zmieniającej położenie masy pozwala, analizując zmiany kilku kolejnych częstości drgań własnych, na identyfikację położenia uszkodzenia. Przykładowo, zakładając głębokość uszkodzenia  $h_c = 3$  mm przy wysokości całego przekroju  $H = 10$  mm, na Rys. 2a pokazano zmianę drugiej częstości drgań własnych  ${}^m_u\omega_2(l_c, l_m)$  dla 24 położenia uszkodzenia  $l_c$  oraz 24 położenia dodatkowej masy  $l_m$ . Patrząc na Rys. 2a, trudno jest wskazać położenie uszkodzenia. W pracy [5] zaproponowano analizę zmian spowodowanych dodatkową masą przez zróżniczkowanie wartości częstości drgań własnych względem położenia masy

$$\frac{d^k({}^m_u\omega_n(l_c, h_c, t_c, l_m))}{dl_m^k}. \quad (2)$$

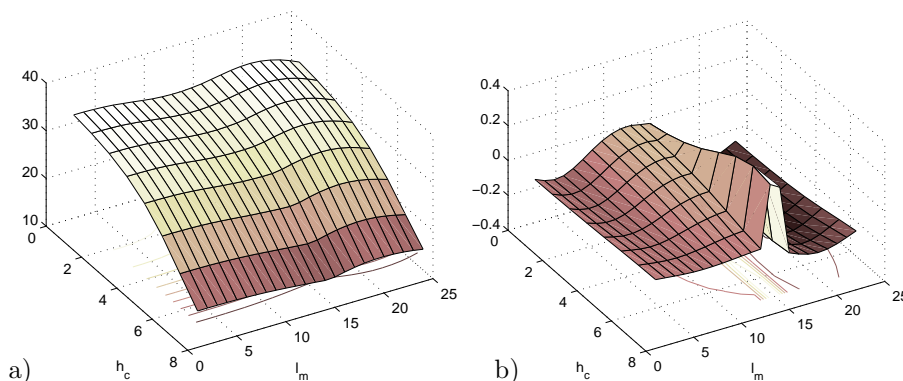
Dlatego też, zastosowanie drugiej pochodnej  $d^2({}^m_u\omega_2)/dl_m^2$  jest zdaniem autorów najefektywniejsze przy lokalizacji uszkodzenia, co widać na Rys. 2b. Można tam zauważyć, że zmieniająca położenie masa przy przejściu przez miejsce uszkodzenia wskazuje to uszkodzenie. Pojawia się tam wyraźnie widoczne lokalne ekstremum. Nie wszystkie położenia uszkodzeń są widoczne. Trudne do identyfikacji położenia uszkodzeń dotyczą fragmentów belki w okolicach węzłów adekwatnej formy drgań wybranej do analizy częstości drgań własnych. Zastosowanie innych częstości drgań własnych pozwala na lokalizację uszkodzeń w obszarach niewęzłowych odpowiadających im form drgań. Podejście takie umożliwia, przy zastosowaniu pewnej kombinacji wybranych częstości drgań własnych, lokalizację uszkodzenia na całej długości belki.



Rysunek 2: Zmiany drugiej częstości drgań własnych względem położenia masy  $l_m$  oraz położenia uszkodzenia  $l_c$  (uszkodzenie –  $t_c = 48$  mm,  $h_c = 3$  mm): a) częstość drgań własnych; b) druga pochodna względem położenia masy  $l_m$

## 2.2. Identyfikacja wielkości uszkodzenia

Identyfikacja wielkości uszkodzenia, w prezentowanym przykładzie - głębokości, wymaga zastosowania pewnego stałego poziomu odniesienia. Oczywiście, wyniki otrzymane dla uszkodzeń o innych głębokościach odzwierciedlają się w postaci odpowiednio większych i mniejszych lokalnych ekstremów, przy zastosowaniu procedury z p. 2.1. Przykładowo, dla uszkodzenia zlokalizowanego w 15. elemencie o zmiennej głębokości, zmianę drugiej częstości drgań własnych pokazano na Rys. 3a. Na wykresie widać, że głębokość uszkodzenia  $h_c$  wpływa na wartości częstości drgań własnych w sposób nieliniowy. Patrząc na wykresie tylko na zmianę wartości częstości drgań własnych względem położenia masy  $l_m$ , trudno jest wnioskować o głębokości uszkodzenia. Posługując się ponownie drugą pochodną względem położenia masy  $d^2(\Delta_u^m \omega_2(h_c, l_m))/dl_m^2$ , na Rys. 3b można rozróżnić prawie wszystkie głębokości uszkodzenia. Problemy z rozróżnieniem mogą być dla trzech ostatnich głębokości uszkodzenia. Na wykresie wartości pochodnych dla tych uszkodzeń są zbliżone. Ponadto powstałe lokalne ekstrema tracą właściwość monotonicznego wzrostu wraz ze wzrostem uszkodzenia.



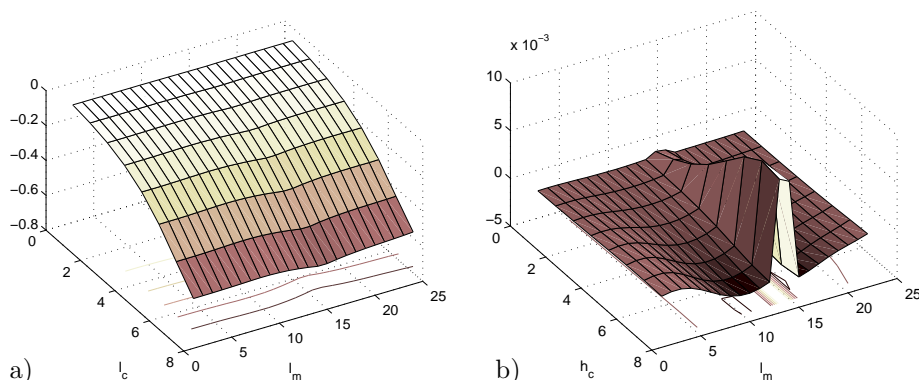
Rysunek 3: Zmiany drugiej częstości drgań własnych względem położenia masy  $l_m$  oraz głębokości uszkodzenia  $h_c$  (uszkodzenie w 15. elemencie -  $l_c = 48$  mm,  $h_c = 1-8$  mm): a) częstość drgań własnych; b) druga pochodna względem położenia masy  $l_m$

W pracy [4] do identyfikacji uszkodzenia zastosowano indeks uszkodzenia  $\Delta_u^m \omega_n$  w postaci

$$\Delta_u^m \omega_n = \frac{{}^m \omega_n - {}_0^m \omega_n}{{}_0^m \omega_n}, \quad (3)$$

który uwzględnia odniesienie do stanu bez uszkodzenia ze zmieniającą położenie na układzie dodatkową masą  ${}_0^m \omega_n$ . Na Rys. 4a pokazano zmianę zaproponowanego indeksu uszkodzenia dla przykładu omawianego powyżej. Zmiany związane z położeniem uszkodzenia w okolicy 15. elementu są słabo widoczne. Na Rys. 4b pokazano drugą pochodną zmiany indeksu uszkodzenia. Tutaj wyraźnie widać położenie uszkodzenia a głębokość uszkodzenia tak jak poprzednio jest prawie w całości rozróżnialna. Niestety, ponownie dla trzech ostatnich uszkodzeń wartości pochodnej są zbliżone, co utrudnia rozróżnienie głębokości. Z uwagi na zastosowany układ odniesienia zastosowanie tej procedury wymaga znajomości charakterystyk modelu dla układu bez uszkodzenia.





Rysunek 4: Zmiany indeksu uszkodzenia (3) względem położenia masy  $l_m$  oraz głębokości uszkodzenia  $h_c$  (uszkodzenie w 15. elemencie –  $t_c = 48$  mm,  $h_c = 1-8$  mm): a) druga częstość drgań własnych; b) druga pochodna względem położenia masy  $l_m$  dla drugiej częstości drgań własnych

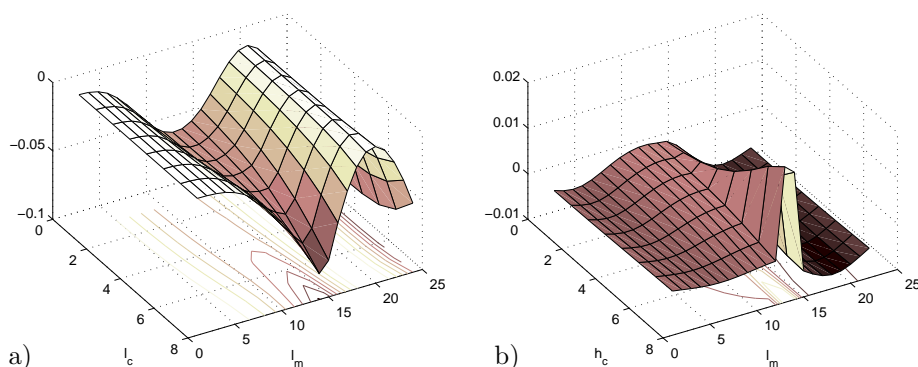
Autorzy niniejszej pracy proponują zastosowanie indeksu uszkodzenia  $\Delta_u^m \omega_n$  w postaci

$$\Delta_u^m \omega_n = \frac{m_u \omega_n - {}^0_u \omega_n}{{}^0_u \omega_n} \quad (4)$$

z odniesieniem do układu z uszkodzeniem bez dodatkowej masy  ${}^0_u \omega_n$ . Podobne podejście można znaleźć w pracy [6]. Na Rys. 5a pokazano zmianę indeksu uszkodzenia. Zauważalna jest, zwłaszcza dla większych uszkodzeń, deformacja wykresu w okolicach 15. elementu, co pozwala wnioskować o położeniu uszkodzenia. Na Rys. 5b pokazano drugą pochodną zmiany indeksu uszkodzenia. Podobnie jak w poprzednich dwu wykresach zastosowanie drugiej pochodnej znakomicie uwypukla lokalizację uszkodzenia. Tutaj jednak, w przeciwieństwie do obu poprzednich wykresów pochodnych (Rys. 3b, Rys. 4b), rozróżnienie głębokości uszkodzenia jest w pełni możliwe. Powstałe lokalne ekstrema nie tracą właściwość monotonicznego wzrostu wraz ze wzrostem uszkodzenia.

### 2.3. Podsumowanie

Zastosowanie metody identyfikacji uszkodzeń bazującej na zmianie częstości drgań własnych wywołanych zmieniającą położenie dodatkową masą dla konstrukcji belkowych jest bardzo skuteczne. Interesującym jest fakt, iż można dokonać identyfikacji uszkodzenia bez znajomości *a priori* parametrów modalnych dla układu bez uszkodzenia. Możliwe jest to, przy zastosowaniu analizy zmian wartości częstości drgań własnych oraz zmian pochodnych tych częstości względem położenia dodatkowej masy. W zasadzie, układ odniesienia nie jest potrzebny do oceny położenia uszkodzenia w analizowanym przykładzie belki wspornikowej. Niemniej jednak zastosowanie indeksu uszkodzenia w proponowanej przez autorów postaci, wzór (4), pozwala skutecznie rozróżnić głębokość uszkodzenia. Należy się jeszcze zastanowić co do skuteczności prezentowanej metody, przy rozróżnianiu uszkodzeń różnych długości i głębokości.



Rysunek 5: Zmiany indeksu uszkodzenia (4) względem położenia masy  $l_m$  oraz głębokości uszkodzenia  $h_c$  (uszkodzenie w 15. elemencie –  $t_c = 48$  mm,  $h_c = 1-8$  mm): a) druga częstota drgań własnych; b) druga pochodna względem położenia masy  $l_m$  dla drugiej częstota drgań własnych

Dodatkowym atutem stosowania układu odniesienia, w postaci układu z uszkodzeniem bez dodatkowej masy  ${}^0\omega_n$ , jest wygodne zastosowanie tej metody do identyfikacji uszkodzeń w modelach rzeczywistych, dla których nie znamy stanu początkowego  ${}^0\omega_n$ . Weryfikacja uzyskanych wyników dla obiektu rzeczywistego zgodnym modelem numerycznym może być łatwiejsza, wobec zastosowania względnych zmian częstoty drgań własnych, zamiast samych wartości częstoty drgań własnych. Ponadto takie podejście może być praktyczniejsze także ze względu na to, iż na wartości częstoty drgań własnych ma wpływ oprócz samego uszkodzenia i jego wielkości także temperatura otoczenia.

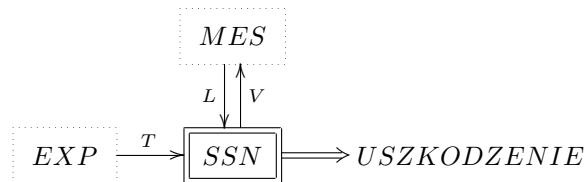
Reasumując, stosowanie tej metody wymaga pomiaru zamian kilku częstoty drgań własnych dla układu z uszkodzeniem dla wszystkich położań dodatkowej masy na układzie. Ze względów praktycznych liczba punktów położań dodatkowej masy powinna być dobrana adekwatnie do możliwości sprzętowych, czasowych i finansowych.

### 3. ZASTOSOWANIE SSN DO OCENY STANU KONSTRUKCJI

Sztuczne sieci neuronowe (SSN) z uwagi na swoje właściwości aproksymacji są dobrym narzędziem do identyfikacji uszkodzeń. W pracy [7] zastosowano SSN jako narzędzie predykcji uszkodzeń w belce wspornikowej dla układu bez dodatkowej masy, przy znajomości stanu nieuszkodzonego belki. Nauczona na części wzorców belki uszkodzonej (zmiany częstoty drgań własnych wg (1)) sieć, poprawnie identyfikowała pozostałe wzorce uszkodzeń belki.

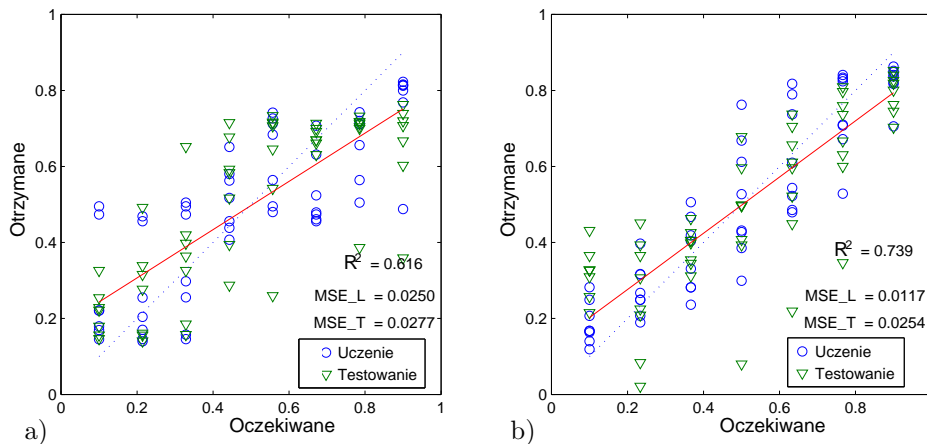
Autorzy proponują zastosowanie SSN do predykcji uszkodzeń w układach belkowych z wykorzystaniem omawianej metody bazującej na zmianach parametrów modalnych wywołanych zmieniającą położań dodatkową masą. Do identyfikacji uszkodzenia w tej metodzie konieczny jest pomiar wartości częstoty drgań własnych dla wszystkich położań masy. Wykorzystanie wszystkich tak zgromadzonych danych przez SSN jest utrudnione. Z przyczyn praktycznych i ekonomicznych zmniejszenie liczby pomiarów jest uzasadnione (np. mniej położań masy, mniej częstoty własnych). Autorzy postulują możliwość identyfikacji uszkodzeń dla mniejszej liczby pomiarów przy za-

stosowaniu SSN. Przykłady takiej identyfikacji uszkodzeń opisano w pracy [8], gdzie porównano uzyskane wyniki identyfikacji uszkodzenia sieciami neuronowymi dla wzorców z symulacji numerycznych oraz dla wzorców z pomiarów laboratoryjnych. Stosując opisaną w pracy [9] procedurę optymalizacyjną doboru położenia masy możemy w konsekwencji ograniczyć liczbę pomiarów na rzeczywistej konstrukcji. Optymalizacja polegała na wyborze, dającej najmniejszy błąd średniokwadratowy ( $MSE_T$ ) dla wzorców testowania, otrzymanych z kombinacji częstości drgań własnych dla kilku różnych położenia dodatkowej masy. Podczas optymalizacji uwzględniano zmianę architektury sieci przy stałej liczbie wzorców uczenia i testowania.



Rysunek 6: Identyfikacja uszkodzenia z wykorzystaniem SSN

W pracy [8] wykorzystano schemat identyfikacji uszkodzeń (Rys. 6) z zastosowaniem SSN, dla którego uczenie sieci zrealizowano na danych z modelu numerycznego (MES), natomiast testowanie wykonano na pomiarach uzyskanych w laboratorium na modelu rzeczywistym (EXP). Wyniki takiej identyfikacji pokazano na wykresach (Rys. 7), gdzie dla belki wspornikowej rozpatrywano 8 położenia uszkodzenia i 7 wielkości uszkodzenia.



Rysunek 7: Identyfikacja uszkodzenia: a) położenie; b) wielkość [8]

#### 4. WNIOSKI

Prezentowana metoda identyfikacji uszkodzeń bazująca na zmianach parametrów modalnych spowodowanych zmieniającą położenie dodatkową masą, pozwala na identyfikację uszkodzeń w układach belkowych. Teoretycznie stosowanie tej metody wymaga pomiaru parametrów modalnych, w prezentowanych przykładach częstości drgań własnych, dla wszystkich położen dodatkowej masy. Przy zastosowaniu SSN można ograniczyć liczbę koniecznych pomiarów. Podstawową zaletą prezentowanej metody jest możliwość identyfikacji uszkodzeń, ocenianych belek, bez konieczności znajomości parametrów modalnych dla stanu bez uszkodzeń.

#### LITERATURA

- [1] S.W. Deobeling, C.R. Farrar, M.B. Prime, D.W. Sheritz, *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristic: a literature review*, Los Alamos Natl. Lab, 1996.
- [2] E.P. Carden, P. Fanning, Vibration based condition monitoring: A review, *Structural Health Monitoring*, **3**, 355–377, 2004.
- [3] X.F. Yang, A.S.J. Swamidias, R. Seshadri, Crack identification in vibrating beams using the energy method, *Journal of Sound and Vibration*, **244**, 339–357, 2001.
- [4] K. Dems, Z. Mróz, Identification of damage in beam and plate structure using parameter-dependent frequency changes, *Engineering Computations*, **18**, 96–120, 2001.
- [5] S. Zhong, S.O. Oyadiji, Analytical predictions of natural frequencies of cracked simply supported beams with a stationary roving mass, *Journal of Sound and Vibration*, **311**, 328–352, 2008.
- [6] S. Zhong, S.O. Oyadij, K. Ding, Response-only method for damage detection of beam-like structures using high accuracy frequencies with auxiliary mass spatial probing, *Journal of Sound and Vibration*, **311**, 1075–1099, 2008.
- [7] Wł. Łakota, *Detekcja i lokalizacja uszkodzeń konstrukcji belkowych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 1999.
- [8] A. Borowiec, L. Ziemiański, Identyfikacja zmian sztywności we wsporniku na podstawie zmian parametrów modelu modalnego, *Zeszyty Naukowe PRz: Budownictwo i Inżynieria Środowiska*, **45**, 25–36, 2007.
- [9] A. Borowiec, L. Ziemiański, Identification of damage in multispan beams using parameter-dependent frequency changes and neural networks, C.A. Mota Soares, J.A.C. Martins, H.C. Rodrigues, J.A.C. Ambrosio, C.A.B. Pina eds., *III European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. Book of Abstracts*, Lisbon, Portugal, June, 2006.

## **ANALIZA KORELACYJNA DRGAŃ LOSOWYCH MOSTU WANTOWEGO OBCIĄŻONEGO PORYWISTYM WIATREM**

**Danuta Bryja, Anna Woszczyna, Dawid Prokopowicz**

Politechnika Wroclawska, Instytut Inżynierii Lądowej  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław  
e-mail: {danuta.bryja, anna.woszczyna, dawid.prokopowicz}@pwr.wroc.pl

---

**Abstract:** *The paper concerns stochastic analysis of cable-stayed bridge response due to the dynamic action of gusty wind. Non-stationary wind model with time dependent periodic mean speed is presented for investigating the buffeting bridge response amplified in resonant regime. Equation of motion is formulated by substructure technique. Buffeting forces are derived under the assumption that their span-wise correlation is the same as that of incoming wind fluctuations. The bridge response is obtained neglecting structure nonlinearities, as a sum of component responses due to buffeting forces acting on scattered deck sections. Mean function and variance of bridge response are obtained. Two approximate formulas of variance are derived by using two mathematical models of wind turbulence correlations. The outline of numerical application is presented.*

---

### **1. WSTĘP**

Mosty wzmocnione wantami są coraz częściej stosowanymi konstrukcjami w inżynierii mostowej: są reprezentacyjne i mają stosunkowo niski koszt realizacji w porównaniu z innymi mostami o dużych rozpiętościach. Dużą zaletą mostów wantowych jest to, że można nimi pokonywać rozległe przeszkody środowiskowe, takie jak rzeki, doliny, itp., dlatego właśnie przy projektowaniu tych mostów trzeba pamiętać, że są to często obiekty narażone na działanie silnego, turbulentnego wiatru.

Niniejsza praca dotyczy drgań mostów wantowych obciążonych porywistym wiatrem, czyli wiatrem o losowo zmiennej w czasie prędkości. Obciążenie to, nazywane w pracach anglojęzycznych buffetingiem, jest zdefiniowane jako: „*the unsteady loading of a structure by velocity fluctuations in the oncoming flow*” – Simiu i Scanlan [1]. Problem buffetingu jest szeroko omawiany w literaturze [1, 2] przy zastosowaniu klasycznego modelu wiatru, którego główny składnik prędkości jest sumą stałej prędkości średniej i zmiennych w czasie, losowych fluktuacji o charakterze stacjonarnym. Takie podejście nie pozwala analizować efektów rezonansowych działania zmiennego wiatru, które mogą występować w praktyce, gdy badane konstrukcje są stosunkowo wiotkie, czyli charakteryzują się niskimi częstotliwościami własnymi. Simiu i Scanlan [1] stwierdzają: „*flexible structures may exhibit resonant amplification effects induced by velocity fluctuations*”. Z punktu widzenia projektowania

i realizacji mostów wantowych dużych rozpiętości, problem ewentualnego rezonansowego wzmocnienia drgań, spowodowanego buffetingiem, nie powinien być zatem bagatelizowany: może prowadzić do dyskomfortu użytkowników, do zmęczenia materiału konstrukcji, ale przede wszystkim może powodować znaczne przeciążenia dynamiczne z uwagi na stosunkowo małe tłumienie drgań, charakterystyczne dla tego typu obiektów.

W związku z powyższym, Autorzy niniejszej pracy zaproponowali modyfikację klasycznego modelu wiatru, która pozwala na analizowanie drgań konstrukcji w strefach okołorezonansowych. Założono, że prędkość wiatru działającego na dźwigar mostowy ma dwie składowe: poziomą  $U(x, t)$ , prostopadłą do osi podłużnej mostu i zgodną z głównym kierunkiem wiatru, oraz pionową  $W(x, t)$  prostopadłą do tego kierunku. Trzeci składnik prędkości wiatru działający wzdłuż pomostu pominięto ze względu na mały wpływ na drgania konstrukcji. Przyjęto następnie, że prędkość  $U(x, t)$  jest sumą stałej prędkości  $\bar{U}$  oraz losowych fluktuacji  $\hat{u}(x, t)$ , tak jak w modelu klasycznym, ale wprowadzono dodatkowo składnik okresowo zmienny w czasie, opisany funkcją harmoniczną  $\bar{u}(t) = \lambda \bar{U} \sin \omega_r t$ , gdzie  $\omega_r$  jest częstością zbliżoną do częstości własnej drgań konstrukcji. Składnik ten należy traktować jako główny, deterministyczny komponent fluktuacji prędkości wiatru, którego skalę opisuje współczynnik  $\lambda = \text{am } \bar{u} / \bar{U}$ . Pionowa składowa prędkości  $W(x, t)$  jest wyłącznie fluktuacją losową  $\hat{w}(x, t)$ , jak w modelu klasycznym. Funkcje  $\hat{u}(x, t)$  i  $\hat{w}(x, t)$  są gaussowskimi stacjonarnymi procesami stochastycznymi o zerowej wartości oczekiwanej i znanych funkcjach korelacyjnych wynikających z założonego widma wiatru. Pełny opis losowego pola prędkości ma zatem postać

$$U(x, t) = \bar{U} + \bar{u}(t) + \hat{u}(x, t) = \bar{U}(1 + \lambda \sin \omega_r t) + \hat{u}(x, t), \quad W(x, t) = \hat{w}(x, t). \quad (1)$$

Główna składowa prędkości  $U(x, t)$  tworzy niestacjonarny proces stochastyczny o okresowo zależnej od czasu funkcji średniej  $E[U(x, t)] = \bar{U}(1 + \lambda \sin \omega_r t)$ , gdzie symbol  $E[\cdot]$  oznacza operację obliczenia wartości oczekiwanej.

## 2. SIŁY AERODYNAMICZNE

Zaproponowany opis wiatru zastosowano do sformułowania sił aerodynamicznych działających na dźwigar konstrukcji mostowej. Aby uprościć rozważania, losowe pole prędkości podzielono na  $n$  sekcji wzdłuż rozpiętości mostu, zgodnie z podziałem na elementy w metodzie elementów skończonych, zastosowanej do modelowania dźwigara. Podobne postępowanie jest ogólnie stosowane podczas symulacji pola prędkości wiatru (Cao i in. [3]). Przyjęto, że losowe fluktuacje prędkości nie zależą od zmiennej przestrzennej  $x$  w obrębie danej sekcji, co prowadzi do zastąpienia funkcji losowych  $\hat{u}(x, t)$ ,  $\hat{w}(x, t)$  dwóch zmiennych  $x$  i  $t$  – zbiorami funkcji losowych zależnych tylko od czasu:  $\hat{u}_j(t) = \hat{u}(x_j, t)$ ,  $\hat{w}_j(t) = \hat{w}(x_j, t)$ , gdzie  $j = 1 \dots n$  jest numerem sekcji, a  $x_j$  współrzędną jej punktu środkowego. W ten sposób losowe fluktuacje prędkości są reprezentowane przez dwa wektorowe procesy stochastyczne:  $\hat{\mathbf{u}}(t) = [\hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_n(t)]^T$ ,  $\hat{\mathbf{w}}(t) = [\hat{w}_1(t), \dots, \hat{w}_n(t)]^T$ , złożone z procesów składowych o zerowych wartościach oczekiwanych i o jednakowej funkcji autokorelacyjnej  $K_{\hat{u}_j \hat{u}_j}(t) = K_{\hat{u}}(t)$ ,  $K_{\hat{w}_j \hat{w}_j}(t) = K_{\hat{w}}(t)$ , gdzie  $t = t_1 - t_2$ ,  $j = 1 \dots n$ .

Autokorelacje procesów można obliczyć na podstawie założonego widma wiatru  $S_{\hat{u}}(t)$ ,  $S_{\hat{w}}(t)$ , korzystając ze znanej zależności między gęstością widmową i kowariancją:

$$C_{\hat{u}}(t) = 2 \int_0^{\infty} S_{\hat{u}}(\omega) \cos \omega t d\omega, \text{ przy czym w analizowanym przypadku mamy } C_{\hat{u}}(t) = K_{\hat{u}}(t).$$

Analogiczne zależności dotyczą procesów  $\hat{w}_j(t)$ . Korelacje wzajemne procesów

$$K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(t) = 2 \int_0^{\infty} S_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (2)$$

maleją, gdy rośnie odległość  $\delta_{jk} = |x_j - x_k|$  między sekcjami dźwigara mostu. Fakt ten wynika z relacji określającej wzajemne gęstości widmowe

$$S_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\omega) = \sqrt{S_{\hat{u}_j \hat{u}_j}(\omega) S_{\hat{u}_k \hat{u}_k}(\omega)} \cdot \text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = S_{\hat{u}}(\omega) \text{coh}(\delta_{jk}, \omega), \quad (3)$$

w której funkcja koherencji zanika w czasie (Cao i in. [3]).

Siły aerodynamiczne (siły buffetingu) odpowiadające założonemu w pracy modelowi prędkości wiatru są równomiernie rozłożone wzdłuż każdej wydzielonej sekcji dźwigara mostowego. Odpowiednie formuły określające siłę ciągnącą, unoszącą i moment odchylający zostały szczegółowo wyprowadzone w pracy [4] i mają postać:

$$D_j(t) = \rho B C_D \chi_{Du} f_j^u(t) + \rho B C'_D \chi_{Dw} f_j^w(t) = D_j^u f_j^u(t) + D_j^w f_j^w(t), \quad (4)$$

$$L_j(t) = -\rho B C_L \chi_{Lu} f_j^u(t) - \rho B (C'_L + C_D) \chi_{Lw} f_j^w(t) = L_j^u f_j^u(t) + L_j^w f_j^w(t), \quad (5)$$

$$M_j(t) = \rho B^2 C_M \chi_{Mu} f_j^u(t) + \rho B^2 C'_M \chi_{Mw} f_j^w(t) = M_j^u f_j^u(t) + M_j^w f_j^w(t), \quad (6)$$

gdzie:  $f_j^u(t) = 1/2[\bar{U} + \bar{u}(t)]^2 + [\bar{U} + \bar{u}(t)]\hat{u}_j(t)$ ,  $f_j^w(t) = 1/2[\bar{U} + \bar{u}(t)]\hat{w}_j(t)$ ,  $\rho$  jest gęstością powietrza,  $B$  szerokością dźwigara,  $C_D$ ,  $C_L$ ,  $C_M$  są współczynnikami aerodynamicznymi,  $C'_D = dC_D/d\alpha$ ,  $C'_L = dC_L/d\alpha$ ,  $C'_M = dC_M/d\alpha$ . Funkcje admitancji zależne od częstości pulsacji wiatru [2]:  $\chi_{Du}$ ,  $\chi_{Dw}$ ,  $\chi_{Lu}$ ,  $\chi_{Lw}$ ,  $\chi_{Mu}$ ,  $\chi_{Mw}$  można wyznaczyć na podstawie częstości  $\omega_r$  głównego składnika fluktuacji.

### 3. DRGANIA MOSTU SPOWODOWANE BUFFETINGIEM

Równanie ruchu analizowanego mostu zostało sformułowane przy użyciu techniki podstruktur. Jest to metoda pozwalająca na niezależne wyprowadzenie równań równowagi dynamicznej poszczególnych podstruktur, z zastosowaniem różnych metod – optymalnych dla danej podstruktury. Równanie łączne wyprowadza się z uwzględnieniem warunków zgodności przemieszczeniowej w punktach połączenia podstruktur i warunków równowagi sił wzajemnej interakcji [5]. Problem zastosowania techniki podstruktur do rozwiązywania zagadnień dynamiki złożonych konstrukcji ciągnowych autorzy omówili szczegółowo w pracy [6], na przykładzie analizy drgań liniowych i nieliniowych dwuprzęsłowego mostu wantowego obciążonego ruchomą siłą jednostkową. Do wyprowadzenia równań ruchu dźwigara i pylonów użyto metody elementów skończonych, natomiast drgania cięgien opisano za pomocą podejścia kontynualnego, z zastosowaniem nieliniowego modelu nachylonego cięga, przedstawionego w pracy [7]. Omówione podejście zastosowano też

w niniejszej pracy, przy czym efekty nieliniowe pominięto w rozważaniach ze względu na fakt, iż mosty wantowe są konstrukcjami słabo nieliniowymi.

Dowolna liniowa reakcja (odpowiedź) mostu  $R(t)$  może być przedstawiona w postaci sumy reakcji składowych  $R_j(t)$  odpowiadających obciążeniom (5)-(7) poszczególnych sekcji mostu:  $R(t) = R_1(t) + \dots + R_n(t)$ . Rozwiązania składowe  $R_j(t) = R_j^u(t) + R_j^w(t)$  są z kolei sumą reakcji wynikających z poziomej i pionowej składowej prędkości wiatru, które można obliczyć za pomocą następujących całek spłotowych

$$R_j^u(t) = \int_0^t H_{R_j}^u(t-\tau) f_j^u(\tau) d\tau, \quad R_j^w(t) = \int_0^t H_{R_j}^w(t-\tau) f_j^w(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Funkcje  $H_{R_j}^u(t-\tau)$  i  $H_{R_j}^w(t-\tau)$  oznaczają tu odpowiedzi konstrukcji  $R_j^u(t)$ ,  $R_j^w(t)$  na impulsy jednostkowe działające w chwili  $\tau$ , w kierunku „u” i „w”. Są to funkcje analogiczne do impulsowej funkcji przejścia, którą stosuje się w teorii układów o jednym dynamicznym stopniu swobody. Wyznacza się je numerycznie na podstawie rozwiązania równania ruchu mostu, które w rozważanym przypadku ma następującą postać ogólną:  $\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_j^u f_j^u(t)$  lub  $\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_j^w f_j^w(t)$ . Do wyznaczenia funkcji przejścia  $H_{R_j}^u(t-\tau)$  i  $H_{R_j}^w(t-\tau)$  należy przyjąć zerowe warunki początkowe oraz podstawić  $f_j^u(t) = \delta(t-\tau)$ ,  $f_j^w(t) = \delta(t-\tau)$ , gdzie  $\delta(t-\tau)$  jest funkcją Diraca.

#### 4. CHARAKTERYSTYKI DRGAŃ STOCHASTYCZNYCH W ZAKRESIE TEORII KORELACYJNEJ

Stosując aparat matematyczny procesów stochastycznych obliczono funkcję średnią (wartość oczekiwaną) i wariancję odpowiedzi mostu, otrzymując następujące formuły

$$E[R(t)] = \frac{1}{2} \bar{U}^2 \int_0^t (1 + \lambda \sin \omega_r \tau)^2 H_{R_j}^u(t-\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_R^2 = & \bar{U}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^t (1 + \lambda \sin \omega_r \tau_1) H_{R_j}^u(t-\tau_1) K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(\tau_1 - \tau_2) H_{R_k}^u(t-\tau_2) (1 + \lambda \sin \omega_r \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ & + \frac{1}{4} \bar{U}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^t \int_0^t (1 + \lambda \sin \omega_r \tau_1) H_{R_j}^w(t-\tau_1) K_{\hat{w}_j \hat{w}_k}(\tau_1 - \tau_2) H_{R_k}^w(t-\tau_2) (1 + \lambda \sin \omega_r \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Obliczenie wariancji (9) na podstawie funkcji korelacyjnych (2) wymaga dużej mocy obliczeniowej i jest bardzo czasochłonne ze względu na konieczność numerycznego wyznaczenia wartości wielu całek podwójnych. W celu szybkiego oszacowania wariancji zaproponowano w pracy [4] dwa modele matematyczne opisujące w przybliżeniu korelację czasową fluktuacji prędkości wiatru:

$$(i) \quad K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(t) = \alpha_{jk}^u \sigma_u^2 - \text{korelacja stała},$$

$$(ii) \quad K_{\hat{u}_j \hat{u}_k}(t) = \alpha_{jk}^u \sigma_u^2 \delta(t) - \text{korelacja typu „biały szum”},$$



gdzie  $\alpha_{jk}^u = \int_0^\infty S_{\hat{u}}(\omega) \text{coh}(\delta_{jk}, \omega) d\omega / \int_0^\infty S_{\hat{u}}(\omega) d\omega$ , czyli  $\alpha_{jj}^u = 1$ , oraz  $\sigma_u^2 = K_u(0)$ . Formułując analogiczne relacje dla procesów  $\hat{w}_j(t)$  otrzymamy po podstawieniu do (10) następujące rozwiązania:

$$(i) \quad \sigma_R^2(t) = \bar{U}^2 \sigma_u^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^u h_j^u(t) h_k^u(t) + \frac{1}{4} \bar{U}^2 \sigma_w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^w h_j^w(t) h_k^w(t), \quad (10)$$

$$(ii) \quad \sigma_R^2(t) = \bar{U}^2 \sigma_u^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^u g_{jk}^u(t) + \frac{1}{4} \bar{U}^2 \sigma_w^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{jk}^w g_{jk}^w(t), \quad (11)$$

$$h_j^u(t) = \int_0^t H_{Rj}^u(t-\tau)(1 + \lambda \sin \omega_r \tau) d\tau, \quad g_{jk}^u(t) = \int_0^t H_{Rj}^u(t-\tau) H_{Rk}^u(t-\tau)(1 + \lambda \sin \omega_r \tau)^2 d\tau,$$

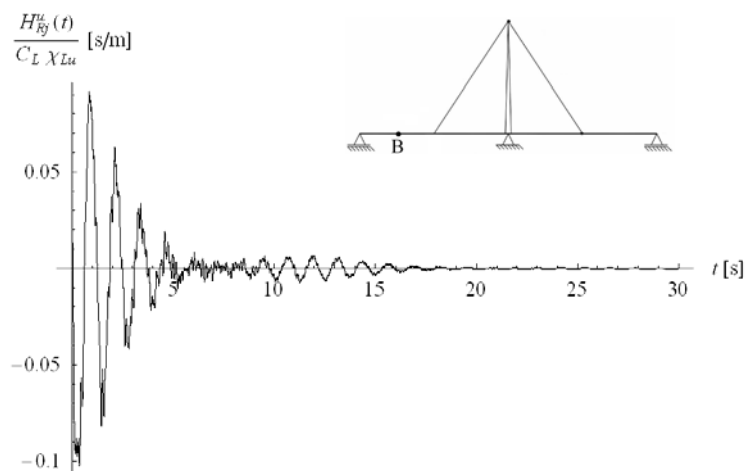
i podobnie  $h_j^w(t)$ ,  $g_{jk}^w(t)$ . Wzory (10) i (11) mogą w przybliżeniu stanowić dolne i górne oszacowanie wariancji odpowiedzi mostu określonej wzorem (9). Fakt ten wynika z przeciwstawnych własności założonych funkcji korelacyjnych [8].

## 5. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA – OBLICZENIA NUMERYCZNE

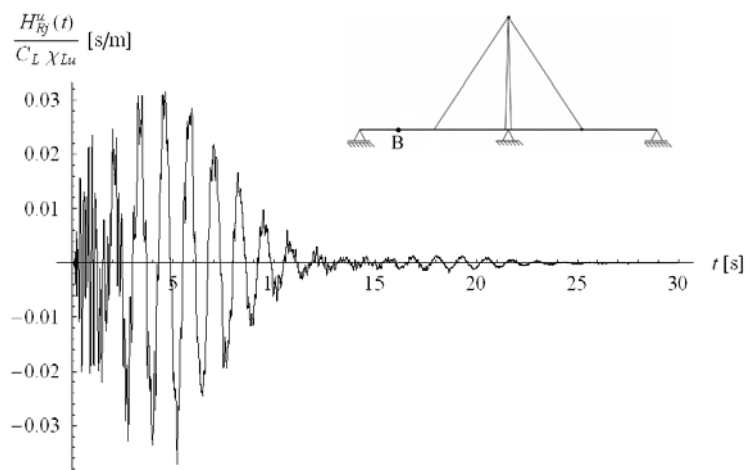
Zaproponowana metoda posłużyła do przeprowadzenia wstępnych analiz numerycznych. Przedstawiono szkic pełnego rozwiązania w celu zilustrowania przydatności przedstawionej procedury do charakteryzowania ekstremalnej odpowiedzi mostu na wymuszenie spowodowane buffetingiem. Obliczenia zostały wykonane dla hipotetycznego dwuprzęsłowego mostu wantowego o rozpiętości 300 m (Rys. 1). Pierwsza częstość własna drgań pionowych mostu wynosi  $\omega_1 = 4.684$  rad/s. Tłumienie drgań opisano przy użyciu wariantu masowego hipotezy tłumienia wiskotycznego, przyjmując liczbę tłumienia  $\alpha = 0,05$  i macierz tłumienia  $\mathbf{C} = \mu \mathbf{B}$ , gdzie  $\mu = 2\alpha\omega_1$ . W analizie numerycznej pominięto pionową składową prędkości wiatru  $\hat{w}(x,t)$ , a obciążenie siłami aerodynamicznymi ograniczono do siły unoszącej (5), aby problem dotyczył wyłącznie zagadnienia płaskiego (drgań pionowych). Dźwigar mostu podzielono na 16 sekcji ( $n = 16$ ) i wyznaczono najpierw przebiegi czasowe wszystkich impulsowych funkcji przejścia  $H_{Rj}^u(t)$ ,  $j = 1..16$ , oraz przebiegi wszystkich korelacji (2), tworzących macierz o rozmiarze  $16 \times 16$ . Wymienione funkcje stanowią kluczowe elementy rozwiązań teoretycznych przedstawionych w niniejszej pracy. Przykładowe wyniki obliczeń pokazano na kolejnych rysunkach.

Rys. 1 i 2 ilustrują wybrane przebiegi funkcji przejścia, obliczone dla pionowego przemieszczenia punktu B i odpowiadające obciążeniu sekcji 1 i 16. Na Rys. 3 przedstawiono funkcje korelacyjne opisujące losowe fluktuacje głównej składowej prędkości wiatru działającego na wybrane sekcje dźwigara. Widmo wiatru założono w postaci funkcji spektralnej Kaimala, wyrażonej według autorów pracy [3] następującym wzorem:  $nS(n)/U_*^2 = 200f/(1+50f)^{5/3}$ , gdzie  $n = \omega/2\pi$ ,  $f = nz/\bar{U}(z)$ ,  $U_* = K\bar{U}(z)/\ln(z/z_0)$ . Funkcję koherencji opisano modelem Davenporta:  $\text{coh}(\delta_{jk}, \omega) = \exp(-\lambda_c \omega \delta_{jk} / 2\pi \bar{U}(z))$ . Do obliczeń przyjęto  $\bar{U}(z) = 40$  m/s,  $z = 50$  m,  $z_0 = 0,03$  m,  $K = 0,4$ ,  $\lambda_c = 8$ . Wykresy

przedstawione na rysunku dotyczą korelacji funkcji losowej  $\hat{u}_1(t)$ , która opisuje fluktuacje prędkości wiatru w pierwszej sekcji mostu. Pokazano kolejno: autokorelację i kolejne korelacje z fluktuacjami prędkości w sekcjach 4, 8, 12 i 16. Korelacje asymptotycznie znikają w czasie do zera i maleją ze wzrostem odległości między sekcjami mostu.



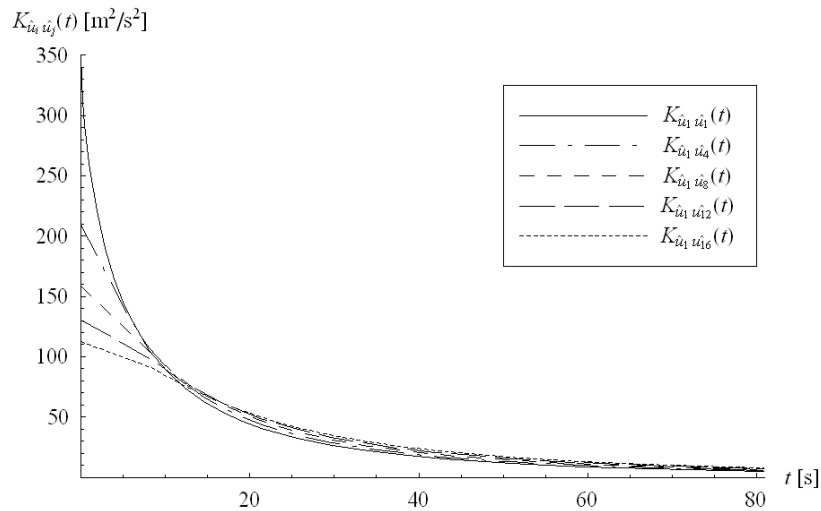
Rysunek 1: Impulsowa funkcja przejścia dla pionowych przemieszczeń punktu B ( $j = 1$ )



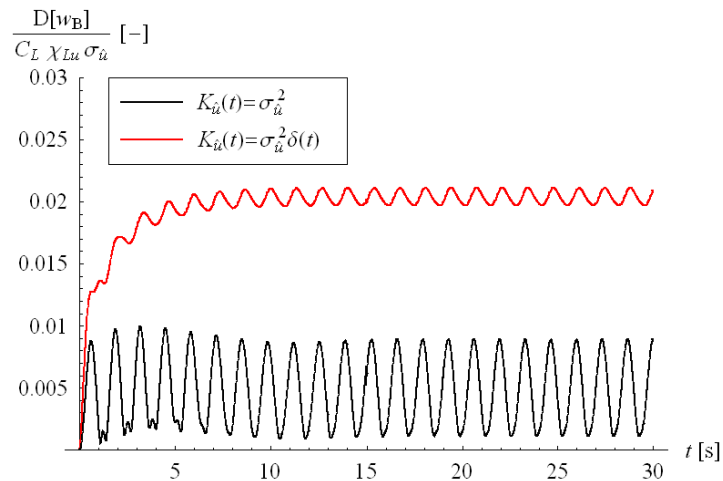
Rysunek 2: Impulsowa funkcja przejścia dla pionowych przemieszczeń punktu B ( $j = 16$ )

Impulsowe funkcje przejścia i funkcje korelacyjne stanowią podstawę obliczenia wariancji odpowiedzi mostu, określonej wzorem (9). Obliczenie to jest bardzo czasochłonne. Obecnie autorzy prowadzą badania zmierzające do opracowania efektywnego programu komputerowego, który umożliwi analizę numeryczną tego zagadnienia. Wyniki analizy

będą przedstawione w odrębnej publikacji. W niniejszej pracy wykonano obliczenia według wzorów przybliżonych (10) i (11), które umożliwiają wstępne oszacowanie wariancji.



Rysunek 3: Funkcje korelacyjne opisujące losową fluktuację prędkości wiatru działającego na pierwszą sekcję mostu



Rysunek 4: Odchylenie standardowe pionowego przemieszczenia punktu B

Na Rys. 4 przedstawiono przebiegi czasowe odchylenia standardowego  $D[w_B]$  pionowego przemieszczenia mostu w punkcie B, wyznaczone przy założeniu stałej korelacji czasowej fluktuacji prędkości wiatru i korelacji typu „biały szum”. Spodziewana wartość odchylenia standardowego otrzymana ze wzoru (9) powinna mieścić się pomiędzy przedstawionymi rozwiązaniami. Do obliczeń przyjęto, że okresowy deterministyczny składnik

fluktuacji prędkości wiatru  $\bar{u}(t) = \lambda \bar{U} \sin \omega_r t$  jest określony przez podstawową częstotliwość drgań własnych mostu, czyli  $\omega_r = \omega_1$ , współczynnik skali wynosi  $\lambda = 1/4$ ,  $\bar{U} = 20$  m/s.

## 6. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano niestacjonarny model losowego pola wiatru z okresowo zmiennym w czasie składnikiem prędkości i przedstawiono jego zastosowanie do analizy drgań mostów wantungowych, spowodowanych buffetingiem. Zaproponowano oryginalną, analityczno-numeryczną metodę wyznaczania charakterystyk drgań losowych w zakresie teorii korelacyjnej. Przedstawione podejście pozwala określić niekorzystny wpływ działania zjawiska buffetingu w sytuacji, gdy następuje wzmocnienie drgań konstrukcji w strefie okołorezonansowej. W mostach wantungowych efekty rezonansowe wynikające z fluktuacji prędkości wiatru mogą być stosunkowo duże, ze względu na małe tłumienie drgań. Zatem nie powinny być pomijane nawet wtedy, gdy prawdopodobieństwo wystąpienia drgań rezonansowych jest niewielkie. Omówioną w pracy metodę, z zastosowaniem modelu wiatru z harmonicznym składnikiem odniesionym do częstotliwości własnej drgań mostu, można łatwo wzbogacić przez uwzględnienie sił samowzbudnych definiowanych w dziedzinie częstotliwości. Problem ten będzie przedmiotem rozważań w przyszłych pracach Autorów.

## LITERATURA

- [1] E. Simiu, R. H. Scanlan, *Wind effects on structures. Fundamentals and Applications to Design*. John Wiley & Sons, 1996.
- [2] X. Chen, A. Kareem, Advanced in modeling of aerodynamic forces on bridge decks. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **128**, No. 11, 1193-1205, 2002.
- [3] Y. Cao, H. Xinang, H. Zhou, Simulation of stochastic wind field on long-span bridges. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, **126**, No. 11, 1-6, 2000.
- [4] D. Bryja, A. Woszczyzna, D. Prokopowicz, Non-stationary wind model in buffeting analysis of cable-stayed bridge, *Proc. of 7th European Conference on Structural Dynamics (EURODYN 2008)*, Southampton, United Kingdom, 2008, (in print).
- [5] B. Biondi, G. Muscolino, A. Sofi, A substructure approach for the dynamic analysis of train-track –bridge system. *Computers and Structures*, No. 83, 2271-2281, 2005.
- [6] D. Bryja, M. Knawa, D. Prokopowicz, A. Woszczyzna, Zastosowanie techniki podstruktur do modelowania kładek podwieszonych, *Seminarium: Wrocławskie Dni Mostowe 2007. Kładki dla pieszych. Architektura, projektowanie, realizacja, badania*, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, 191-198, 2007.
- [7] A. Woszczyzna, D. Bryja, D. Prokopowicz, Nonlinear dynamics of an inclined cable subjected to boundary motion conditions, *Proc. in Appl. Math. And Mech. (PAMM)*, **7**, No. 10.1002/pamm.200700040, 4040001-4040002, 2007.
- [8] W.A. Gardner, *Introduction to random processes with applications to signals and systems*, Macmillan Pub. Comp., New York, 1986.

## **ZMIENNOŚĆ PARAMETRÓW MODALNYCH W ZALEŻNOŚCI OD CHARAKTERU ZNISZCZENIA ELEMENTÓW BELKOWYCH**

**Lidia Buda-Ożóg, Władysław Łakota**

Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Konstrukcji  
ul Poznańska 2, 35-959 Rzeszów  
e-mail: lida@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *The paper discusses methods of diagnosing the technical condition of reinforced concrete beams, based on the change in dynamic characteristics. The objects of research were reinforced concrete (RC) beams. Testing of RC beams included both static and dynamic tests. A series of step loaded static tests was aimed to produce successive damage to the beams. After each load step (at the moment of displacement and strain stabilization), dynamic testing followed. On the basis of the obtained results from different beams (different distances between supports), an effort was made to correlate the data concerning the damage of the tested beams with the changes of the modal parameters.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

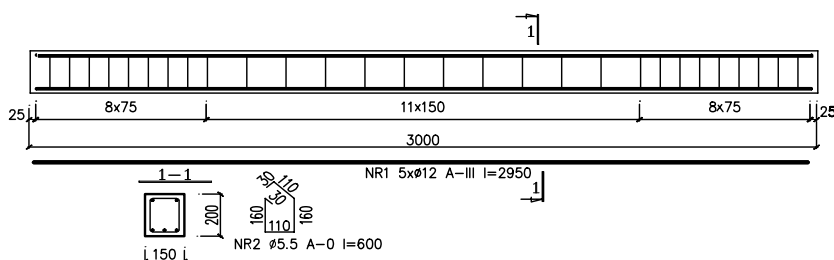
Rozwój nieniszczących metod diagnozowania stanu technicznego całych konstrukcji lub poszczególnych elementów konstrukcyjnych jest tematem wielu prac badawczych prowadzonych w ostatnich latach. Nieniszczące metody oceny takie jak: akustyczne, ultrasonograficzne, radiologiczne, radarowe i termograficzne dostarczają informacji o cechach wytrzymałościowych oraz strukturalnych materiałów i są „lokalnymi” metodami oceny konstrukcji. Alternatywą dla powyższych metod stają się tzw. „metody globalne” oparte na analizie rozchodzenia się fali w ośrodku sprężystym [1] lub analizie parametrów modalnych [2].

W niniejszym artykule będącym kontynuacją badań opisanych w pracach [3], podjęto próbę powiązania wyznaczonych parametrów modalnych z zaobserwowanym zarysowaniem nie zależnie od przyczyn wywołujących ten stan. Zaproponowana procedura diagnostyczna opiera się na analizie dynamicznej odpowiedzi konstrukcji na dowolne wymuszenie, otrzymanej w postaci charakterystyki częstotliwościowej przed uszkodzeniem i po uszkodzeniu. Na podstawie uzyskanych wyników badań belek żelbetowych, podjęto próbę powiązania uszkodzeń, powstałych w wyniku zginania i ścinania, ze zmianami parametrów modalnych.

## 2. BADANE OBIEKTY I METODYKA PRZEPROWADZONYCH BADAŃ

### 2.1. Opis badanych belek żelbetowych

Badanymi obiektami były belki żelbetowe, wykonane z betonu klasy C20/16, zbrojone podłużnie stalą 34GS, średnicy  $\phi 12$ mm, strzemiona  $\phi 5.5$ mm ze stali St0S. Wymiary i sposób zbrojenia belek przedstawiono na Rys. 1.



Rysunek 1: Wymiary i zbrojenie badanych belek

Przeprowadzone badania podzielono na dwa etapy. Pierwszy etap obejmował badania wykonane na belkach żelbetowych, podpartych przegubowo w odległości 10 cm od początku i końca belek, oznaczonych symbolami B1 do B12. Drugi - badania wykonane na belkach, podpartych przegubowo w odległości 50 cm od początku i końca belek, oznaczonych symbolami P1 do P3. Zmiana punktów podparcia spowodowała inny typ zniszczenia belek żelbetowych, nie w wyniku zginania (jak miało to miejsce dla belek B1 do B12), lecz na skutek ścinania.

Dla poszczególnych etapów przeprowadzono badania statyczne i dynamiczne.

### 2.2. Badania statyczne

Badania statyczne przeprowadzono w hali laboratoryjnej Wydziału Budownictwa i Inżynierii Środowiska Politechniki Rzeszowskiej. Obciążenie belki realizowane jest za pomocą układu hydraulicznego typu „SCHENCK”. Ustawienie założonej siły obciążającej belkę odbywało się poprzez sterowanie przemieszczeniem. Podczas obciążania belki mierzono wartości ugięcia, odkształcenia włókien górnych i dolnych belki oraz ilość, wysokość i szerokość powstających rys. Do rejestracji mierzonych odkształceń i ugięć wykorzystano zestaw pomiarowy HOTTINGER BALDWIN MESSTECHNIK wraz z oprogramowaniem CATMAN 3.1. Szerokość rys mierzono papierowym szczelinomierzem.

Badania statyczne prowadzono według następującego schematu:

- Pięć cykli obciążenia i odciążenia belki siłą o wartości 1 kN i 1.7 kN (obciążenia to wykonano w celu ułożenia się belki na podporach).
- Obciążenie belki siłą o wartości 3 kN, stabilizacja mierzonych parametrów (15 minut). Po odciążeniu belki stabilizacja mierzonych ugięć i odkształceń (15 minut). Pomiar dynamiczny (wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych).
- Kolejne etapy obciążania i odciążania belek żelbetowych (analogiczne jak powyżej) dla sił o wartościach: 6 kN, 12 kN, 18 kN, 24 kN, 30 kN, 40 kN, 50 kN, 55 kN,

60 kN, 65 kN, 70 kN, zniszczenie w przypadku belek żelbetowych B1 do B12. Dla belek P1 do P3 etapy obciążania i odciążania belek realizowano dla sił o wartościach: 6 kN, 12 kN, 18 kN, 24 kN, 30 kN, 40 kN, 50 kN, 60 kN, 70 kN, 80 kN, 90 kN, 100 kN, 110 kN, zniszczenie. Po odciążeniu i stabilizacji belki - pomiar dynamiczny.

W przypadku belek żelbetowych B1 do B12 zniszczenie belek następowało zawsze na obszarze czystego zginania i charakteryzowało się propagacją rysy do górnej strefy ściskanej z jednoczesnym zmiżdżeniem betonu w górnych włóknach strefy ściskanej (Rys. 2).



Rysunek 2: Zniszczenie belek B1 do B12

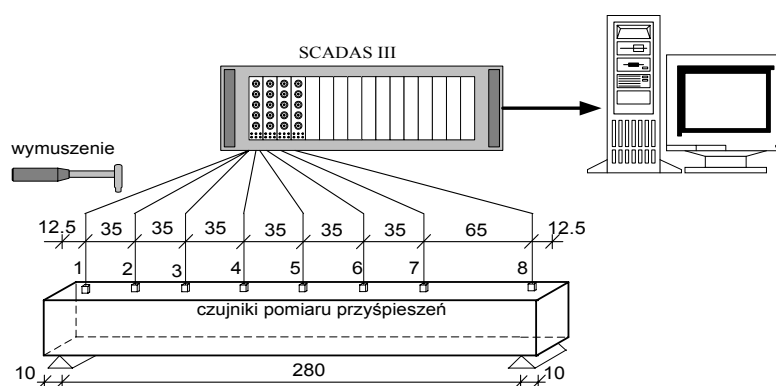
Zniszczenie badanych belek P1, P2 i P3 następowało w strefie ścinania i był to typ niszczenia ścinająco-ściskającego. Zniszczenie następowało w wyniku zniszczenia struktury betonu w tzw. strefie ściskanej nad końcem rysy ukośnej, gdzie powstaje rodzaj przegubu. Taki sposób zniszczenia występuje w belkach o stosunkowo silnym zbrojeniu głównym, przy jednoczesnym braku lub bardzo słabym zbrojeniu poprzecznym [4]. Z uwagi na sposób zbrojenia belek przedstawiony na rysunku 1, w przypadku przesunięcia punktów podparcia o 40 cm (w stosunku do przyjętych punktów podparcia dla belek B1 do B12) maksymalne naprężenia styczne w badanych belkach wystąpiły na odcinku o bardzo słabym zbrojeniu poprzecznym. Sposób zniszczenia belek P1 do P3 przedstawia Rys. 3.



Rysunek 3: Zniszczenie belek P1 do P3

### 2.3. Badania dynamiczne

Dla każdej z badanych belek, dla kolejnych etapów obciążania, po odciążeniu w chwili stabilizacji mierzonych ugięć i odkształceń wykonano badania dynamiczne w celu wyznaczenia widm częstotliwościowych, z których odczytano częstotliwości rezonansowe i odpowiadające im postacie drgań. Pomiary dynamiczne dla wszystkich etapów obciążania belki wykonano przy wymuszeniu impulsowym w trzech niezależnych punktach: na środku belki i w odległości 15 cm od każdej z podpór. Układ pomiarowy wykorzystany podczas badań doświadczalnych oraz rozmieszczenie czujników pomiaru przyspieszenia, przedstawiono na Rys. 4.



Rysunek 4: Układ pomiarowy do badań dynamicznych

Wstępny pomiar dynamiczny, dla belki nieobciążonej ustawionej na podporach, pozwolił na wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej, będącej punktem odniesienia dla kolejnych pomiarów dynamicznych. Szerokość pasma charakterystyki częstotliwościowej niosącej informacje o zmianach w sztywności belek na skutek obciążenia wyznaczono eksperymentalnie. W wyniku kilku przeprowadzonych pomiarów uznano pasmo o szerokości od 0 do 500 Hz za wystarczające w przeprowadzonym procesie diagnostycznym. W paśmie tym wybrano częstotliwości drgań rezonansowych, niosących informacje o uszkodzeniu belki na skutek obciążenia.

### 3. WYNIKI BADAŃ

Przykładowe wyniki otrzymane z badań statycznych i dynamicznych dla belki B4 i P2 przedstawiono w Tabeli 1 i 2. Tabele zawierają zmiany wybranych częstotliwości rezonansowych, informacje o zaobserwowanym zarysowaniu dla kilku przypadków obciążenia belek. Prezentowane wyniki są reprezentatywne dla całego zbioru badanych belek B1 do B12 i P1 do P3.



Tabela 1: Wartości wybranych częstotliwości rezonansowych i zarysowanie podczas obciążenia i po odciążeniu dla belki B4

L.p.	Siła	Opis zarysowania	Wartości częstotliwości rezonansowych		
	[kN]		1 [Hz]	2 [Hz]	3 [Hz]
1	0		42	135	413
2	1		42	135	413
3	6		42	135	408
4	12	Mikrorysy mniejsze od 0,1 mm przy obciążeniu	39	131	391
5	24	Rysy 0,1 mm przy obciążeniu propagacja rysy do osi belki	38	127	376
6	40	Rysy od zginania 0,2 mm przy obciążeniu	38	125	372
7	70	Rysy od zginania 0,4 mm przy obciążeniu, po odciążeniu 0,15 mm	34	120	350
8	72	Rysy od zginania przy obciążeniu 1,6 mm, po odciążeniu 0,7 mm	32	117	331

Tabela 2: Wartości wybranych częstotliwości rezonansowych i zarysowanie podczas obciążenia i po odciążeniu dla belki P2

L.p.	Siła	Opis zarysowania	Wartości częstotliwości rezonansowych		
	[kN]		1 [Hz]	2 [Hz]	3 [Hz]
1	0		75	236	433
2	1		75	236	433
3	12		74	234	428
4	30	Mikrorysy przy obciążeniu	68	217	410
5	50	Rysy od zginania 0,2 mm przy obciążeniu	66	210	402
6	90	Rysy od zginania 0,4 mm przy obciążeniu, po odciążeniu 0,1 mm	65	202	386
7	110	Rysy od ścinania 0,3 mm, od zginania	64	192	368
8	113	0,5 mm podczas obciążania, po odciążeniu 0,1 mm	60	184	337

Uwzględniając miarę związku (współczynnik korelacji) pomiędzy zmianami procentowymi wybranych częstotliwości rezonansowych dla poszczególnych belek a zaobserwowanym zarysowaniem, dokonano podziału na cztery stopnie uszkodzenia.

Dla belek B1 do B12 podział ten zdefiniowano następująco:

- D1- belki niezarysowane,
- D2 - belki zarysowane, rysy o szerokości do 0,4 mm od zginania podczas obciążenia, propagujące poza centralną oś belki, po odciążeniu widoczne mikrorysy (rysy o szerokości mniejszej od 0,05 mm),
- D3 - belki zarysowane, rysy o szerokości od 0,5 mm do 1,0 mm od zginania propagującymi do strefy ściskanej, niektóre z wcześniej powstałych rys zamykają się, inne gwałtownie powiększają się, nie powstają już nowe rysy,
- D4 - zniszczenie belki, rysy o szerokości ponad 1,0 mm, gwałtowne poszerzenie i wydłużenie się rys, powodując redukcją strefy ściskanej z jednoczesnym zmiażdżeniem betonu w górnych włóknach strefy ściskanej (powstanie przegubu plastycznego).

Wartości średnie zmian procentowych i odchylenie standardowe wybranych częstotliwości rezonansowych odpowiadające utworzonym stopniom uszkodzenia przedstawia Tabela 3.

Tabela 3: Zmiany procentowe wybranych częstotliwości rezonansowych w zależności od stopnia uszkodzenia belek B1 do B12

Stopień zarysowania	Średnie wartości zmian procentowych $\pm$ odchylenie standardowe		
	Częstotliwości 1	Częstotliwości 2	Częstotliwości 3
	[%]	[%]	[%]
D1	$0,6 \pm 0,8$	$0,1 \pm 0,4$	$0,3 \pm 0,5$
D2	$8,8 \pm 2,2$	$4,8 \pm 2,5$	$7,7 \pm 2,6$
D3	$14,5 \pm 2,5$	$8,9 \pm 2,3$	$13,3 \pm 2,1$
D4	$25,2 \pm 1,7$	$13,6 \pm 1,4$	$19,2 \pm 2,5$

Przyjęte stopnie uszkodzenia (zarysowania) dla belek P1 do P3 zdefiniowano następująco:

- DP1 - belki nie zarysowane podczas obciążenia,
- DP2 - belki o rysach od zginania szerokości do 0,4 mm podczas obciążenia,
- DP3 - belki o rysach od zginania szerokości do 0,5 mm, pojawienie się rys od ścinania szerokości 0,3 mm. Stan bezpośrednio przed zniszczeniem belki,
- DP4 – zniszczenie, propagacja rysy ukośnej szerokości 1,0 mm z jednoczesnym niszczeniem struktury betonu w tzw. strefie ściskanej nad końcem rysy ukośnej (powstanie przegubu wokół którego następuje obrót i przesuw wydzielonych rysą ukośną dwóch części belki).

Wartości średnie zmian procentowych i odchylenie standardowe wybranych częstotliwości rezonansowych odpowiadające utworzonym stopniom uszkodzenia przedstawia Tabela 4.

Tabela 4: Zmiany procentowe wybranych częstotliwości rezonansowych w zależności od stopnia uszkodzenia belek P1 do P3

Stopień zarysowania	Średnie wartości zmian procentowych $\pm$ odchylenie standardowe		
	Częstotliwości 1	Częstotliwości 2	Częstotliwości 3
	[%]	[%]	[%]
DP1	$0,9 \pm 1,3$	$1,2 \pm 0,7$	$1,3 \pm 0,8$
DP2	$12,5 \pm 2,5$	$12,3 \pm 3,1$	$10,8 \pm 3,8$
DP3	$16,4 \pm 1,0$	$18,1 \pm 1,2$	$16,9 \pm 1,9$
DP4	$22,6 \pm 3,7$	$23,3 \pm 3,2$	$23,3 \pm 3,2$

#### 4. WNIOSKI

Uzyskane z przeprowadzonych badań eksperymentalnych wyniki oraz ich analiza pozwalają na sformułowanie następujących spostrzeżeń :

- Istnieje korelacja procentowymi zmianami częstotliwości rezonansowych a stopniem zarysowania belek.
- We wszystkich belkach możliwe staje się wyodrębnienie czterech stopni opisujących stan techniczny belek, niezależnie od przyczyn wywołujących ten stan. Są to:
  - 1 - belki bez zarysowań,
  - 2 - belki zarysowane, o rysach pod obciążeniem o szerokości do 0,4 mm powstałych w wyniku zginania,
  - 3 - stan poprzedzający zniszczenie, rysy o szerokości od 0,5 mm do 1,0 mm od zginania propagującymi do strefy ściskanej w przypadku belek B1÷ B12 oraz rys od ścinania szerokości do 0,3 mm dla belek P1 ÷ P3,
  - 4 – zniszczenie na wskutek poszerzenia i propagacji rysy z jednoczesnym zmięgnięciem betonu w strefie ściskanej.
- Na poziomie ufności 95% na podstawie analizy zmian częstotliwości we wszystkich badanych belkach żelbetowych możliwe jest wykrycie pojawienia się zarysowania. Sygnalizuje to wyraźna zmiana częstotliwości pierwszej.
- Na przyjętym poziomie ufności 95% na podstawie analizy zmian tylko jednej z wybranych częstotliwości rezonansowych możliwe staje się również wykrycie stanu zniszczenia dla belek B1÷ B12. Pozostałe stopnie zarysowania oraz stan zniszczenia dla belek P1÷P3 nie są możliwe do wykrycia z prawdopodobieństwem 95% na podstawie analizy zmian tylko jednej z wybranych częstotliwości rezonansowych.
- Zmiany procentowe wybranych częstotliwości uzależnione są nie tylko od stopnia zarysowania ale również od charakteru zniszczenia i sztywności początkowej badanych belek. Większe zmiany procentowe drugiej i trzeciej z wybranych częstotliwości, obserwowane są w belkach o większej sztywności w których zniszczenie następowało na skutek ścinania (belki P1÷P3), mniejsze w belkach o mniejszej sztywności (belki B1÷ B12), dla których zniszczenie następowało w strefie zginania.

Jedynie zmiany pierwszej częstotliwości rezonansowej dla stopnia uszkodzenia zdefiniowanego jako zniszczenie jest większe dla belek B1÷ B12, niż dla belek P1÷ P3.

#### LITERATURA

- [1] J.T. Białasiewicz, *Falki i aproksymacje*, WNT, Warszawa 2004.
- [2] T. Uhl, *Komputerowo wspomagana identyfikacja modeli konstrukcji mechanicznych*, WNT, Warszawa, 1997.
- [3] L. Buda-Ozóg, Wł. Łakota, Ocena stanu technicznego belek żelbetowych i wzmocnionych taśmami z włókna węglowego na podstawie zmiany charakterystyk dynamicznych, *51 Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB "Krynica 2005" Gdańsk-Krynica 12-17 września 2005r., t.III, s.33-40*, Krynica, 2005.
- [4] T. Godycki-Ćwirko, *Ścinanie w żelbecie*, Arkady, Warszawa 1968.

## WYZNACZENIE OPTYMALNYCH PARAMETRÓW MECHANICZNEGO TŁUMIKA DRGAŃ METODĄ ROJU CZĄSTEK (PSO)

**Henryk Ciurej, Janusz Kawecki, Ryszard Masłowski**

Politechnika Krakowska im. T. Kościuszki  
Wydział Inżynierii Łądowej, Instytut Mechaniki Budowli  
31-155 Kraków, ul. Warszawska 24  
e-mail: {hciurej, jkawec, rmaslows}@usk.pk.edu.pl

---

**Abstract:** *Mechanical vibration dampers (MVD) can be used for reduction of tower type structures vibrations. A method of determination of optimum parameters of MVD mating with this type of structures was described in [1]. The worked out computational method became the basis for design solutions. Taking in the consideration the type of the structure (tower), the analysis concerned the amplitude-frequency characteristic  $|H_{n,n}|$  at the top of the structure, because this is the point of maximum displacements corresponding with the first or the second natural frequencies of the structures under consideration.*

*It may however happened that it is necessary to reduce the values of an amplitude-frequency characteristic corresponding with several different natural frequencies of a structure. That kind of result can not be reached by means of only one damper. When one decides to use more than one MVD, he must determine not only the optimum parameters  $c_i$  and  $k_i$  of these dampers, but also to choose their positions. To solve this problem it is not enough to apply the method of optimization described in [1].*

*In the present paper the authors have checked the possibility of application of the particle swarm optimization (PSO) method, to solve the present problem. It has been shown, that this method enables to determine the optimum parameters of several MVD mating with a structure. Each of these dampers can be "tuned" to an other natural frequency of the structure. The method allows also to determine the optimum positions of the MVD-s. Presented in the paper examples show, that the method can be practically used. In this way, the scope of the methodic described in [1], has been broadened to the new kind of objects, where it is necessary to apply several MVD-s placed in the different points of a structure.*

---

### 1. WPROWADZENIE

W [1] przedstawiono metodę wyznaczenia parametrów optymalnych mechanicznego tłumika drgań (MTD) współpracującego z budowlą wieżową.

Zadaniem MTD jest doprowadzenie do redukcji drgań budowli podczas występowania działania dynamicznego na tę budowlę. Ze względu na typ budowli, z którą ma

współpracować MTD jego usytuowanie nie wymagało optymalizacji. Umieszczany był w sąsiedztwie wierzchołka budowli.

Ze względu na rozwiązanie konstrukcyjne MTD można scharakteryzować trzema parametrami:  $m_t$ ,  $c_t$ ,  $k_t$ . Najczęściej jednak pierwszy z tych parametrów ( $m_t$ - masa tłumika) przyjmowany jest na podstawie warunków technicznych realizacji MTD. Procedurze optymalizacji podlegają więc dwa pozostałe parametry charakteryzujące MTD tzn.:  $c_t$ - tłumienie oraz  $k_t$ - sztywność tłumika.

Uwzględniając wpływ charakterystyki dynamicznej budowli poddanej działaniu dynamicznemu na reakcję tej budowli przyjęto, iż optymalny MTD powinien prowadzić do minimalizacji maksymalnej rzędnej charakterystyki dynamicznej budowli. Ze względu na typ budowli (wieżowa) odpowiednie analizy prowadzono w odniesieniu do charakterystyki dynamicznej wyrażonej za pomocą modułu transmitancji  $|H_{n,n}|$ , gdzie  $n$ - oznacza punkt na wierzchołku budowli. W tego typu budowlach największe rzędne  $|H_{n,n}|$  odpowiadają pierwszej albo drugiej częstotliwości drgań własnych budowli.

Przy podanych wyżej ograniczeniach opracowano algorytm wyznaczania optymalnych parametrów  $c_t$  i  $k_t$  tłumika. Parametry te wykorzystywano przy opracowywaniu rozwiązania konstrukcyjnego MTD. Metodę tę zastosowano w kilkunastu przypadkach budowli wieżowych (kominy, maszty z odciągami). Wyniki obliczeń dotyczą skuteczności MTD oraz badań dynamicznych potwierdzających tę skuteczność a także doświadczenia zebrane podczas eksploatacji budowli współpracujących z MTD przedstawiono w [2].

Występują jednak sytuacje, w których konieczne staje się doprowadzenie do minimalizacji reakcji dynamicznej przez znaczące zmniejszenie rzędnych charakterystyki dynamicznej odpowiadających kilku częstotliwościom drgań własnych. Tego efektu nie można uzyskać za pomocą jednego MTD. Zastosowanie zaś kilku MTD skutecznie redukujących znaczące rzędne charakterystyki dynamicznej wymaga nie tylko dobrania odpowiednich parametrów  $c_t$  i  $k_t$ , ale również odpowiedniej lokalizacji MTD.

Do rozwiązania tego problemu nie wystarczy już metodyka i algorytm przedstawiony w [1]. Konieczne jest wybranie nowego narzędzia optymalizacji. Podjęto próbę zastosowania metody roju cząstek jako metody optymalizacji. Uwzględniono przy tym prace [3-5].

## 2. OPTIMALIZACJA METODĄ ROJU CZĄSTEK (PSO)

Wprowadza się następujące oznaczenia:  $\mathbf{S}$  – zbiór numerów węzłów modelu, w których wyznacza się funkcję transmitancji,  $N_S$  – liczba elementów zbioru  $\mathbf{S}$ . Tak więc:

$$\mathbf{S} := [S_1, \dots, S_{N_S}], \quad S_i \in \{1, \dots, N_w\}, \quad (1)$$

gdzie  $N_w$  – liczba węzłów w modelu MES.

Niech  $\mathbf{p}$  oznacza wektor parametrów tłumików:

$$\mathbf{p} = [c_1, k_1, \dots, c_{N_T}, k_{N_T}]^T, \quad (2)$$

gdzie  $c_i = p_{2i-1}$ ,  $c_i \in R_+$ ,  $k_i = p_{2i}$ ,  $k_i \in R_+$  dla  $i = 1, \dots, N_T$ .

Wprowadza się również bezpośrednie ograniczenia elementów wektora  $\mathbf{p}$  tj.:  $\mathbf{p}_{lb}$  – wektor ograniczeń dolnych i  $\mathbf{p}_{ub}$  – wektor ograniczeń górnych. W zapisie szczegółowym można to przedstawić w postaci:

$$\mathbf{p}_{lb} = [c_1^{lb}, k_1^{lb}, \dots, c_{N_T}^{lb}, k_{N_T}^{lb}]^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_{ub} = [c_1^{ub}, k_1^{ub}, \dots, c_{N_T}^{ub}, k_{N_T}^{ub}]^T. \quad (4)$$

Uwzględniając powyższe oznaczenia można zapisać:

$$\mathbf{p}_{lb} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{ub}. \quad (5)$$

Wprowadza się także następujące ubezwymiarowanie wektora parametrów:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{I}^\xi) \mathbf{p}_{lb} + (\mathbf{I}^\xi) \mathbf{p}_{ub}, \quad (6)$$

gdzie  $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_{2N_T}]^T$  i  $\xi_i \in [0, 1]$ ,  $\forall_{i=1, \dots, 2N_T}$ .

Zależność odwrotną zapisze się w postaci:

$$\xi = [\mathbf{I}(\mathbf{p}_{ub} - \mathbf{p}_{lb})]^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{lb}). \quad (7)$$

Wektor parametrów  $\mathbf{p} \in D \subset R_+^{2N_T}$  gdzie  $D$  – obszar dopuszczalny, a  $\xi \in R_{[0,1]}^{2N_T}$ .

W kształtowaniu algorytmu metody optymalizacji uwzględnione zostały poniższe spostrzeżenia. Rozważa się rój  $N_R$  cząstek, z których każda rozumiana jest tutaj jako wektor parametrów  $\mathbf{p}$ . Położenie  $\mathbf{p}^i$   $i$ -tej cząstki w przestrzeni zmiennych projektowych (czyli wartości poszczególnych współrzędnych) jest aktualizowane zgodnie z poniższą zależnością:

$$\mathbf{p}_{k+1}^i = \mathbf{p}_k^i + \mathbf{v}_{k+1}^i \Delta t \quad i=1, \dots, N_R, \quad (8)$$

gdzie:  $k$  – numer iteracji,  $\Delta t$  – pseudo czas (tu  $\Delta t=1$ ).

Prędkość  $i$ -tej cząstki  $\mathbf{v}_{k+1}^i$  oblicza się zgodnie z formułą:

$$\mathbf{v}_{k+1}^i = w_k \mathbf{v}_k^i + c_1 r_1 \frac{\mathbf{I}_k^i - \mathbf{p}_k^i}{\Delta t} + c_2 r_2 \frac{\mathbf{g}_k - \mathbf{p}_k^i}{\Delta t} \quad i=1, \dots, N_R, \quad (9)$$

gdzie:  $\mathbf{I}_k^i$  reprezentuje najlepsze położenie  $i$ -tej cząstki w trakcie wszystkich  $k$  iteracji,  $\mathbf{g}_k$  reprezentuje globalnie najlepsze położenie spośród wszystkich cząstek roju w trakcie wszystkich  $k$  iteracji,  $r_j \in [0, 1]$  oznaczają liczby losowe z przedziału od 0 do 1,  $j=1, 2$ . Liczby  $c_1$  i  $c_2$  w (9) są stałymi metody. Kennedy i Eberhard (por. [3,4]) zaproponowali,

aby przyjąć  $c_1 = c_2 = 2$ . W ten sposób uzyskuje się wartość średnią 1 (po pomnożeniu przez wygenerowane losowo liczby  $r_1$  i  $r_2$ ).

Liczba  $w_k$  jest wagą udziału poprzedniego (por. [3]) położenia cząstki w całkowitej modyfikacji położenia. Jest ona wyliczana z następującego wzoru:

$$w_{k+1} = w_k f_w \quad \text{gdzie} \quad f_w = \begin{cases} 0.988 & \text{gdy } w_k > 0.4 \\ 1.000 & \text{gdy } w_k \leq 0.4 \end{cases} \quad (10)$$

przy czym  $w_0 = 1.4$ .

Optymalizacja rozważana jest w dwóch przypadkach.

*Przypadek 1.* Optymalizacji podlegają jedynie parametry tłumików uporządkowane w wektorze  $\mathbf{p}$ .

Zadanie przed ubezwymirowaniem i wprowadzeniem ograniczeń:

$$\min_{\mathbf{p} \in D \subset R_+^{2N_T}} \max_{i \in S} \max_{\omega \in \Omega} H_{ii}(\mathbf{p}, \omega), \quad (11)$$

gdzie  $H_{ii}(\mathbf{p}, \omega)$  – funkcja transmitancji w węźle  $i$ -tym.

Zadanie po ubezwymirowaniu i wprowadzeniu ograniczeń zapisuje się w postaci:

$$\min_{\xi \in R} \max_{i \in S} \max_{\omega \in \Omega} L_i(\xi, \omega), \quad (12)$$

gdzie

$$L_i(\xi, \omega) = \begin{cases} H_{ii}(\mathbf{p}, \omega) & \text{gdy } \forall_{k=1, \dots, 2N_T} \xi_k \in [0, 1] \\ 1E5(100r + 10) & \text{gdy } \exists_{k=1, \dots, 2N_T} \xi_k \notin [0, 1] \end{cases} \quad (13)$$

gdzie  $r \in [0, 1]$  – jest liczbą losową.

*Przypadek 2.* Optymalizacji podlegają parametry tłumików uporządkowane w wektorze  $\mathbf{p}$  i jednocześnie miejsce przyłożenia (instalacji) tłumika.

Wprowadzono tu dodatkowe oznaczenia:  $\Pi$  – zbiór numerów (węzłów), w których można umieścić tłumik(i).

$$\Pi = [j_1, \dots, j_{N_\Pi}] \quad (14)$$

przy czym  $j_k \neq j_l \quad \forall_{k \neq l, k, l = 1, \dots, N_\Pi}$  i  $j_k \in \{1, \dots, N_w\}$ .

Dalej niech  $\mathbf{n}$  oznacza wektor indeksów wektora  $\Pi$  tzn.

$$\mathbf{n} := [n_1, \dots, n_{N_\Pi}] \quad (15)$$

gdzie  $n_l = 1, \dots, N_\Pi$ ,  $l = 1, \dots, N_\Pi$ .



Ubezwymiarowanie i uciąglenie w przedziale  $[0, 1]$  wektora  $\mathbf{n}$  dokonano wg formuły:

$$\mathbf{n} = f(\bar{\mathbf{n}}N_{\Pi}) + 1 \quad (16)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{n}} \in R_{[0,1]}^{N_T}$  a  $f()$  – oznacza funkcję (*floor*) zaokrąglającą wartości rzeczywiste w stronę  $-\infty$ .

Zadanie optymalizacji można sformułować następująco:

Należy znaleźć:

$$\min_{\substack{\mathbf{p} \in D \subset R_+^{2N_T} \\ \mathbf{n} \in [1, \dots, N_T]}} \max_{i \in S} \max_{\omega \in \Omega} H_{ii}(\mathbf{p}, \mathbf{n}, \omega) \quad (17)$$

co po ubezwymiarowaniu prowadzi do warunku:

$$\min_{\substack{\xi \\ \bar{\mathbf{n}}}} \max_{i \in S} \max_{\omega \in \Omega} L_i(\xi, \bar{\mathbf{n}}, \omega) \quad (18)$$

gdzie

$$L_i(\xi, \bar{\mathbf{n}}, \omega) = \begin{cases} H_{ii}(\mathbf{p}, \mathbf{n}, \omega) & \text{gdy } \forall_{k=1, \dots, 2N_T} \xi_k \in [0, 1] \text{ i } \forall_{l=1, \dots, N_T} \bar{n}_l \in [0, 1] \\ 1E5(100r + 10) & \text{gdy } \exists_{k=1, \dots, 2N_T} \xi_k \notin [0, 1] \text{ lub } \exists_{l=1, \dots, N_T} \bar{n}_l \notin [0, 1] \end{cases} \quad (19)$$

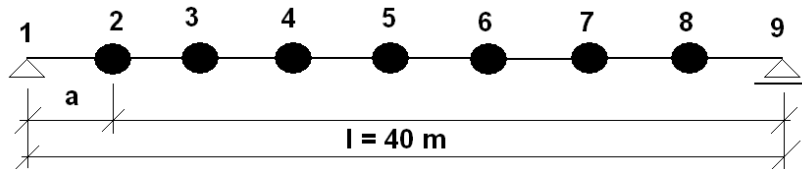
### 3. PRZYKŁAD

Rozważa się belkę o długości 40 m ( $a = 5$  m) i schemacie przedstawionym na Rys. 1. Jest to belka stalowa ( $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Pa), o stałej sztywności ( $I = 0,0259324$  m<sup>4</sup>), z siedmioma masami skupionymi w punktach od 2 do 8 ( $m_2 = m_4 = m_6 = m_8 = 1900$  kg,  $m_3 = m_7 = 9900$  kg i  $m_5 = 1200$  kg). Model tłumienia drgań belki opisano zależnością:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (20)$$

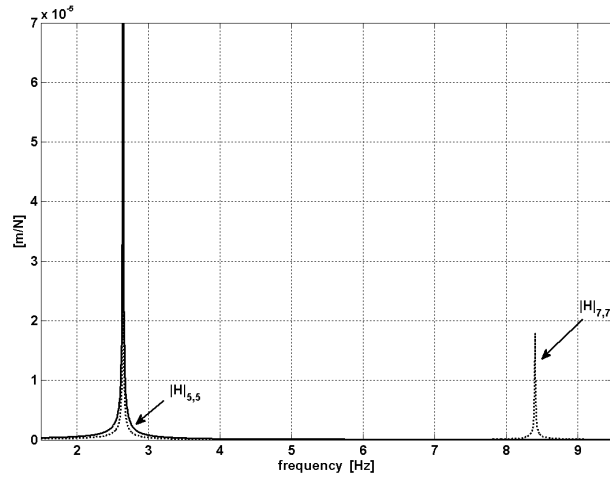
gdzie:  $\alpha = 3,7058$  i  $\beta = 1,506 \cdot 10^{-5}$ .

Dwie początkowe częstotliwości drgań własnych belki wynoszą:  $f_1 = 2,65$  Hz i  $f_2 = 8,41$  Hz.

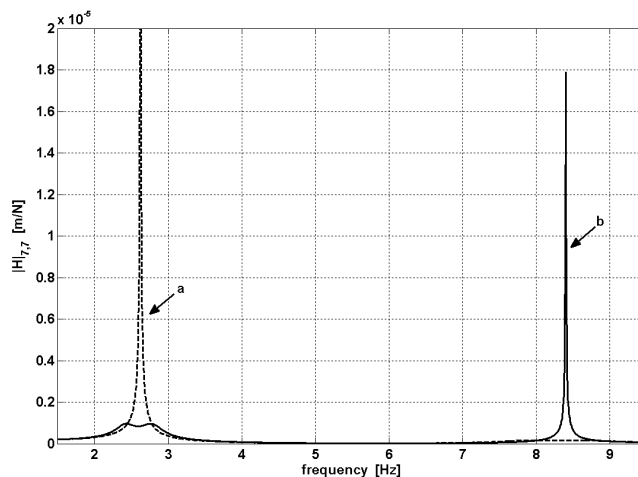


Rysunek 1: Schemat belki

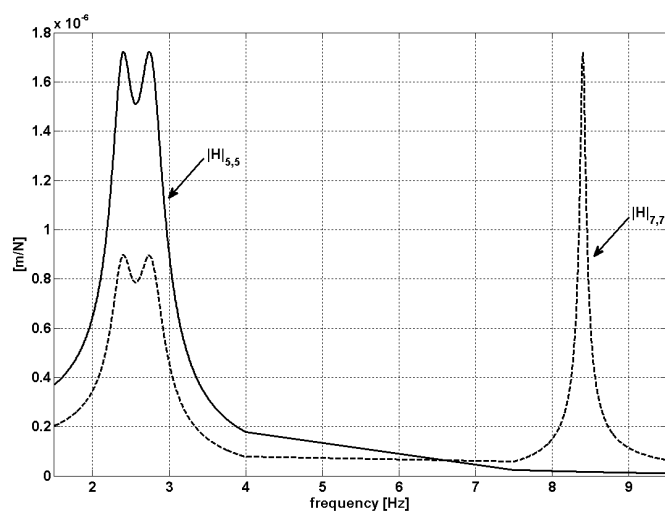
Na Rys. 2 podano wykresy modułów transmitancji w punktach 5 (punkt na osi symetrii belki) i 7. Widoczne są wyraźnie znaczące wartości  $|H_{5,5}|$  (przy  $f_1$ ) oraz  $|H_{7,7}|$  (przy  $f_1$  i  $f_2$ ).

Rysunek 2: Wykresy  $|H_{5,5}|$  i  $|H_{7,7}|$ 

Rozpatrzono dwa stany optymalizacji. W obydwu przyjęto jednakowe masy MTD ( $m_t = 500$  kg). W pierwszym stanie optymalizowano parametry MTD usytuowanego w punkcie 5 i wyznaczono te parametry minimalizując rzędne  $|H|$  w otoczeniu częstotliwości  $f_1$  (rozważano przedział optymalizacji od 1,5 Hz do 4 Hz). W drugim stanie zaś optymalizowano MTD usytuowany w punkcie 7 i wyznaczono jego parametry minimalizując rzędne  $|H|$  w otoczeniu częstotliwości  $f_2$  (rozważano przedział optymalizacji od 7,5 Hz do 9,5 Hz). Uzyskano optymalne parametry  $c$  i  $k$ . Na Rys. 3 podano wykresy  $|H_{7,7}|$  odpowiadające optymalizacji w stanie pierwszym (linia „a”) i w stanie drugim (linia „b”).

Rysunek 3: Wykresy  $|H_{7,7}|$  po optymalizacji MTD usytuowanego w punkcie 5 (linia „b”) i w punkcie 7 (linia „a”).

Rozważano również optymalizację dwóch MTD współpracujących z belką. Analizowano optymalne ich usytuowanie. Chodziło o takie wyznaczenie parametrów MTD, aby doprowadzić do minimalizacji funkcji modułów transmitancji w otoczeniu  $f_1$  i  $f_2$ . Uzyskano parametry optymalne MTD w punkcie 5 i MTD w punkcie 7 z uwzględnieniem jednoczesnej współpracy tych MTD z belką. Na Rys. 4 podano wykresy  $|H_{5,5}|$  i  $|H_{7,7}|$  odpowiadające analizowanej sytuacji. Widać, iż rzędna  $|H_{7,7}|$  przy częstotliwości  $f_2$  jest równa rzędnej  $|H_{5,5}|$  przy częstotliwości  $f_1$ .



Rysunek 4: Wykresy  $|H_{5,5}|$  i  $|H_{7,7}|$  po optymalizacji dwóch MTD występujących w punktach 5 i 7

W podsumowaniu wyników uzyskanych w niniejszym przykładzie zestawiono w Tabeli 1 wartości optymalnych parametrów MTD uzyskane w rozważanych sytuacjach obliczeniowych.

Tabela 1: Parametry optymalne MTD uzyskane w rozważanych sytuacjach (zawsze:  $m_t = 500$  kg)

Przedział optymalizacji	Lokalizacja MTD przy punkcie	Wartości optymalne	
		$c_t$ [ $\frac{N}{m/s}$ ]	$k_t$ [ $\frac{N}{m}$ ]
1,5 Hz- 4,0 Hz	5	1756,06	129662
7,5 Hz- 9,5 Hz	3 (7)	4830,36	1314400
1,5 Hz- 9,5 Hz	5	1738,76	126176
	7 (3)	8991,61	162007

#### 4. WNIOSKI

Przedstawiona w pracy metoda optymalizacji z zastosowaniem PSO umożliwia wyznaczenie optymalnych parametrów kilku MTD współpracujących z budowlą, z których każdy jest „nastrojony” na redukcję drgań budowli z inną częstotliwością drgań własnych. Metoda umożliwia również wyznaczenie optymalnego usytuowania tych MTD. Weryfikacja metody na przykładach, z których jeden przedstawiono w niniejszym opracowaniu, świadczy o praktycznej jej przydatności. W ten sposób rozszerzono zakres stosowania metodyki opisanej w [1] na obiekty, w których stosowanie kilku MTD wymaga różnego ich usytuowania na obiekcie.

#### LITERATURA

- [1] J. Kawecki, R. Masłowski, Wyznaczenie optymalnych parametrów mechanicznego tłumika drgań budowli wieżowej, *Archiwum Inżynierii Lądowej*, 34 (4), 467-488, 1988.
- [2] J. Kawecki, R. Masłowski, R. Świątek, Eksploatacja mechanicznych tłumików drgań konstrukcji wieżowych, *Proc. IX International Conference on Metal Structures*, t. 3, str. 251-260, Kraków 1995.
- [3] R. C. Eberhart, J. Kennedy, New optimizer using particle swarm theory, *Proc. of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science*, str. 39-43, 1995.
- [4] R. C. Eberhart, J. Kennedy, Particle Swarm Optimization, *Proc. of the IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, Perth (Australia), str. 1942-1948, 1995.
- [5] G. Venter, J. Sobieszczański, Particle Swarm Optimization, *43rd AIAA /ASME/ASCE/AHS/ASC structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, April 22-25, 2002, Denver, Colorado.

## **ANALIZA ODPOWIEDZI DYNAMICZNEJ WYBRANYCH BUDOWLI WIELOPODPOROWYCH NA NIERÓWNOMIERNE WYMUSZENIE KINEMATYCZNE**

**Joanna Dulińska<sup>1</sup>, Joanna Kalabińska<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Instytut Mechaniki Budowli, Politechnika Krakowska  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: jdulinsk@pk.edu.pl

<sup>2</sup> Studium Doktoranckie WIL, Politechnika Krakowska  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: kalabka@o2.pl

---

**Abstract:** *The paper presents analysis of dynamic response of multiple support structures to seismic and mining related paraseismic excitation. Dimensions of the basis of structures are comparable with the length of the wave propagating in the ground and due to it they are exposed to non-uniform kinematic excitation. Calculations of the dynamic response were performed for earth dam at Niedzica and for concrete bridge at LGOM. It was stated that non-uniformity of ground movement may cause significant changes in the dynamic response – both its reduction as well as its growth.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Obliczenia odpowiedzi dynamicznej konstrukcji na ruch podłoża gruntowego, będący następstwem zjawisk sejsmicznych lub parasejsmicznych, wykonuje się najczęściej przy założeniu, że w każdym punkcie podparcia budowli działa takie samo wymuszenie. Model ten - zwany modelem równomiernego wymuszenia kinematycznego – jest właściwy dla obiektów o niewielkich rozmiarach w stosunku do długości fali wstrząsowej. W przypadku obiektów o rozmiarach porównywalnych z długością propagującej się w podłożu fali założenie takie odbiega od rzeczywistości. Ze względu na skończoną prędkość propagacji – fala dociera do kolejnych punktów podparcia z pewnym opóźnieniem czasowym zależnym od prędkości (w danej chwili na każdą podporę działa inne wymuszenie kinematyczne). Model obliczeniowy uwzględniający ten efekt nazywany jest modelem nierównomiernego wymuszenia kinematycznego.

Określenie „konstrukcja wielopodporowa” (*multiple-support structure*), oznacza obiekt, w przypadku którego w każdym z punktów podparcia może wystąpić inne wymuszenie kinematyczne, wynikające z różnic ruchu gruntu w czasie i przestrzeni. Obiekty określane tym terminem mogą mieć „punktowe” (np. mosty, estakady) lub „ciągłe” (np.

wielkogabarytowe obiekty hydrotechniczne,) połączenie z podłożem. W normach ISO DIN [19] oraz EUROKOD 8 [18] zaznacza się zasadność uwzględniania nierównomierności wymuszenia w przypadku konstrukcji wielopodporowych.

W niniejszej pracy analizowany jest wpływ uwzględnienia nierównomierności wymuszenia kinematycznego (w odniesieniu do klasycznego modelu wymuszenia równomiernego) na konstrukcję zapory ziemnej oraz na most żelbetowy. Analiza taka niezbędna jest do stwierdzenia: czy i w jakich przypadkach nierównomierność wymuszenia spowoduje wzrost odpowiedzi dynamicznej budowli wielopodporowych. Nierównomierność powoduje redukcję średnich amplitud ale równocześnie prowadzi do powstania efektów quasi-statycznych. Z reguły większy wpływ ma zmniejszenie średnich amplitud - a więc następuje redukcja globalnej odpowiedzi. Jednak w niektórych przypadkach powstające efekty quasi-statyczne mają dominujący wpływ, co skutkuje zwiększeniem odpowiedzi dynamicznej. Zastosowano różne metody obliczania odpowiedzi dynamicznej, w tym metodę spektrum odpowiedzi z reguły odpowiedź dynamiczną budowli od góry.

## **2. MODEL NIERÓWNOMIERNEGO WYMUSZENIA KINEMATYCZNEGO PRZYJĘTY W OBLICZENIACH**

W literaturze wymienia się trzy podstawowe przyczyny powstania nierównomierności wymuszenia kinematycznego [7-9, 11, 15] Są to:

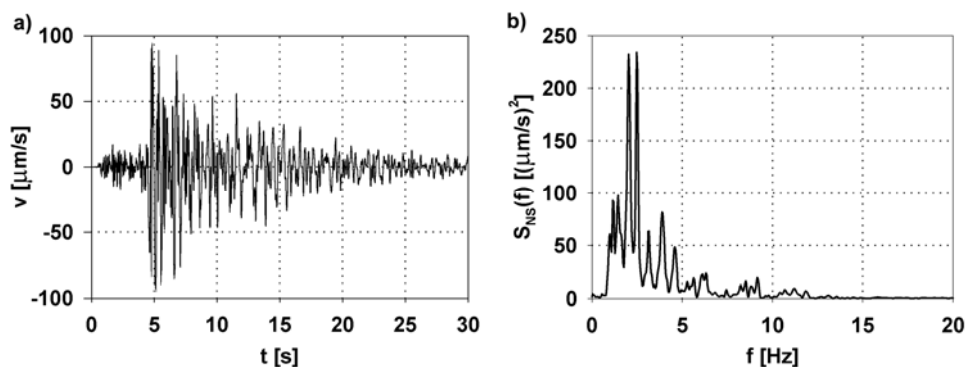
- skończona prędkość propagacji fali w gruncie („wave passage effect”),
- utrata spójności wynikająca z odbicia, interferencji i rozpraszania fal w podłożu („incoherence effect”),
- możliwość wystąpienia zróżnicowanej budowy geologicznej podłoża budowli w różnych jego punktach („local soil effects”).

Dodatkowo autorzy [7, 8] wymieniają czwartą przyczynę powstania nierównomierności wymuszenia kinematycznego, jaką jest redukcja amplitud drgań ze zwiększeniem odległości od źródła, będąca wynikiem tłumienia geometrycznego i absorpcji fal („attenuation effect”). W przypadku analizy odpowiedzi dynamicznej budowli na wymuszenia sejsmiczne, efekt ten jest znikomy, zwłaszcza w dużych odległościach od strefy epicentralnej wstrząsu [8]. W niniejszej pracy przyjęto model nierównomiernego wymuszenia uwzględniający efekt opóźnienia czasowego wynikający ze skończonej prędkości fali w podłożu, pomijając wpływy utraty spójności oraz zróżnicowaną budowę geologiczną podłoża.

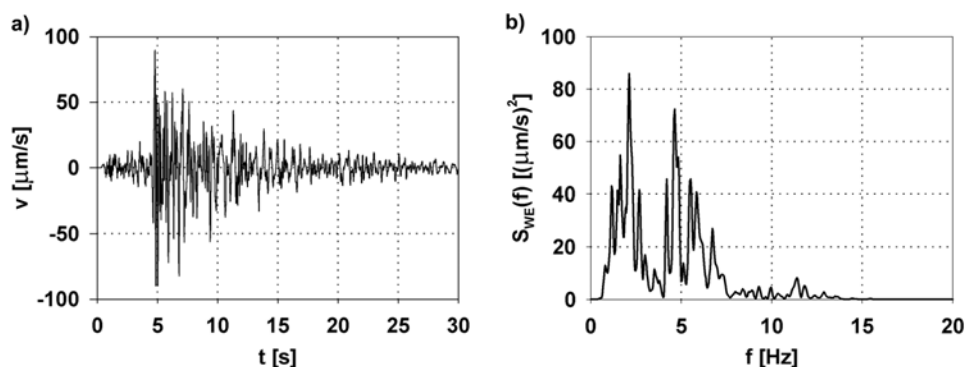
## **3. ODPOWIEDŹ DYNAMICZNA ZAPORY ZIEMNEJ W NIEDZICY NA WSTRZĄS SEJSMICZNY**

### **3.1. Dane o wymuszeniu kinematycznym – wstrząs sejsmiczny 2004 r.**

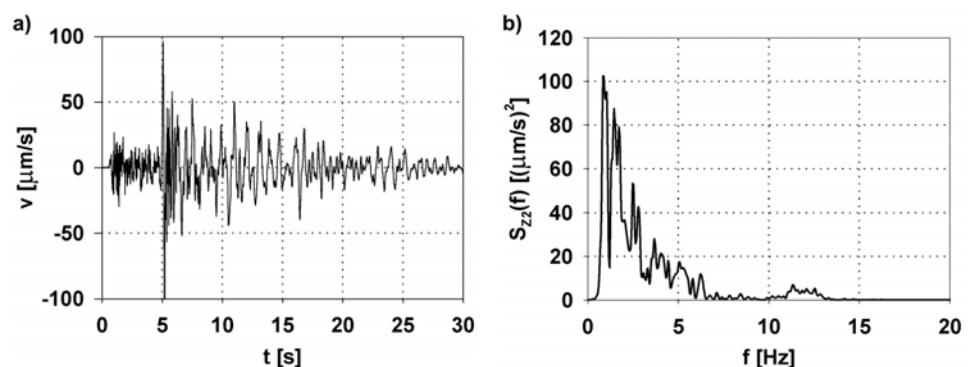
W listopadzie i grudniu 2004 r. na Podhalu miały miejsce wstrząsy sejsmiczne [14], które objęły swoim zasięgiem rejon zapory ziemnej w Niedzicy (odległość zapory od epicentrum wstrząsu wynosiła około 33 km). Na Rys. 1 - 3 przedstawiono przebiegi czasowe prędkości drgań podłoża w trzech kierunkach oraz ich gęstości widmowe dotyczące wstrząsu z dnia 2 grudnia 2004 r. o magnitudzie 3,6 stopnia w skali Richtera. Przebiegi te posłużyły jako dane o wymuszeniu kinematycznym w obliczeniach odpowiedzi dynamicznej obiektu na nierównomierne wymuszenie kinematyczne. Oś podłużna zapory ziemnej w Niedzicy wyznacza dokładnie kierunek wschód-zachód, w którym propagowała się fala wstrząsowa.



Rysunek 1. Prędkość drgań podłoża w kierunku poziomym NS w czasie wstrząsu sejsmicznego na Podhalu (2 grudnia 2004 r.): a) przebieg czasowy, b) gęstość widmowa mocy sygnału.



Rysunek 2: Prędkość drgań podłoża w kierunku poziomym WE w czasie wstrząsu sejsmicznego na Podhalu (2 grudnia 2004 r.): a) przebieg czasowy, b) gęstość widmowa mocy sygnału.



Rysunek 3: Prędkość drgań podłoża w kierunku pionowym Z w czasie wstrząsu sejsmicznego na Podhalu (2 grudnia 2004 r.): a) przebieg czasowy, b) gęstość widmowa mocy sygnału.

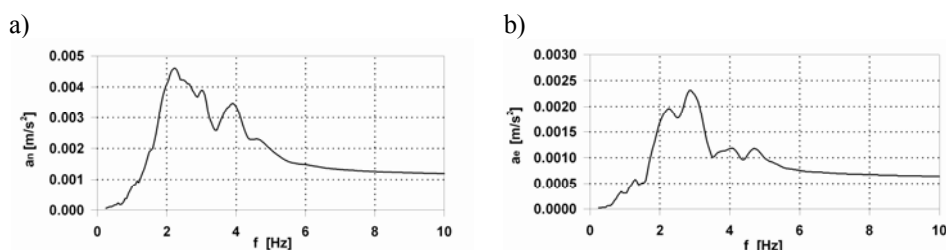
Do wyznaczania odpowiedzi dynamicznej rozważanych obiektów zastosowano w pracy trzy metody:

- metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu (THA) przy założeniu równomiernego wymuszenia kinematycznego,
- metodę bezpośredniego całkowania równań ruchu (THA) przy założeniu nierównomiernego wymuszenia kinematycznego,
- metodę spektrum odpowiedzi (RSA), przy założeniu równomiernego wymuszenia kinematycznego.

W metodzie RSA jako wymuszenie przyjęto wartości przyspieszeniowego spektrum odpowiedzi oscylatora na przebieg przyspieszeń drgań (Rys. 4), wyrażające się wzorem [2]:

$$S_a(\omega_0, \xi) = \max_t \left| \ddot{q}(t, \omega_0, \xi) \right|, \quad \omega_{0d} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1)$$

gdzie:  $\ddot{q}$  - przyspieszenie drgań,  $\omega_0$  - częstość kołowa drgań własnych,  $\xi$  - tłumienie.

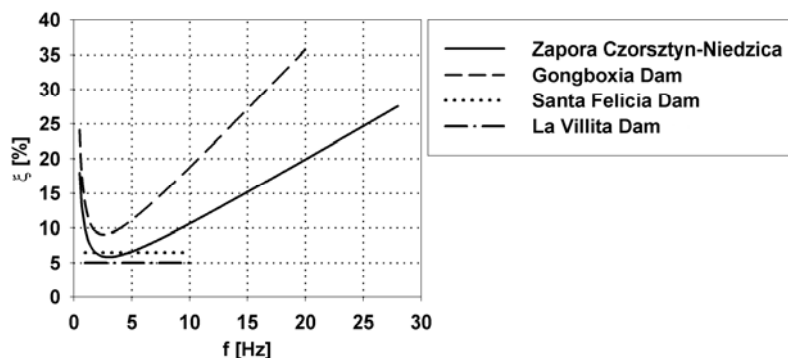


Rysunek 4: Przyspieszeniowe spektrum odpowiedzi zapisu wstrząsu sejsmicznego: a) w kierunku poziomym NS, b) w kierunku poziomym WE

### 3.2. Dane geometryczno-materiałowe i model obliczeniowy zapory

W obliczeniach odpowiedzi dynamicznej zapory ziemnej w Niedzicy na wymuszenia kinematyczne posłużono się modelem obliczeniowym obiektu uwzględniającym wszystkie elementy konstrukcji obiektu: korpus, rdzeń, warstwy ochronne rdzenia i drenaż. Założono sprężystą pracę obiektu. Szczegółowe dane dotyczące budowy geometryczno materiałowej znaleźć można w [5]. W analizie odpowiedzi dynamicznej zapory ziemnej na nierównomierne wymuszenia kinematyczne założono, że moduły sprężystości materiału ziemnego wchodzącego w skład wszystkich elementów konstrukcji zapory są zależne od średnich naprężeń efektywnych powstałych pod działaniem ciężaru własnego oraz ciężaru wody w zbiorniku, a także od nasycenia gruntu wodą. Obliczenia naprężeń efektywnych zostały wykonane przy użyciu programu Z\_Soil [17]. Przyjęto, że macierz tłumienia układu jest liniową kombinacją macierzy mas i macierzy sztywności. Wartości ułamka tłumienia krytycznego w zakresie częstotliwości od 1 do 10 Hz mieszczą się w przedziale od 5 do 10%. Wykres ułamka tłumienia krytycznego w zależności od częstotliwości przedstawiono na Rys. 5. W celach porównawczych na wykres naniesiono również charakterystyki tłumienia przyjmowane przez innych autorów obliczeń odpowiedzi dynamicznej zapór ziemnych.

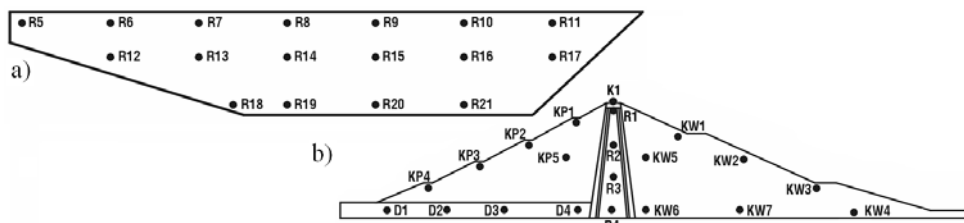




Rysunek 5: Zależność ułamka tłumienia krytycznego od częstotliwości przyjmowana przez autorów obliczeń odpowiedzi dynamicznej różnych zapór ziemnych na wymuszenia kinematyczne

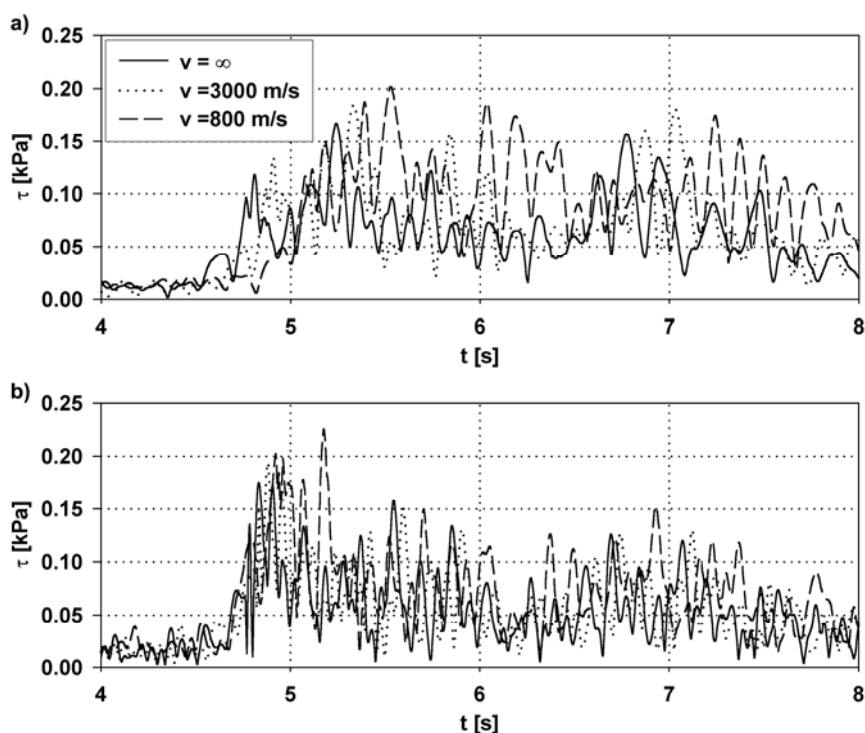
### 3.3. Wpływ prędkości propagacji fali w podłożu na odpowiedź dynamiczną zapory

W przyjętym modelu nierównomiernego wymuszenia kinematycznego założono propagację fali wstrząsowej w podłożu skalnym wzdłuż osi podłużnej zapory. Takie przyjęcie kierunku propagacji fali wstrząsowej jest zgodne ze stanem faktycznym i wynika z położenia obiektu względem epicentrum wstrząsu. Obliczenia odpowiedzi dynamicznej zapory wykonano programem ABAQUS [16]. Wpływ prędkości propagacji fali na odpowiedź dynamiczną zapory analizowano na podstawie przebiegów czasowych maksymalnych naprężeń stycznych  $\tau$  w wybranych punktach obiektu zaznaczonych na Rys. 6.



Rysunek 6: Punkty wybrane do analizy odpowiedzi dynamicznej zapory: a) przekrój podłużny przez rdzeń, b) przekrój poprzeczny zapory

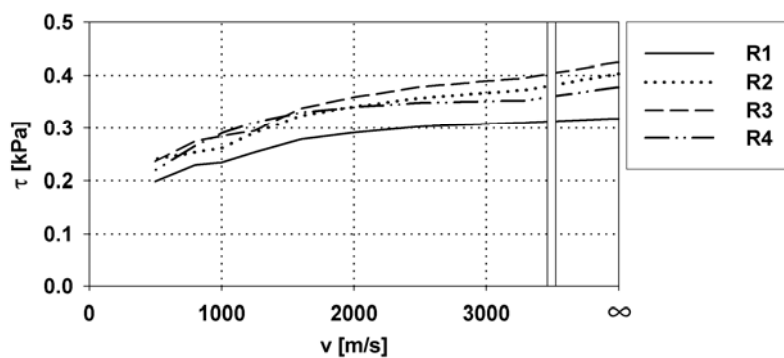
Na Rys. 7 przedstawiono fragmenty przebiegów czasowych naprężeń stycznych w punktach R12 i D1 położonych w dolnej strefie rdzenia zapory oraz w strefie drenażu, obliczone przy założeniu różnych prędkości fali. Maksymalne naprężenia styczne obliczone przy założeniu prędkości fali 800 m/s są większe niż naprężenia obliczone przy założeniu prędkości 3000 m/s oraz  $v = \infty$ . W celu określenia zależności odpowiedzi dynamicznej zapory ziemnej od prędkości propagacji fali wstrząsowej w podłożu, wykonano obliczenia przy założeniu różnych prędkości - przyjmując najmniejszą równą 600 m/s, a następnie zakładając prędkości: 800, 1200 i 3000 m/s oraz dla wymuszenia równomiernego:  $v = \infty$ .



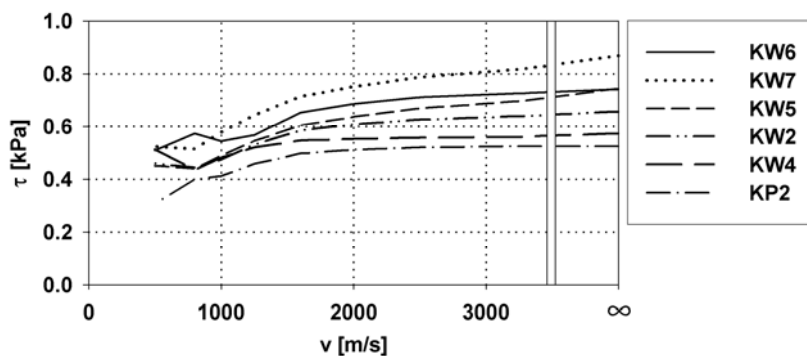
Rysunek 7: Fragmenty przebiegu czasowego naprężeń stycznych otrzymane przy założeniu różnych prędkości propagacji fali wstrząsowej w podłożu skalnym zapory: a) punkt R12 należący do strefy dolnej rdzenia zapory, b) punkt D1 należący do strefy drenażu zapory

Na Rys. 8 i 9 przedstawiono zależność maksymalnych naprężeń stycznych w wybranych punktach zapory od prędkości fali w podłożu skalnym. Analizowane punkty należą do rdzenia i do korpusu zapory zarówno po stronie odwodnej, jak i odpowietrznej. Efekt przejścia fali wzdłuż budowli powoduje redukcję odpowiedzi dynamicznej w analizowanych punktach. Przyczyną redukcji jest zmniejszenie średniej wartości amplitud wymuszenia. Faktyczne wymuszenie działające na konstrukcję w danej chwili jest bowiem wymuszeniem uśrednionym na długości obiektu. Efekty quasi-statyczne odgrywają tu małą rolę. Naprężenia w mniejszym stopniu zależą od chwilowych zmian geometrii konstrukcji powstałych w wyniku nierównomiernego ruchu podłoża niż od efektów dynamicznych.

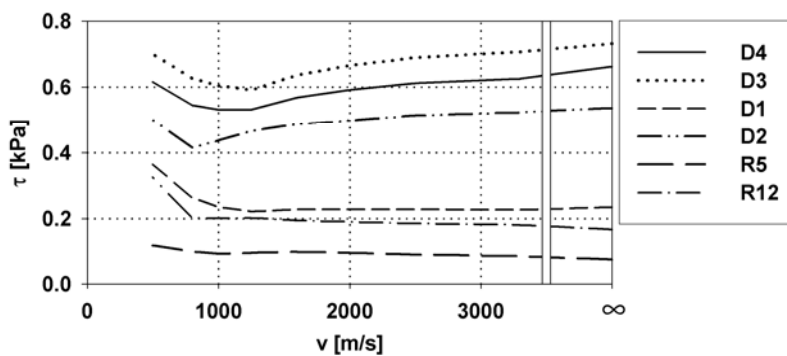
Na Rys. 10 pokazano zależność maksymalnych naprężeń stycznych w punktach dolnej strefy rdzenia zapory oraz do strefy drenażu od prędkości fali w podłożu. Można zauważyć redukcję naprężeń przy zmniejszaniu prędkości fali do wartości około 1000 m/s. Następnie przy dalszym zmniejszaniu prędkości fali następuje zwiększenie naprężeń. Nierównomierność wymuszenia powoduje bowiem powstanie efektów quasi-statycznych, na które jest narażona szczególnie dolna strefa konstrukcji przylegająca do podłoża skalnego. Zasięg efektów quasi-statycznych wynikających ze zmian geometrii podłoża jest niewielki i obejmuje jedynie strefę drenażu i niektóre fragmenty dolnej strefy rdzenia zapory.



Rysunek 8: Zależność maksymalnych naprężeń stycznych w punktach należących do rdzenia zapory (por. Rys. 6) od prędkości propagacji fali w podłożu



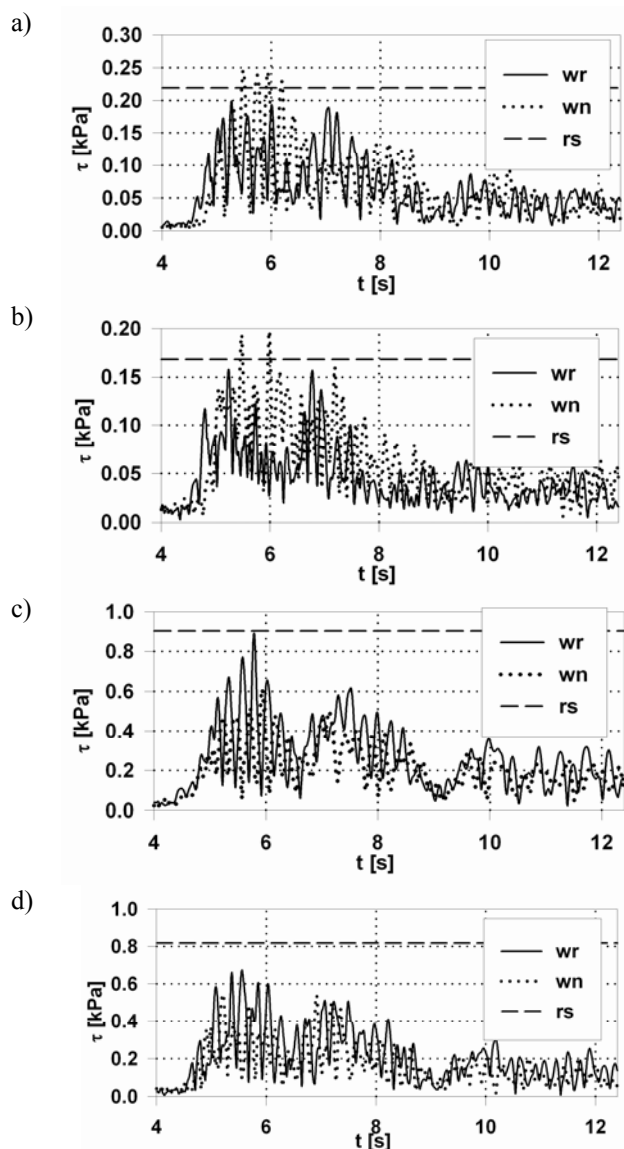
Rysunek 9: Zależność maksymalnych naprężeń stycznych w punktach należących do korpusu zapory (por. Rys. 6) od prędkości propagacji fali w podłożu



Rysunek 10: Zależność maksymalnych naprężeń stycznych w punktach należących do strefy dolnej rdzenia oraz do strefy drenażu (por. Rys. 6) od prędkości propagacji fali w podłożu

### 3.4. Porównanie odpowiedzi dynamicznej zapory otrzymanej metodami THA i RSA

Na Rys. 11 przedstawiono maksymalne naprężenia styczne otrzymane przy wymuszeniu równomiernym, nierównomiernym i przy zastosowaniu metody spektrum odpowiedzi w wybranych punktach zapory.



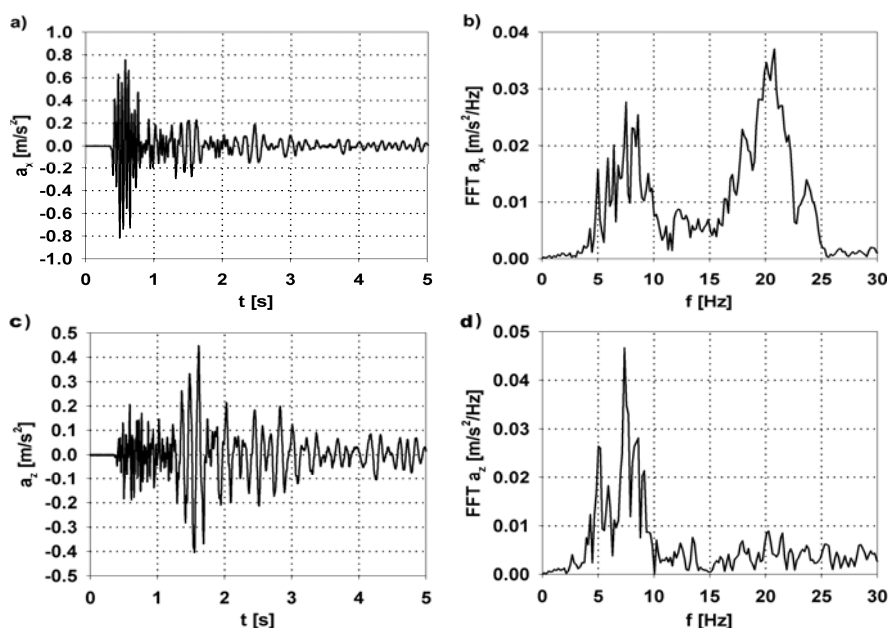
Rysunek 11: Maksymalne naprężenia styczne otrzymane przy wymuszeniu równomiernym (wr), nierównomiernym (wn) i przy zastosowaniu metody spektrum odpowiedzi (rs) dla wybranych punktów zapory (por. rys. ): a) R18, b) R12, c) R4, d) KP5

W strefie drenażu zapory zauważyć można wzrost naprężeń będących odpowiedzią na nierównomierne wymuszenie w stosunku do naprężeń w odpowiedzi na wymuszenie nierównomierne i w stosunku naprężeń uzyskanych metodą spektrum odpowiedzi (Rys. 11a, b). Inną tendencję wykazują punkty należące do plastycznego rdzenia (Rys. 11c) oraz do wyższych partii korpusu zapory (Rys. 11d), dla których widoczna jest redukcja odpowiedzi dynamicznej przy zastosowaniu wymuszenia nierównomiernego. Strefa drenażu ułożona jest bezpośrednio na sztywnym skalistym podłożu przez co wykazuje większą wrażliwość na efekty quasi-statyczne niż w obszarze rdzenia zbudowanego z glin plastycznych, czy w wyższych partiach korpusu.

#### 4. ANALIZA ODPOWIEDZI DYNAMICZNEJ MOSTU ŻELBETOWEGO POSADOWIONEGO NA TERENIE AKTYWNOŚCI GÓRNICZEJ

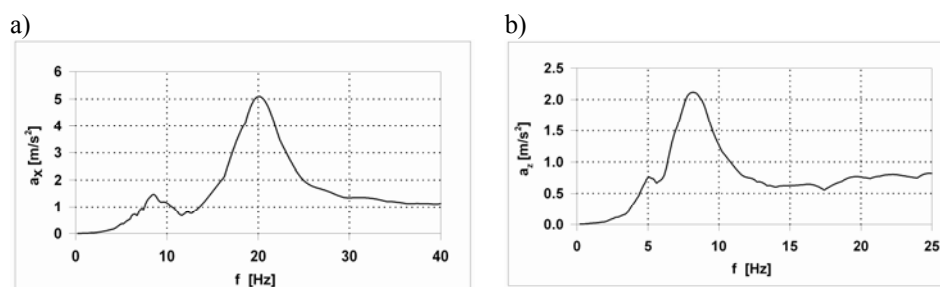
##### 4.1. Dane o wymuszeniu kinematycznym – wstrząs górniczy w LGOM

Do obliczeń jako wymuszenie przyjęto rzeczywisty, zarejestrowany na terenie (LGOM) przebieg przyspieszeń drgań powierzchniowych będący następstwem wstrząsu górniczego. Uwzględniono działanie dwóch składowych wymuszenia oraz założono propagację fali równoległą do osi podłużnej mostu. Przebiegi przyspieszeń drgań gruntu w kierunku poziomym i pionowym oraz ich strukturę częstotliwościową przedstawiono na Rys. 12.



Rysunek 12: Przyspieszenia drgań od wstrząsu górniczego na terenie LGOM: a) przebieg czasowy drgań w kierunku poziomym, b) struktura częstotliwościowa przebiegu drgań w kierunku poziomym, c) przebieg czasowy drgań w kierunku pionowym, d) struktura częstotliwościowa przebiegu drgań w kierunku pionowym

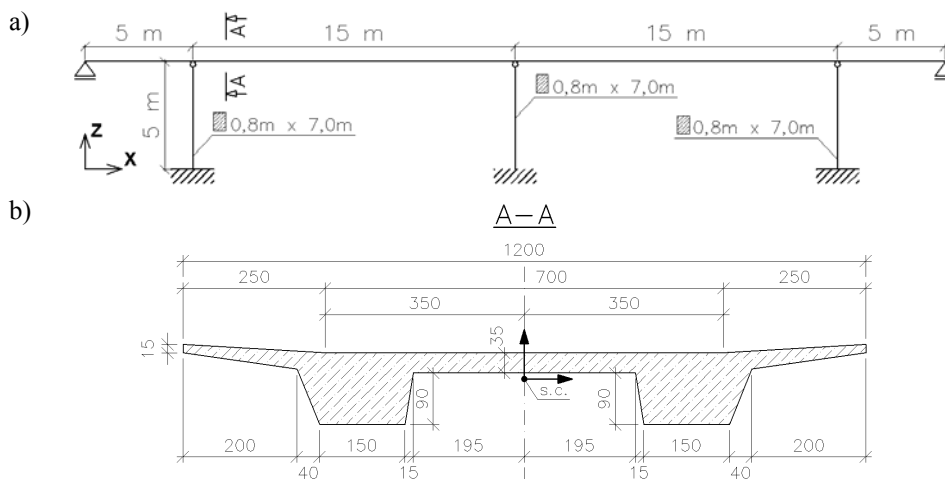
Na Rys. 13 pokazano przyspieszeniowe spektrum odpowiedzi zapisu wstrząsu w kierunku poziomym i pionowym.



Rysunek 13: Przyspieszeniowe spektrum odpowiedzi zapisu drgań w czasie wstrząsu z rejonu LGOM: a) w kierunku poziomym, b) w kierunku pionowym

#### 4.2. Dane geometryczno-materiałowe i model obliczeniowy mostu

Analizę odpowiedzi dynamicznej przeprowadzono dla dwuprzęsłowego mostu żelbetowego o całkowitej rozpiętości 40 m. Wymiary i parametry materiałowe konstrukcji przyjęto na podstawie literatury [6]. Schemat statyczny mostu oraz geometrię przekroju przedstawiono na Rys. 14. Przyjęte charakterystyki podłoża odpowiadały własnościom podłoża piaszczysto-żwirowego, w którym prędkość propagacji fali wynosi ok. 800 m/s. Obliczenia odpowiedzi dynamicznej mostu na wymuszenia parasejsmiczne wykonano programem ABAQUS [16]. Zastosowano elementy uwzględniające parametry przekrojów poszczególnych części konstrukcji mostu. Tłumienie obiektu przyjęto na poziomie  $\xi = 5\%$ .

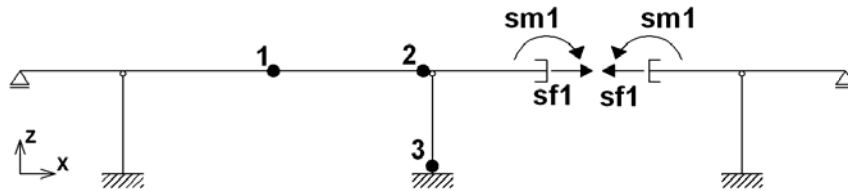


Rysunek 14: Schemat statyczny mostu (a) oraz przekrój poprzeczny przęsła (b)

#### 4.3. Porównanie odpowiedzi dynamicznej mostu otrzymanej metodami THA i RSA

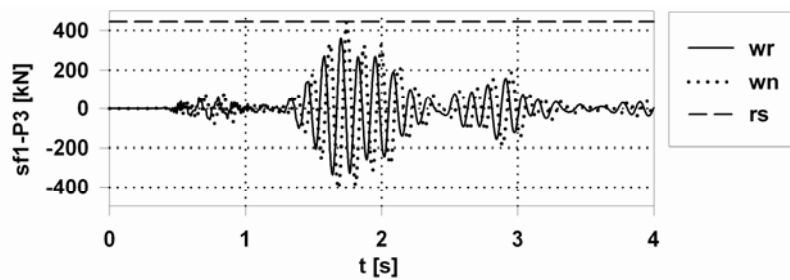
Na Rys. 15 przedstawiono wybrane punkty dla których zestawiono wartości sił przekrojowych (sił podłużnych  $sf1$  i momentów zginających  $sm1$ ) powstałych w wyniku wstrząsu parasejsmicznego. Wartości sił przekrojowych w wybranych punktach uzyskano przy zastosowaniu metod:

- bezpośredniego całkowania równań ruchu z założeniem wymuszenia równomiernego,
- bezpośredniego całkowania równań ruchu z założeniem wymuszenia nierównomiernego ( przy prędkości propagacji fali równej 800 m/s ),
- spektrum odpowiedzi.



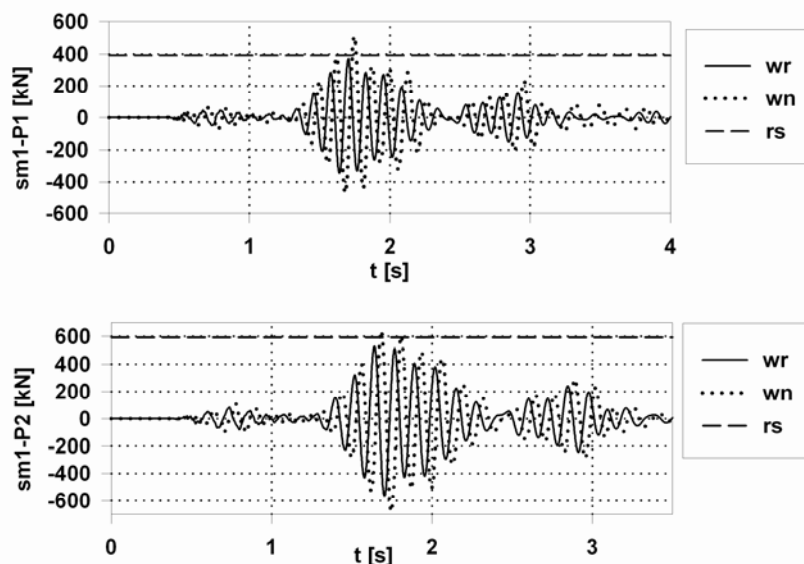
Rysunek 15: Wybrane punkty mostu w których analizowano wartości sił przekrojowych  $sf1$  i  $sm1$

Przebiegi czasowe sił podłużnych  $sf1(t)$  w punkcie P3 (u podstawy słupa) zestawiono na Rys. 16. Uwzględnienie nierównomierności wymuszenia spowodowało zwiększenie wartości sił podłużnych w stosunku do wartości uzyskanych przy wymuszeniu równomiernym, a także w stosunku do wartości uzyskanych metodą spektrum odpowiedzi.



Rysunek 16: Przebiegi czasowe wartości sił  $sf1$  otrzymane przy wymuszeniu równomiernym ( $wr$ ), nierównomiernym ( $wn$ ) i przy zastosowaniu metody spektrum odpowiedzi ( $rs$ ) w punkcie P3

Przebiegi czasowe momentów zginających  $sm1(t)$  w punktach P1 i P2 (odpowiednio w środku przęsła i nad podporą) zestawiono na Rys. 17. W punktach tych następuje zwiększenie wartości momentów zginających będących odpowiedzią na wymuszenie równomierne w stosunku do wartości będących odpowiedzią na wymuszenie równomierne oraz w stosunku do wartości uzyskanych metodą spektrum odpowiedzi.



Rysunek 17: Przebiegi czasowe wartości momentów zginających  $sm1$  otrzymane przy wymuszeniu równomiernym (wr), nierównomiernym (wn) i przy zastosowaniu metody spektrum odpowiedzi (rs): a) punkt P1, b) punkt P2

## 5. WNIOSKI

W pracy przedstawiono analizę odpowiedzi dynamicznej dwóch wybranych obiektów wielopodporowych – zapory ziemnej i mostu żelbetowego – na wymuszenia kinematyczne sejsmiczne i parasejsmiczne. Reasumując uzyskane wyniki obliczeń odpowiedzi dynamicznej w/w obiektów można stwierdzić, że:

- Przyjęcie modelu nierównomiernego wymuszenia kinematycznego prowadzi generalnie do zmniejszenia wartości naprężeń i przemieszczeń zapory w stosunku do klasycznej analizy dynamicznej o około 20%. Różnice te są największe przy małych prędkościach fal w podłożu.
- Przy założeniu nierównomiernego wymuszenia kinematycznego w strefie dolnej zapory przylegającej do drgającego podłoża pojawiają się efekty quasi-statyczne. Są one większe w strefie drenażowej (o stosunkowo dużej sztywności) niż w obszarze rdzenia zbudowanego z glin plastycznych.
- W strefie dolnej konstrukcji zapory, przy niewielkich prędkościach fali wstrząsowej, globalna odpowiedź dynamiczna na nierównomierne wymuszenie kinematyczne jest większa od odpowiedzi, którą otrzymuje się przy klasycznej analizie pomijającej „travelling wave effect”. Oznacza to, że przyjęcie założenia upraszczającego o jednakowym wymuszeniu we wszystkich punktach podparcia budowli nie zawsze prowadzi do bardziej bezpiecznego projektowania wielkogabarytowych ziemnych obiektów hydrotechnicznych.



- W przypadku mostu żelbetowego przyjęcie modelu nierównomiernego wymuszenia kinematycznego może prowadzić do wzrostu wartości sił przekrojowych w porównaniu do wartości uzyskanych przy założeniu modelu równomiernego wymuszenia kinematycznego.
- Duże znaczenie ma prawidłowe rozpoznanie charakterystyk dynamicznych obiektu - w tym początkowych częstotliwości drgań własnych oraz wielkości tłumienia. Parametry te w zdecydowany sposób wpływają na odpowiedź dynamiczną budowli, a w szczególności udziału składowych: dynamicznej i quasi-statycznej w globalnej odpowiedzi konstrukcji.
- Otrzymanie prawidłowej wielkości odpowiedzi dynamicznej budowli wielopodporowych, oprócz rozpoznania właściwości fizykomechanicznych samego obiektu, wymaga rozpoznania parametrów fizykomechanicznych podłoża gruntowego, a co za tym idzie prędkości propagacji fali wstrząsowej. Nieprawidłowe przyjęcie prędkości fali prowadzić może do niedoszacowania wartości odpowiedzi dynamicznej obiektu.
- W niektórych punktach analizowanych obiektów wielopodporowych zauważyć można wzrost wartości naprężeń lub sił przekrojowych będących odpowiedzią na nierównomierne wymuszenie w stosunku wartości uzyskanych metodą spektrum odpowiedzi. Oznacza to, że metoda spektrum odpowiedzi, z reguły szacująca wartości odpowiedzi dynamicznej od góry, daje mniejsze wartości odpowiedzi dynamicznej niż metoda całkowania równań ruchu z uwzględnieniem nierównomierności wymuszenia kinematycznego. W takim przypadku stosowanie metody spektrum odpowiedzi prowadzić może do niedoszacowania wielkości odpowiedzi dynamicznej.

#### LITERATURA

- [1] Abdel-Ghaffar A.M., Scott R.F., Craig M., *Full-scale experimental investigation of a modern earth dam*, Report EERL 80-02, Pasadena: California Institute of Technology, 1980.
- [2] Chmielewski T., Zembaty Z., *Podstawy dynamiki budowli*, Arkady, Warszawa 1998.
- [3] Dendrou B., Werner S., Toridis T.: *Three-dimensional response of a concrete bridge system to travelling seismic waves*, Computers&Structures, 1985, vol. 20, no.1/3, p. 593-603.
- [4] Dubiński J., Mutke G.: *Ochrona obiektów budowlanych na terenach górniczych*, Wydawnictwo GIG, Katowice 1998, s. 533-576.
- [5] Dulińska J.: *Odpowiedź dynamiczna budowli wielopodporowych na nierównomierne wymuszenie parasejsmiczne pochodzenia górniczego*, Politechnika Krakowska, Monografia 338, Kraków 2006.

- [6] Furtak K., Wrana B.: *Mosty zintegrowane*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 2005.
- [7] Harichandran R.S., *Spatial variation of earthquake ground motion. What is it, how do we model it and what are its engineering implications?* Dep. of Civil and Environmental Engineering, Michigan State University, 1999.
- [8] Kiureghian der A., *A coherency model for spatially varying ground motion*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1996, vol. 25, p. 99-111.
- [9] Oliveira C.S., Hao H., Penzien J., *Ground motion modeling for multiple-input structural analysis*, Structural Safety, 1991, vol. 10, p. 79-93.
- [10] Papalou A., Bielak J., *Seismic elastic response of earth dams with canyon interaction*, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, vol. 127, no. 5, p. 446-452.
- [11] Trifunac M.D., Todorovska M.I., *Spectra for differential motion of columns*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1997, vol. 26, no. 2, p. 251-268.
- [12] Wang J., Carr A., Cooke N., Moss P.: *Effect of spatial variation of seismic input on bridge longitudinal response*, 13th Conf. on Earthquake Engineering, no. 640, Vancouver 2004.
- [13] Wang G., Fu P.C., Zhang J.M., *Seismic response analysis of Gongboxia concrete-face rock-fill dam considering nonuniform earthquake input.*, 11th ICSDEE/3rd ICEGE Proceedings, 2004, Berkley, CA, p. 359-365.
- [14] Zembaty Z., Cholewicki A., Jankowski R., Szulc J., *Trzęsienie ziemi 30 listopada 2004 r. na Podhalu oraz ich wpływ na obiekty budowlane*, Inżynieria i Budownictwo, 2005, nr 9, s. 507-511.
- [15] Zembaty Z., Rutenberg A., *Spatial response spectra and site amplification effects*, Engineering Structures, 2002, vol. 24, no. 11, p. 1485-1496.

#### **MATERIAŁY**

- [16] Abaqus. Standard User's Manual, 2005.
- [17] Z\_SOIL PC 2003. User Manual. Zace Services Ltd, (<http://www.zace.com>)
- [18] Eurokod 8: *Earthquake resistant design of structures* – second draft 1993 CENT/TC 250/SC8/N85.
- [19] ISO/DIS 3010, *Basis for design of structures – Seismic actions on structures*.

## MOŻLIWOŚCI ZASTOSOWANIA ROZKŁADU WZGLĘDEM WARTOŚCI SZCZEGÓLNYCH W ANALIZIE WIBROAKUSTYCZNEJ OBIEKTÓW BUDOWLANYCH

**Zbigniew Engel<sup>1,3</sup>, Jacek Engel<sup>2</sup>, Krzysztof Kosala<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Centralny Instytut Ochrony Pracy,  
ul. Czerniakowska 16, 00-701 Warszawa

<sup>2</sup> Uniwersytet Techniczny w Koszycach,  
Letna 9, 042-00 Koszyce, Słowacja

<sup>3</sup> Akademia Górniczo-Hutnicza, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki,  
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków,  
e-mail: kosala@agh.edu.pl

---

**Abstract:** *The possibilities of application the mathematical method – Singular Value Decomposition in vibroacoustical analysis of building objects on sacral objects example were shown in the paper. Singular Value Decomposition (SVD) is a technique used in the reduction of matrix sizes and analysis of independencies of variables. Application of this tool in acoustic problems of sacral interiors gave the possibility of analysis of proposed index method of acoustic assessment of sacral objects. The dependencies between partial indices were obtained from SVD as well as the formulae which can approximately assess global acoustic quality of sacral interior. The verification of index method with SVD was performed for six real roman-catholic churches.*

*The approximate global index and partial indices can be used for acoustic assessment of real interior where acoustic adaptation is needed as well as for designed sacral rooms. The proposed indices are calculated from simulation research on created geometrical model. The inverse problem was formulated in the paper, where at the assumed global index, partial indices determining individual properties - are looked for.*

---

### 1. WPROWADZENIE

Problemy akustyczne występujące w budownictwie można podzielić na dwie grupy: ochronę przeciwdźwiękową (przeciwhałasową) i akustykę wnętrz. Zagadnienia związane z ograniczeniem poziomu hałasu a także zmniejszeniem stopnia przenikania hałasu do pomieszczeń podlegających ochronie przeciwhałasowej ujęte są w trzech działach akustyki architektonicznej: urbanistycznej, budowlanej i instalacyjnej [12]. Do drugiej grupy zaliczane są zagadnienia związane z kształtowaniem specjalnych warunków akustycznych we

wnętrzach budowlanych i urbanistycznych. Akustyka wnętrz budowlanych obejmuje kształtowanie odpowiednich warunków niezbędnych do przekazywania i odbioru muzyki i mowy w pomieszczeniach budownictwa ogólnego i przemysłowego. Akustyka wnętrz urbanistycznych obejmuje kształtowanie specjalnych wnętrz urbanistycznych w taki sposób, aby zapewnić w nich odpowiednie warunki akustyczne.

Autorzy referatu prowadzą badania właściwości akustycznych obiektów sakralnych. Kształtowanie warunków akustycznych wnętrz sakralnych jest niekiedy bardzo trudnym zadaniem, ze względu na konieczność pogodzenia ze sobą sprzecznych wymagań akustycznych mających na celu stworzenie z jednej strony odpowiednich warunków do odtwarzania i słuchania muzyki, szczególnie organowej, zaś z drugiej mowy i warunków porozumiewania się celebrującego nabożeństwo z organistą oraz uczestnikami nabożeństwa.

Zagadnienia akustyczne obiektów sakralnych były przez wiele lat zaniedbywane w naszym kraju [6]. Problematyka nieodpowiednich właściwości akustycznych dotyczy szczególnie budowanych współcześnie obiektów sakralnych. W wielu przypadkach sprawy akustyczne wnętrz pozostawia się inżynierom dźwięku, którzy instalując urządzenia nagłaśniające mają poprawić właściwości akustyczne. Niestety wadliwe pod względem akustycznym wnętrze uniemożliwia niejednokrotnie poprawę jakości sygnałów dźwiękowych.

Projektanci obiektów sakralnych natrafiają na szereg trudności związanych z zapewnieniem odpowiednich walorów akustycznych. Do trudności tych zaliczyć można brak odpowiednich metod i sposobów, pozwalających na określenie warunków akustycznych istniejących w obiektach sakralnych. W chwili obecnej do oceny akustycznej takich obiektów stosowane są metody, które służą do oceny akustycznej wszelkiego rodzaju sal koncertowych, teatralnych i audytoriów.

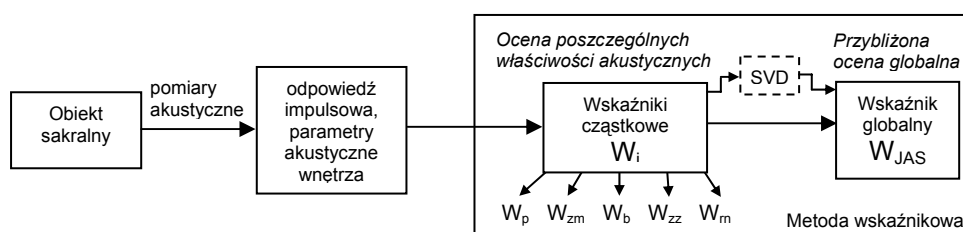
Autorzy referatu prowadzą badania nad opracowaniem jednolitej metody pozwalającej na dokonanie oceny jakości świątyń. Do tej pory opracowana została wskaźnikowa metoda oceny akustycznej wnętrza sakralnych. Zaproponowana metoda na obecnym etapie posiada szereg założeń i ograniczeń, co wpływa na zakres jej zastosowania. Pomocnym narzędziem do udoskonalenia zaproponowanej metody wskaźnikowej jest technika rozkładu względem wartości szczególnych znana także pod nazwą rozkładu SVD.

## 2. ANALIZA WŁAŚCIWOŚCI AKUSTYCZNYCH OBIEKTÓW SAKRALNYCH

Wymagania akustyczne obiektów sakralnych można ogólnie podzielić na te, które związane są ze sprawowaniem obrzędów liturgicznych oraz te, które wiążą się z działalnością kulturalną prowadzoną we wnętrzach obiektów kultu religijnego, nie zawsze pozostającą w ścisłym związku z religią, której obrzędy odprawiane są w danym kościele. Dobrze zaprojektowany pod względem akustycznym obiekt sakralny powinien spełniać wszystkie wymagania, dotyczące audytoriów oraz te, które są właściwe funkcjom liturgicznym danego wyznania. Są to dobra zrozumiałość mowy celebrującego kapłana, dobre warunki odsłuchu muzyki organowej i śpiewu chóru oraz wiernych, możliwość niezakłóconej modlitwy, równomierność nagłośnienia, walory brzmieniowe oraz odpowiednio niski poziom zakłóceń zewnętrznych.

Zaproponowana przez autorów referatu metoda wskaźnikowa oceny jakości akustycznej pomieszczeń sakralnych jest metodą porównawczą [5]. Za pomocą opracowanych zależności, w postaci wskaźników, porównywane są zmierzone w obiekcie rzeczywistym wartości parametrów akustycznych z wartościami preferowanymi. Do oceny jakości aku-

stycznej wnętrza sakralnego wprowadzono wskaźnik globalny będący funkcją kilku wskaźników cząstkowych. Na Rys.1. przedstawiono algorytm oceny akustycznej przy użyciu wskaźników cząstkowych i wskaźnika globalnego. Do tej pory opracowano pięć wskaźników cząstkowych, do których należą: wskaźnik: pogłosowy  $W_p$ , zrozumiałości mowy  $W_{zm}$ , walorów brzmieniowych muzyki  $W_b$ , zakłóceń zewnętrznych  $W_{zz}$  i równomierności nagłośnienia  $W_m$ . Nie wyklucza się zwiększenia ilości wskaźników cząstkowych. Wszystkie wskaźniki przyjmują wartości od 0 (złe właściwości akustyczne) do 1 (bardzo dobre właściwości akustyczne). Sposób wyznaczenia poszczególnych wskaźników cząstkowych podany jest w [5, 6].



Rysunek 1: Ocena właściwości akustycznych świątyń przy użyciu globalnego wskaźnika jakości akustycznej

Metoda wskaźnikowa jest przeznaczona do pewnych typów wnętrz sakralnych o odpowiedniej kubaturze, rodzaju ze względu na wyznaczenie, wnętrz o prostych kształtach – niezawierających pomieszczeń akustycznie sprzężonych [5]. Metoda w chwili obecnej nie uwzględnia instalacji nagłośnieniowej wyposażenia kościoła, gdyż badane są właściwości akustyczne pomieszczenia a nie urządzeń, które te właściwości poprawiają. Oceniane są w skali od 0 do 1 poszczególne właściwości akustyczne wnętrza jak również dokonywana jest przybliżona ocena globalna jakości akustycznej obiektu sakralnego. Weryfikację metody przeprowadzono na sześciu wybranych obiektach rzeczywistych – kościołach rzymsko-katolickich. W dalszych badaniach nad udoskonaleniem zaproponowanej metody oceny autorzy wykorzystują narzędzie matematyczne, jakim jest rozkład względem wartości szczególnych [9, 11].

### 3. ROZKŁAD WZGLĘDEM WARTOŚCI SZCZEGÓLNYCH - SVD

Rozkład względem wartości szczególnych jest rozkładem macierzy na wartości osobliwe (szczególne) [4]. Jako metoda matematyczna ma zastosowanie m.in. w analizie statystycznej do redukcji wymiarów macierzy. Rozkład SVD jest stosowany przez wielu badaczy w różnych dziedzinach nauki. Jednym z pierwszych, który zastosował ten rozkład w zagadnieniach diagnostyki był Cempel [3]. Zastosowanie rozkładu SVD można znaleźć także w badaniach różnych procesów wibroakustycznych jak np. przy identyfikacji źródeł dźwięku, w analizie promieniowania dźwięków przez drgające powierzchnie oraz przy ocenie akustycznej maszyn i urządzeń na podstawie analizy parametrów pola akustycznego [4].

Zgodnie z teorią SVD każda macierz  $A \in R^{m \times n}$  może być przedstawiona w postaci rozkładu, będącego iloczynem trzech macierzy:

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (1)$$

gdzie:  $U$  – macierz ortonormalna  $m \times n$ ;  
 $\Sigma$  – macierz diagonalna (przekątniowa)  $n \times n$ ;  
 $V$  – macierz ortonormalna  $n \times n$ ,

w taki sposób, że  $U$  i  $V^T$  mają kolumny (wektory) ortonormalne, a  $\Sigma$  jest macierzą diagonalną. Macierz  $\Sigma$  zawiera wartości szczególne (osobliwe) macierzy  $A$ , natomiast macierze  $U$  i  $V^T$  zawierają lewe oraz prawe szczególne wektory macierzy  $A$  to jest  $u_i$  i  $v_i$  odpowiednio.  $\Sigma$  jest macierzą diagonalną, zatem:

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i > 0 & \text{dla } i = 1..n \\ \sigma_i = 0 & \text{dla } i > n \end{cases} \quad (2)$$

Elementy przekątnej spełniają warunek:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_n$ .

Szczególne wartości  $A$  są nieujemnymi kwadratowymi pierwiastkami wartości własnych  $A^T A$ . Lewe szczególne wektory  $u_i$  są wektorami własnymi  $A^T A$ , natomiast prawe szczególne wektory  $v_i$  wektorami własnymi  $AA^T$ . Z tego wynika, że lewe szczególne wektory  $u_i$ :

$$A^T A u_i = \sigma_i^2 u_i \quad (3)$$

a prawe szczególne wektory  $v_i$ :

$$A A^T v_i = \sigma_i^2 v_i \quad (4)$$

#### 4. ZASTOSOWANIE SVD W ANALIZIE WIBROAKUSTYCZNEJ OBIEKTÓW BUDOWLANYCH NA PRZYKŁADZIE OBIEKTÓW SAKRALNYCH

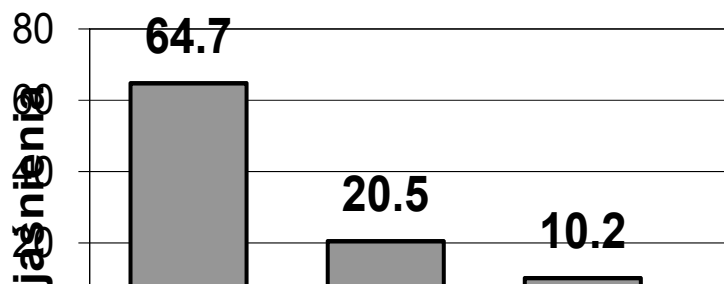
Do oceny globalnej w metodzie wskaźnikowej posłużono się pewną zależnością uwzględniającą wagi poszczególnych wskaźników cząstkowych [5, 6]. W celu dokładniejszego zbadania związków między wskaźnikami cząstkowymi zastosowano technikę SVD.

Założeniem metody wskaźnikowej było sporządzenie pewnych zależności pomiędzy parametrami akustycznymi uzyskanymi z pomiarów na obiekcie rzeczywistym oraz wartościami preferowanymi. Opracowane zależności, w postaci wskaźników cząstkowych, przyjmują wartości od 0 do 1. Wskaźniki te wyznaczone dla sześciu badanych kościołów posłużyły do utworzenia macierzy obserwacji  $A$ . Kolumny macierzy  $A$  są to wartości wskaźników cząstkowych kolejno:  $W_p$ ,  $W_b$ ,  $W_{zm}$ ,  $W_{zz}$ ,  $W_m$ , natomiast wiersze stanowią obiekty sakralne, w których dokonywano badań akustycznych. Rozkład macierzy obserwacji  $A$  względem wartości szczególnych przeprowadzono w środowisku Matlab. Otrzymano następujący model obliczeniowy:

$$\begin{bmatrix} 0.89 & 0.67 & 0.49 & 1 & 0.2 \\ 0.98 & 0.6 & 0.34 & 0.39 & 0.53 \\ 1 & 0.49 & 0.34 & 0.58 & 0.21 \\ 0.91 & 0.42 & 0.23 & 0.57 & 0.43 \\ 0.86 & 0.48 & 0.33 & 0.37 & 0.26 \\ 0.11 & 0.21 & 0.21 & 1.0 & 0.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5020 & 0.0559 & 0.7457 & -0.2826 & 0.3179 \\ -0.4301 & -0.2083 & -0.5544 & -0.5215 & 0.2858 \\ -0.4195 & -0.2399 & 0.1537 & 0.4328 & -0.4278 \\ -0.4019 & -0.0683 & -0.2595 & 0.6456 & 0.4567 \\ -0.3581 & -0.2601 & -0.1088 & -0.2095 & -0.6176 \\ -0.3116 & 0.9074 & -0.1833 & 0.0006 & -0.2098 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3.0769 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9739 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4826 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.17622 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0443 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -0.6486 & -0.596 & -0.1569 & 0.4399 & -0.0760 \\ -0.3920 & -0.1726 & 0.0883 & -0.6781 & 0.5906 \\ -0.2635 & -0.0369 & 0.1970 & -0.5061 & -0.7963 \\ -0.5153 & 0.6240 & 0.5077 & 0.2818 & 0.0880 \\ -0.3008 & 0.4735 & -0.8191 & -0.1044 & -0.0587 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Za pomocą rozkładu macierzy A na wartości szczególne można dokonać redukcji modelu obliczeniowego wybierając najbardziej informacyjne składowe szczególne (wartości szczególne), opisujące stan analizowanego obiektu.

Udziały procentowe wyjaśnienia informacji o niezależnych wskaźnikach poprzez kolejne składowe szczególne pokazano na Rys 2.



Rysunek 2: Zawartość informacji o niezależnych wskaźnikach w macierzy A

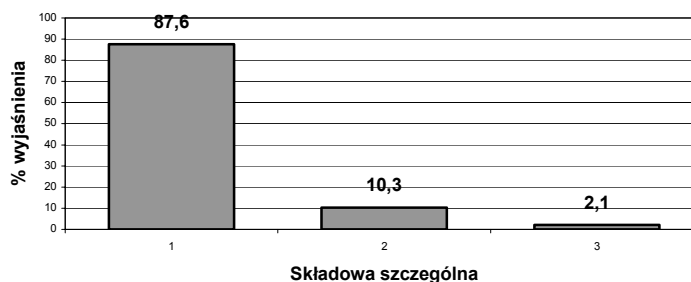
Z Rys. 2 wynika, że najbardziej informacyjna jest pierwsza składowa szczególna  $\sigma_1$ . Zawiera ona 65% ogółu informacji (wyjaśnienia zjawiska) w macierzy obserwacji A. Druga składowa szczególna oraz trzecia stanowią odpowiednio 20% i 10% ogółu informacji. Dwie ostatnie składowe mają bardzo małe wartości w stosunku do pozostałych i zawierają się w przedziale szumu informacyjnego. Można je więc przy dalszej analizie odrzucić. Reszta składowych po zsumowaniu wynosi ok. 95 % wyjaśnienia zjawiska, zatem można taki model obliczeniowy zredukować wykorzystując aproksymację rzędu  $r=3$ . Wówczas możemy zapisać zależność:

$$A_{r=3} = \sigma_1 u_1 v_1 + \sigma_2 u_2 v_2 + \sigma_3 u_3 v_3 \quad (6)$$

Odrzucając dwa ostatnie wskaźniki cząstkowe (zakłóceń zewnętrznych oraz równomierności nagłośnienia) odpowiadające najmniej informacyjnym składowym szczególnym,

utworzono model obliczeniowy zawierający trzy wskaźniki: pogłosowy, brzmienia muzyki oraz zrozumiałości mowy [9, 10].

Po dokonaniu w programie Matlab rozkładu SVD takiej macierzy – udziały procentowe wyjaśnienia informacji przez składowe szczególne wyglądają następująco (Rys. 3):



Rysunek 3: Zawartość informacji o niezależnych wskaźnikach w macierzy  $A_1$

Pierwsza wartość szczególna jest najbardziej informacyjna. Zawiera ona 88% ogółu informacji w macierzy  $A$ . Druga wartość szczególna zawiera 10% a trzecia – 2%.

Pierwsza składowa szczególna jest duża w porównaniu z pozostałymi, zatem można model obliczeniowy zredukować wykorzystując aproksymację pierwszego rzędu. Otrzymany model przybliżony będzie obciążony pewnym błędem, opisanym normą Frobeniusa [10].

Przybliżony model empiryczny uzyskany z aproksymacji pierwszego rzędu ( $R=1$ ) można przedstawić jako:

$$A' = \sigma_1 u_1 v_1^T \quad (7)$$

zatem,

$$A' = 2.533 \times \begin{matrix} \sigma_1 \\ \text{obiekty sakralne} \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ \begin{bmatrix} -0.4756 \\ -0.4727 \\ -0.4584 \\ -0.4024 \\ -0.41 \\ -0.1014 \end{bmatrix} \end{matrix} \times \begin{matrix} v_1^T \text{ (wagi)} \\ \begin{bmatrix} -0.82 & -0.48 & -0.32 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} A^* \\ \begin{bmatrix} 0.99 & 0.58 & 0.38 \\ 0.98 & 0.57 & 0.38 \\ 0.95 & 0.56 & 0.37 \\ 0.83 & 0.49 & 0.32 \\ 0.85 & 0.5 & 0.33 \\ 0.21 & 0.12 & 0.08 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8)$$

Przy doskonałej korelacji wskaźników w macierzy  $A^*$  (współczynniki korelacji  $r=1$ ) istnieją pewne liczby (pokazane w równaniu (8)) i uzyskane z rozkładu SVD – składniki wektorów  $u_1$  i  $v_1$ , przy pomocy których możemy uzyskać macierz  $A^*$ . Zawarta jest w nich ta sama informacja, co w macierzy  $A'$ , jednak uzyskujemy ją poprzez ortogonalne wektory  $u_1$  i  $v_1$ . Zauważając, że składniki wektora  $v_1$  są przy tym stopniu aproksymacji ( $R=1$ ), jednakowe dla wszystkich obiektów sakralnych dla poszczególnych wskaźników – możemy je tym wskaźnikom przypisać traktując je jako wagi, które wykorzystane będą przy ocenie globalnej.



W tabeli 1 pokazano porównanie badanych kościołów według globalnej oceny: wskaźnikiem jakości akustycznej obiektów sakralnych  $W_{JAS}^*$  (z wagami tradycyjnymi, opisanymi w [5]) oraz wskaźnikiem globalnym  $W_{JAS}^{**}$  (z wagami otrzymanymi przy pomocy rozkładu SVD) opisanego zależnością:

$$W_{JAS}^{**} = \frac{0,82 \cdot W_p^* + 0,32 \cdot W_{zm} + 0,48 \cdot W_b}{1,62} \quad (9)$$

Wyniki, jakie uzyskano przy pomocy wzoru (9) z nowymi wartościami wag są prawie identyczne jak przy pomocy wzoru tradycyjnego na  $W_{JAS}^*$ .

Tabela 1. Porównanie oceny globalnej jakości akustycznej badanych kościołów przy pomocy wskaźników  $W_{JAS}^*$  i  $W_{JAS}^{**}$  [9]

Lp	Obiekty sakralne	Wskaźniki			Wartości wag						$W_{JAS}^*$	$W_{JAS}^{**}$
		$W_p^*$	$W_{zm}$	$W_b$	tradycyjne			uzyskane z SVD				
					$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_1'$	$\eta_2'$	$\eta_3'$		
1	Św. Sebastiana, Strzelce Wielkie	0,89	0,49	0,67	1	0,5	0,2	0,82	0,32	0,48	<b>0,75</b>	<b>0,75</b>
2	Najśw. Serca Pana Jezusa, Kraków	0,98	0,34	0,6							<b>0,75</b>	<b>0,74</b>
3	Św. Klemensa, Wieliczka	1	0,34	0,49							<b>0,75</b>	<b>0,72</b>
4	O.O. Jezuitów, Kraków	0,91	0,23	0,42							<b>0,65</b>	<b>0,63</b>
5	O.O. Reformatorów, Wieliczka	0,86	0,33	0,48							<b>0,66</b>	<b>0,64</b>
6	Św. Pawła Apostoła, Bochnia	0,11	0,21	0,21							<b>0,15</b>	<b>0,16</b>

Składniki wektora  $u_l$  (zależność (8)) zmieniają się w zależności od obiektu sakralnego. Pomiędzy wektorem  $u_l$  a wektorem  $a_{il}$  (pierwsza kolumna wskaźnikowej macierzy obserwacji  $A$  utworzona przez wskaźnik pogłosowy  $W_p^*$ ) zachodzi zależność [9]:

$$u_l = 0,058 + 0,416 \cdot W_p^* \quad (10)$$

Wstawiając zależność (10) do równania (7), po przekształceniach otrzymano zależności na składniki macierzy  $A^*$  (wartości wskaźników przybliżonych z pierwszej aproksymacji) uzależnione tylko od jednej danej (parametru wejściowego) - wskaźnika pogłosowego  $W_p^*$  określone wzorami (11), (12), (13):

$$W_p' = 0,146 + 0,86W_p^*, \quad (11)$$

$$W_b' = 0,146 + 0,5W_p^*, \quad (12)$$

$$W_{zm}' = 0,146 + 0,33W_p^*. \quad (13)$$

Po wstawieniu zależności (11), (12), (13) do wzoru na wskaźnik globalny  $W_{JAS}^{**}$  (zależność (9)) otrzymano wzór na globalny wskaźnik jakości akustycznej przy niepełnej informacji, będący w funkcji wskaźnika pogłosowego:

$$W_{JAS}^{W_p^*} \cong 0,651 \cdot W_p + 0,1462. \quad (14)$$

Wzór ten wydaje się być bardzo użyteczny, gdy mamy do czynienia z niepełną informacją. Należy zaznaczyć, iż ocena globalna przy pomocy wzoru (14) jest oceną przybliżoną, zależną od przyjętego rzędu aproksymacji macierzy  $A$ , w tym wypadku – pierwszego ( $r=1$ ). Mając informację o czasie pogłosu, obliczamy tylko wskaźnik pogłosowy  $W_p^*$  i na podstawie wzoru (14) wyznaczamy wskaźnik globalny, czyli szacujemy na podstawie jednego parametru - warunki akustyczne wnętrza sakralnego. Dodatkowo mając tą samą niepełną informację – wskaźnik  $W_p^*$ , jesteśmy w stanie na podstawie wyznaczonych wzorów (12), (13) określić przybliżone wartości pozostałych wskaźników takich jak: wskaźnik brzmienia muzyki oraz wskaźnika zrozumiałości mowy danego obiektu.

W tabeli 2. pokazano zastosowanie wzoru (14) do oceny jakości akustycznej dysponując tylko jednym parametrem – wskaźnikiem pogłosowym.

Wartości otrzymanych wyników porównano z innymi wcześniej opracowanymi wzorami na wskaźnik globalny. Z danych zgromadzonych w tabeli 2. można zauważyć, że wzór (14) sprawdza się i daje małe błędy w porównaniu do pozostałych wzorów.

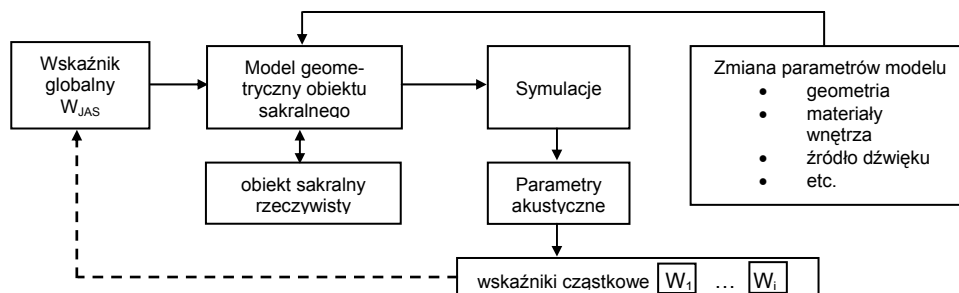
Tabela.2. Porównanie globalnej oceny akustycznej obiektów sakralnych przy użyciu opracowanych zależności [64]

Lp.	Obiekt sakralny	Objętość, m <sup>3</sup>	$W_p^*$	$W_{JAS}^*$	$W_{JAS}$ wagi SVD	$W_{JAS}^{W_p^*}$
1	Św. Sebastiana, Strzelce Wielkie	1102	0,89	<b>0,75</b>	<b>0,75</b>	<b>0,73</b>
2	Najśw. Serca Pana Jezusa, Kraków	2750	0,98	<b>0,75</b>	<b>0,74</b>	<b>0,78</b>
3	Św. Klemensa Wieliczka	6380	1	<b>0,75</b>	<b>0,72</b>	<b>0,80</b>
4	Serca Jezusowego, O.O. Jezuitów, Kraków	9120	0,91	<b>0,65</b>	<b>0,63</b>	<b>0,74</b>
5	O.O. Reformatów, Wieliczka	4455	0,86	<b>0,66</b>	<b>0,64</b>	<b>0,71</b>
6	Św. Pawła Apostoła, Bochnia	22000	0,11	<b>0,15</b>	<b>0,16</b>	<b>0,22</b>

## 5. INWERSJA A WSKAŹNIK GLOBALNY

Przy dokonywaniu przybliżonej oceny globalnej wykorzystać można technikę rozkładu względem wartości szczególnych (Rys.1). Na podstawie badań akustycznych wyznaczane są wskaźniki cząstkowe i ocena globalna jakości akustycznej wnętrza. Problem odwrotny pokazany jest na Rys. 4. Problem inwersji przy ocenie akustycznej wnętrz sakralnych może być przedstawiony następująco: zakładając wartość wskaźnika globalnego, szukane są wartości wskaźników cząstkowych, które zapewnią odpowiednie właściwości akustyczne. Niezbędnym w rozwiązaniu postawionego problemu będzie opracowanie modelu geometrycznego badanego pomieszczenia sakralnego (Rys. 4). Mając model geometryczny moż-

na przeprowadzić badania symulacyjne przy pomocy dostępnego oprogramowania np. RAYNOISE, ODEON itp.



Rysunek 4: Wykorzystanie metody wskaźnikowej przy badaniach symulacyjnych na modelu geometrycznym obiektu sakralnego – problem odwrotny

W wyniku symulacji uzyskuje się parametry akustyczne badanego obiektu, z których wyznaczone są wskaźniki cząstkowe oraz wskaźnik globalny  $W_{JAS}$ . Dysponując modelem pomieszczenia można w bezkosztowy sposób zmieniać parametry modelu tj. geometrię pomieszczenia, materiały powierzchni wnętrza, rozmieszczenie odbiorników i źródła dźwięku, rozmiar powierzchni pochłaniającej odpowiadającej wypełnieniu wiernymi. Zmieniając parametry modelu, można tak dobrać wartości wskaźników cząstkowych, aby dały one założoną wartość wskaźnika globalnego.

Badania te mogą być wykorzystane w celu dokonania adaptacji akustycznej wnętrza sakralnego, który po przeprowadzeniu badań na rzeczywistym obiekcie charakteryzuje się niskim wskaźnikiem globalnym oznaczającym złe warunki akustyczne do spełniania funkcji obiektu. Zastosowanie inwersji przy ocenie metodą wskaźnikową może być wykorzystywane przy projektowaniu nowych wnętrz sakralnych, gdzie zakładając wartość wskaźnika globalnego poszukiwane są wskaźniki cząstkowe określające poszczególne właściwości obiektu. Dalsze badania są związane z opracowaniem zależności na kolejne wskaźniki cząstkowe opisujące klimat akustyczny wnętrza sakralnego a także dopracowanie dotychczas wprowadzonych wskaźników oceny.

## 6. WNIOSKI

W referacie przedstawiono możliwości zastosowania narzędzia matematycznego – rozkładu względem wartości szczególnych (SVD) do analizy wibroakustycznej obiektów budowlanych na przykładzie obiektów sakralnych. Rozkład SVD jest techniką używaną między innymi do redukcji wymiarów macierzy oraz analizy składowych szczególnych. Zastosowanie SVD do oceny jakości akustycznej wnętrza sakralnego stworzyło możliwość analizy wskaźnikowej oceny akustycznej tego typu wnętrz. Uzyskane wagi wskaźników cząstkowych umożliwiły dokonanie przybliżonej oceny globalnej jakości akustycznej wnętrza sakralnego w skali od 0 (właściwości akustyczne złe) do 1 (właściwości bardzo dobre).

Weryfikację zaproponowanej metody przeprowadzono na sześciu rzeczywistych kościołach rzymsko-katolickich. Znalezione przy pomocy rozkładu SVD przybliżone zależności pomiędzy wskaźnikami cząstkowymi są pomocne do dalszych analiz nad oceną tego typu obiektów.

Zaproponowano zastosowanie metody wskaźnikowej do badań symulacyjnych, związanych z adaptacją akustyczną wewnątrz już istniejących lub będących na etapie projektowania. Na podstawie uzyskanych, w drodze symulacji komputerowych na modelu geometrycznym, obliczeń parametrów akustycznych, wyznacza się wskaźniki cząstkowe i globalny. Sformułowano również problem odwrotny, gdzie przy użyciu badań na zamodelowanym obiekcie poszukuje się takich parametrów modelu, które zapewniają poprzez wyznaczone wskaźniki cząstkowe założoną wartość oceny globalnej.

*Praca wykonana została w ramach projektu badawczego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego nr 4 T07C 00830.*

## LITERATURA

- [1] Y. Ando, *Concert Hall Acoustics*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.
- [2] L. Beranek, *Music, Acoustics and Architecture*. R. Kruger Publ. Corp., N. York, 1979.
- [3] Cz. Cempel, *Redukcja zbioru danych w diagnostyce maszyn*, Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Z 4(44), 1980, 571-585.
- [4] Z. Engel, J. Engel, *Zastosowania rozkładu względem wartości szczególnych w badaniach procesów wibroakustycznych*. Materiały konferencyjne XXXIV Ogólnopolskiego Sympozjum „Diagnostyka Maszyn”, Węgierska Górka, 2007, 17-24.
- [5] Z. Engel, K. Kosała, *Index Method of the Acoustic Quality Assessment of Sacral Buildings*, Archives of Acoustics, 32, 3, 2007, 3-22.
- [6] Z. Engel, J. Engel, K. Kosała, J. Sadowski, *Podstawy akustyki obiektów sakralnych, Kraków-Radom*, ITE, 2007.
- [7] Z. Engel, J. Engel, K. Kosała, *The possibilities of application of inverse methods in acoustical analysis of sacral objects*. CD-ROM Proc. of the Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13), Vienna, Austria, July 2-6<sup>th</sup>, 2006.
- [8] A.T. Fürjes, *Applications of inverse method in room acoustics*. Proc. Forum Acusticum, Budapest, Hungary, 29 Aug- 2 Sep, 2377-2380, 2005.
- [9] K. Kosała, *Możliwości zastosowania rozkładu względem wartości szczególnych do analizy właściwości akustycznych obiektów sakralnych*. Mater. Konf. Wibrotech 2007, Warszawa-Jachranka, 29-30.11.2007, Warszawa, PW, 2007, 159-168.
- [10] K. Kosała, *Calculation models for acoustic analysis of sacral objects*. Archives of Acoustics, 2008, (in print).
- [11] K. Kosała, *Global index of the acoustic quality of sacral buildings at incomplete information*. Archives of Acoustics, 2008, 33, 2, 2008, 151-169.
- [12] J. Sadowski, *Akustyka architektoniczna*. PWN. Warszawa, Poznań 1976.

## **METODA KOLOKACYJNA WYZNACZANIA PARAMETRÓW TLUMIENIA DRGAŃ W KONSTRUKCJACH BUDOWLANYCH**

**Andrzej Flaga<sup>1,2</sup>, Jacek Szulej<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Lądowej,  
Al. Jana Pawła II 37/3a, 31-864 Kraków

<sup>2</sup> Politechnika Lubelska, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej  
ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin  
e-mail: {a.flaga, j.szulej}@pollub.pl

---

**Abstract:** *The paper presents the collocation method of determination damping coefficients of structural vibration. Moreover, usage of this method for several different building structures have been presented.*

---

### **1. WSTĘP**

Przy obecnym zapotrzebowaniu na coraz bardziej smukłe konstrukcje (kładki, mosty, maszty), ważne jest prawidłowe rozpoznanie parametrów dynamicznych konstrukcji. Istotną cechą prawidłowo zaprojektowanej budowli jest odpowiedni poziom tłumienia, który jest opisany najczęściej współczynnikami tłumienia drgań (np. parametrem tłumienia  $\beta$ , logarytmicznym dekrementem tłumienia  $\delta$ ). Metoda kolokacyjna [1, 2], oparta na analizie widmowej przebiegów czasowych drgań [3-5] swobodnych układów, pozwala na dokładne określenie wartości tych współczynników. Dzięki temu, już na etapie projektowania można dobrać odpowiednie materiały konstrukcyjne i wypełniające, które zapewnią prawidłową pracę konstrukcji.

Celem pracy jest krótkie przedstawienie metody kolokacyjnej i praktyczne jej zastosowanie w odniesieniu do następujących modeli i konstrukcji budowlanych:

- płyta żelbetowa oparta na dwóch dwuteownikach zamocowanych przegubowo,
- płyta żelbetowa oparta na dwóch dwuteownikach plus styropian i deski, model podparty przegubowo,
- most łukowy w Puławach.

### **2. OPIS METODY**

Metoda kolokacyjna opiera się na analizie widmowej przebiegów czasowych drgań badanych konstrukcji i polega na doborze funkcji aproksymującej. Zastosowana funkcja po-

zwoli na dokładne obliczenie poziomu tłumienia (bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\beta$ ).

Kolejność czynności przy określaniu tłumienia badanej konstrukcji:

Pomiary drgań własnych konstrukcji (stosując: czujniki drogi, akcelerometry), dzięki którym uzyskuje się przebiegi czasowe  $f(t)$ .

Przeprowadzenie analizy spektralnej przebiegów czasowych  $f(t)$  za pomocą FFT (szybkiej transformacji Fouriera), na tej podstawie uzyskano funkcję:

$$F = FFT\{f(t)\} \quad (1)$$

(oraz częstości kołowe drgań własnych  $\omega_i$ , odpowiadające lokalnym ekstremom FFT).

Zakłada się, że drgania badanej konstrukcji są sumą tłumionych drgań harmonicznym o różnych częstotliwościach (tłumienie opisane jest zastępczym modelem wiskotycznym), tak jak w poniższych wzorach:

$$y(t) = \sum_i \{A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t)\}, \quad (\omega_i^*)^2 = (\omega_i)^2 - (\beta_i)^2 \quad (2)$$

gdzie:  $\omega_i$  –  $i$ -ta częstość kołowa drgań własnych nietłumionych,  $A_i$ ,  $B_i$  – ich amplituda,  $\beta_i$  – parametr tłumienia, odpowiadający  $i$ -tej częstości kołowej.

Aproksymacja przebiegów funkcji  $F^2$  funkcją  $Y^2$ , opisaną poniższą zależnością:

$$Y = FFT\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_i \{A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t)\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist} dt \quad (3)$$

Aproksymując metodą kolokacyjną przyjęto następujące założenia:

Punkty charakterystyczne: ekstrema modułów FFT oraz punkty leżące na 0.707 wysokości tych ekstremów,

Wyznaczano następujące parametry:  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\beta_i$  (lub  $\delta_i$ ) (układ równań nieliniowych)

### 3. BADANIA NA MODELACH

#### 3.1. Opis modeli i opis badań

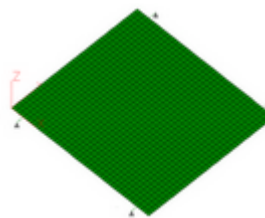
Pomiary drgań swobodnych modeli wykonano przy użyciu sprzętu HBM: akcelerometrów B200, analizatora Spider i programu sterującego Catman 4.0. Dwa badane modele zamocowane były w sposób wolnopodparty. Drgania wymuszano przez uderzenie drewnianą belką.

Pierwszy model składa się z żelbetowej płyty o grubości 7cm i wymiarach 3.52m na 3.84m, opartej na dwuteownikach o wysokości 100mm i wzajemnym rozstawie 3.18m.

Drugi model stworzono przez dodanie styropianu grubości 4cm i desek grubości 2.5 cm do modelu pierwszego. Model rzeczywisty i mesowy przedstawiają Rys. 1 i 2.

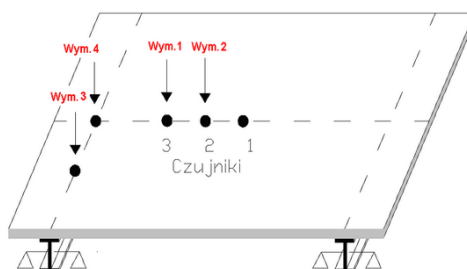


Rysunek 1: Model nr 1



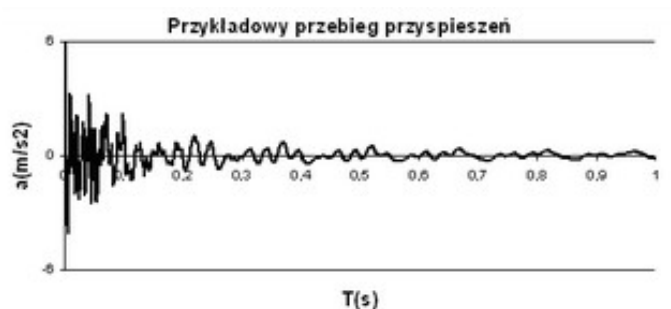
Rysunek 2: Model MES modelu nr 1

Na każdym modelu zamocowano trzy akcelerometry (w 1/4, 3/8 i 1/2 rozpiętości dłuższego boku w osi modelu). Wykonano pomiary przyspieszeń od wymuszeń w czterech miejscach. Miejsce zamocowania czujników i miejsca wymuszenia pokazuje Rys. 3.

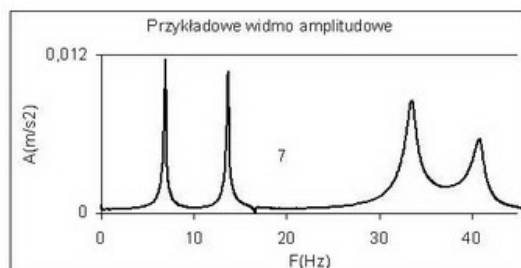


Rysunek 3: Rozmieszczenie czujników i miejsca wymuszeń.

Wynikami pomiarów są przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 1200 Hz o szerokości pasma 150 Hz dla każdego z dwóch modeli (Rys.4). Na podstawie przebiegów czasowych wykonano analizę widmową drgań – programem Catman 4.0, FFT: Auto Power Spectrum – Amplitudowe (Rys.5). Częstotliwości drgań własnych uzyskane z badań zweryfikowano przez obliczenia programem Algor (program MES), który potwierdził wyniki badań (Tab.1).



Rysunek 4: Przykładowy przebieg czasowy



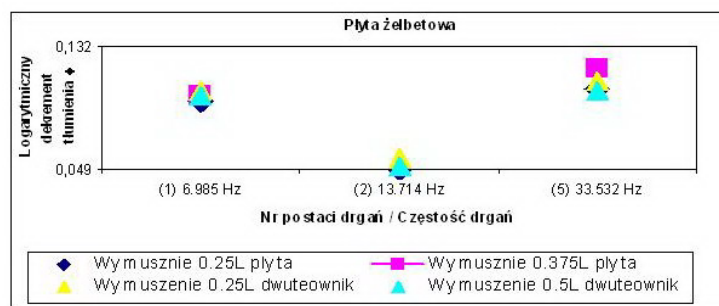
Rysunek 5: Przykładowe widmo amplitudowe

Tabela 1: Porównanie uzyskanych częstotliwości

Model	f (Hz) (badania)	f (Hz) (Algor)	Numer / forma drgań
Nr 1	6.98	6.83	1) zginanie symetryczne
	13.71	12.61	2) zginanie antysymetryczne
	33.53	36.99	5) zginanie i skręcanie sym.
	40.77	41.29	6) zginanie i skręcanie sym.
Nr 2	7.13	7.10	1) zginanie symetryczne
	13.57	12.56	2) zginanie antysymetryczne
	32.32	37.61	5) zginanie i skręcanie sym.

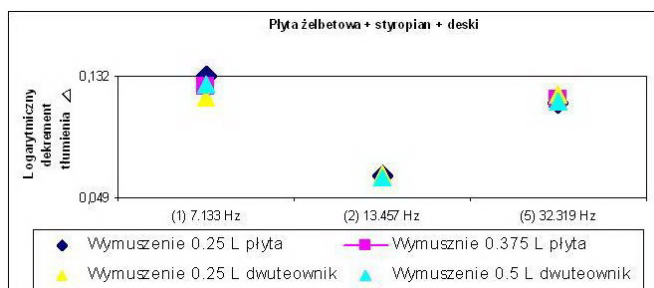
### 3.2. Wyznaczanie parametrów tłumienia drgań

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia obliczono dla danych otrzymanych z czujnika nr 3 (ze względu na dużą ilość wyników). W obliczeniach uwzględniano amplitudy pików widm nie odbiegające od wartości pików maksymalnych o więcej niż 30 %, co spowodowało małą rozbieżność wyników. Uwzględniano widma z nie więcej niż trzema częstotliwościami, czyli otrzymywano maksymalnie dziewięć równań nieliniowych. Wyniki dla dwóch modeli przedstawia Rys. 6 i 7.



Rysunek 6: Logarytmiczny dekrement tłumienia dla modelu nr 1

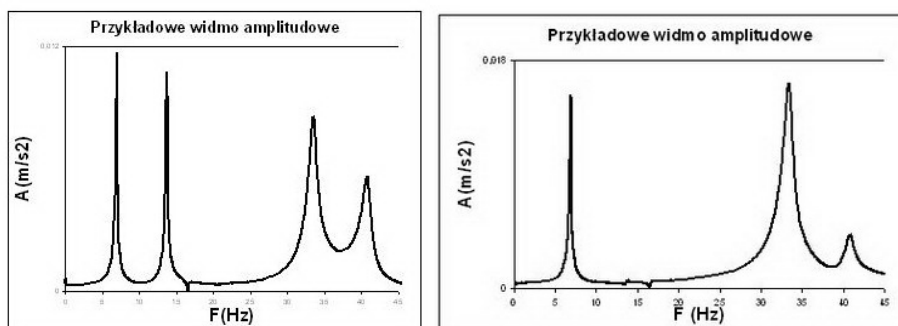




Rysunek 7: Logarytmiczny dekrement tłumienia dla modelu nr 2

Przez dodanie warstwy styropianu i desek uzyskano wzrost wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia o 26% dla pierwszej częstotliwości, 23% dla drugiej częstotliwości i 7% dla piątej częstotliwości.

Określono również wpływ nieuwzględnianych częstotliwości (małe amplitudy w widmie). Rysunek 8 i 9 pokazuje częstotliwości o małych amplitudach (ostatnie na wykresach), których wpływ określano obliczając wartości tłumienia pozostałych częstotliwości.



Rysunek 8, 9: Widma z częstotliwością o małej amplitudzie

Częstości te powodowały rozbieżności w otrzymywanych wartościach logarytmicznego dekrementu tłumienia dochodzące nawet do 34%.

#### 4. BADANIA NA MOŚCIE ŁUKOWYM W PUŁAWACH

##### 4.1. Opis modeli i opis badań

Badania przeprowadzono na przęśle głównym mostu (długości 212 m). Most składa się z dwóch stalowych łuków, żelbetowo – stalowego pomostu o szerokości 22m i prętów stalowych łączących pomost z łukami. Pomost zbudowany jest ze stalowych blachownic, na których spoczywa żelbetowa płyta a na niej warstwy izolacyjne i jezdne. Rys. 10 przedstawia badany most, zaś Rys. 11 pokazuje model MES badanego obiektu.

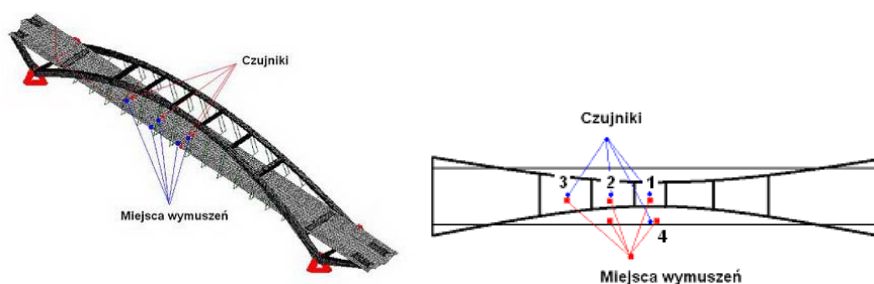


Rysunek 10. Most w Puławach



Rysunek 11. Model MES mostu w Puławach

Na moście zamocowano akcelerometry w trzech miejscach w osi przęsła (w  $1/4$ ,  $3/8$  i  $1/2$ ) i w  $1/2$  długości przęsła przy krańcu pomostu. Wykonano pomiary przyspieszeń od wymuszeń w pięciu miejscach. Drgania konstrukcji wywoływano przez przejazd samochodu ciężarowego po drewnianym progu. Miejsce zamocowania czujników i miejsca wymuszenia pokazuje Rys. 12.

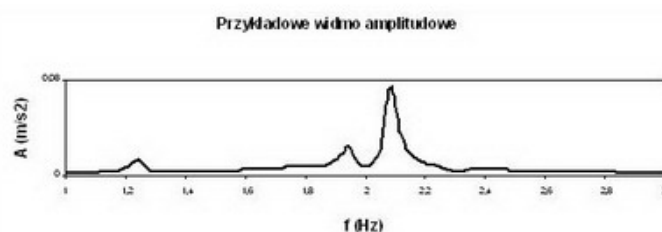


Rysunek 12: Rozmieszenie czujników i miejsca gdzie przeprowadzano wymuszenia.

Analogicznie do modeli omówionych wcześniej, uzyskano przebiegi drgań mostu (Rys. 13), które poddano obróbce widmowej (Rys. 14). Uzyskane częstotliwości zweryfikowano w programie Algor. Porównanie kilku pierwszych częstotliwości uzyskanych z badań i programu Algor, zostało pokazane w Tabeli 2.



Rysunek 13: Przykładowy przebieg czasowy



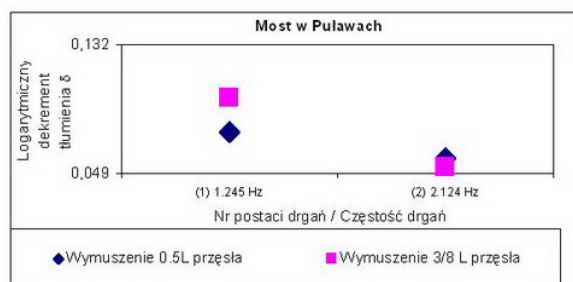
Rysunek 14: Przykładowe widmo amplitudowe

Tabela 2: Porównanie uzyskanych częstotliwości

Nr post. drgań	$f_i$ (badania) [Hz]	$f_i$ (Algor) [Hz]	Opis formy drgań
1	0.81	0.68	Drgania giętne pionowe
4	1.24	1.27	Drgania skrętne pomostu, giętne poziome łuku
5	1.64	1.34	Drgania giętne pionowe
6	1.68	1.38	Drgania giętne pionowe

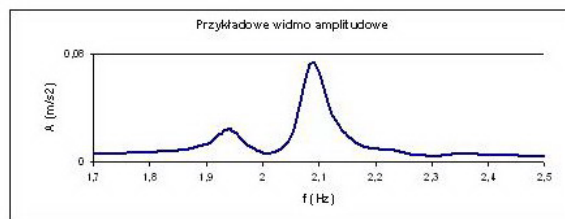
#### 4.2. Wyznaczanie parametrów tłumienia drgań

Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia obliczono dla danych otrzymanych z czujnika nr 4. Przy określaniu parametrów tłumienia metodą kolokacyjną zastosowano zasady stosowane przy określaniu poziomu tłumienia modeli, omówione wcześniej. Częściowe wyniki przedstawia Rys. 15.



Rysunek 15: Wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia dla mostu w Puławach

Określono również wpływ nieuwzględnianych częstotliwości (częstotliwości o małej amplitudzie w widmie). Przykładową sytuację ilustruje Rys. 16.



Rysunek 16: Widmo z częstotliwością o małej amplitudzie

Częstości te powodowały rozbieżności w otrzymywanych wartościach logarytmicznego dekrementu tłumienia dochodzące nawet do 6%. Z powodu badań na moście w Puławach, przeprowadzonych kilka dni wcześniej, kompletne wyniki zostaną przedstawione na konferencji.

## WNIOSKI

- Metoda kolokacyjna pozwala określać dokładnie poziom tłumienia w badanych modelach i konstrukcjach, bez względu na miejsce wymuszenia, jeśli uwzględniamy w obliczeniach te częstości, których piki nie różnią się o więcej niż ok. 30 %.
- Metoda kolokacyjna pozwala określić wzrost tłumienia drgań poszczególnych częstotliwości, również dla modeli o złożonej budowie (pozwala określić wzrost tłumienia od dodanych materiałów). Dodanie do modelu styropianu i desek zwiększyło poziom tłumienia od 7 do 26% (dla trzech badanych częstości).
- Przy określaniu parametrów tłumienia metodą kolokacyjną, trzeba uwzględnić wpływ częstotliwości o małej amplitudzie na częstotliwości o dużych amplitudach w widmie, gdyż powodują one duże rozbieżności w uzyskanych wynikach (w modelach nawet do 34%).

*Badania i uzyskane wyniki są częścią grantu promotorskiego.*

## LITERATURA

- [1] Flaga A., Michałowski T. „Charakterystyki tłumienia drgań lekkich kładek wiszących i podwieszonych”, *Inżynieria i Budownictwo* nr 9, 2000, 495-497.
- [2] Szulej J. „Problemy wyznaczania współczynnika tłumienia metodą kolokacyjną”, Konferencja Doktorantów-Politechnika Śląska, październik 2006 r.
- [3] Notes R., Enochson L. „Analiza numeryczna szeregów czasowych”, WNT, Warszawa, 1978.
- [4] Lyons R.G. „Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, WKŁ, Warszawa, 1999.
- [5] Zieliński T. „Od teorii do cyfrowego przetwarzania sygnałów”, AGH Kraków, 2002.

## ZAGADNIENIA OPTYMALIZACJI PARAMETRÓW WIELOKROTNYCH STROJONYCH TŁUMIKÓW MASOWYCH

Andrzej Flaga<sup>1,2</sup>, Piotr Wielgos<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Katedra Mechaniki Budowli, Politechnika Lubelska  
ul. Nadbystrzycka 40 20-618 Lublin  
e-mail: {a.flaga, p.wielgos}@pollub.pl

<sup>2</sup> Laboratorium Inżynierii Wiatrowej, Politechnika Krakowska  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

---

**Abstract:** *The paper deals with the problem of parameters optimizations of multiple tuned mass dampers (MTMD) for multi-degree-freedom-system. Theoretical considerations have been illustrated by numerical examples.*

---

### 1. WPROWADZENIE

Wielokrotne strojone tłumiki masowe w ostatnich latach znajdują coraz szersze zastosowanie w konstrukcjach budowlanych wypierając rozwiązania oparte na tłumikach pojedynczych. W związku z tym istotne staje się poszukiwanie optymalnych parametrów takiego typu tłumików.

Z praktyki inżynierskiej wiadomo, że obliczone częstotliwości drgań własnych ustrojów budowlanych różnią się od rzeczywiście pomierzonych częstotliwości na zrealizowanych obiektach. Poza tym w wyniku starzenia się konstrukcji np. pod wpływem korozji lub też przy zmianie masy wynikającej ze zmiany obciążeń grawitacyjnych ustroju następuje zmiana częstotliwości drgań własnych obiektu (rozstrojenie konstrukcji w stosunku do wartości otrzymanych z modelu obliczeniowego). Dlatego też, stosowanie wielokrotnych tłumików masowych rozstrojonych nieznacznie w stosunku do częstotliwości rezonansowej obiektu może przynieść lepsze efekty niż pojedynczy tłumik nastrojony dokładnie na częstotliwość rezonansową.

W analizie drgań często wykorzystuje się podejście modalne, które pozwala na znaczną redukcję dynamicznych stopni swobody ustroju. Jest to możliwe tylko wtedy gdy równania ruchu we współrzędnych głównych są rozseparowane. Oznacza to, że macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  musi być proporcjonalna do macierzy mas  $\mathbf{M}$  i macierzy sztywności konstrukcji  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (1)$$

gdzie symbolami  $\alpha; \beta$  oznaczono współczynniki proporcjonalności.

Struktura macierzy  $\mathbf{C}$  podana wzorem (1) z reguły nie może być zachowana jeżeli na konstrukcji zainstalowane zostaną tłumiki drgań (masowe lub bezmasowe elementy tłumiące). Należy więc poszukać alternatywnej metody rozwiązania równań ruchu z nieproporcjonalną macierzą tłumienia  $\mathbf{C}$ . Wykorzystane zostaną w tym celu transmitancje mechaniczne.

W niniejszej pracy zostały przedstawione wyniki symulacji numerycznych konstrukcji prętowych z pojedynczymi (*TMD- tuned mass damper*) oraz wielokrotnymi strojonymi masowymi tłumikami drgań (*MTMD-multiple tuned mass dampers*). Celem pracy jest przedstawienie metody wyznaczania transmitancji mechanicznych [1, 2], oraz zastosowanie transmitancji do oceny skuteczności działania wielokrotnych tłumików masowych. Została także przedstawiona funkcja celu przy zagadnieniach optymalizacji parametrów wielokrotnych strojonych tłumików masowych. Na jej podstawie określono optymalne parametry strojonych tłumików masowych dla przykładowej konstrukcji. Przeprowadzono także analizę wrażliwości funkcji celu w zależności od zmian parametrów tłumików.

## 2. METODA WYZNACZANIA TRANSMITANCJI MECHANICZNEJ USTROJÓW ZŁOŻONYCH Z RÓŻNYCH ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH

Podstawowe macierzowe równanie ruchu :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{p} \quad (2)$$

gdzie:  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  - odpowiednio diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności;  $\mathbf{y}$  - wektor przemieszczeń;  $\mathbf{p}$  - wektor obciążeń.

Rozwiązanie macierzowego równania ruchu można przedstawić w postaci [1]:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{h}(\tau)\mathbf{p}(t-\tau)d\tau \quad (3)$$

gdzie:  $\mathbf{y}(t)$  - wektor odpowiedzi impulsowych;  $\mathbf{p} = [0, 0, \dots, 0, \delta_k(\tau), 0, \dots, 0]^T$  - wektor obciążeń;  $\delta_k(\tau)$  - delta Diraca.

Transmitancja mechaniczna jest macierzą  $\mathbf{H}(f)$ , której element  $H_{ik}(f)$  jest transformacją Fouriera odpowiedzi impulsowej  $h_{ik}(\tau)$  :

$$H_{ik}(f) = \int_0^{\infty} h_{ik}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (4)$$

gdzie odpowiedź impulsowa  $h_{ik}(\tau)$  jest  $i$ -tą odpowiedzią układu na  $k$ -te wymuszenie w postaci jednostkowej funkcji impulsowej przyłożonej w chwili początkowej  $\tau = 0$ .

Po wykonaniu transformacji Fouriera na równaniu ruchu (2) otrzymamy:

$$(\mathbf{K} - 4\pi^2 f^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{C})\mathbf{H}_k = \mathbf{1}_k \quad (5)$$

gdzie  $H_{ik} = [H_{1k}, \dots, H_{ik}, \dots, H_{nk}]^T$ . W ogólności  $H_{ik}$  jest wielkością zespoloną i może być przedstawiona w postaci:

$$\begin{aligned}
|H_{ik}| &= \sqrt{(\operatorname{Re} H_{ik})^2 + (\operatorname{Im} H_{ik})^2}, \\
H_{ik} &= |H_{ik}| e^{j\Theta_{ik}} = \operatorname{Re} H_{ik} + j \operatorname{Im} H_{ik}, \\
\arg H_{ik} &= \Theta_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} H_{ik}}{\operatorname{Im} H_{ik}}
\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie:  $|H_{ik}|, \Theta_{ik}$  - odpowiednio moduł transmitancji, argument transmitancji.  
Jeżeli przyjmiemy oznaczenie:

$$\mathbf{G}(f) = \mathbf{K} - 4\pi^2 f^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{C} = \operatorname{Re} \mathbf{G} + j \operatorname{Im} \mathbf{G} \tag{7}$$

uzyskamy równanie:

$$\operatorname{Re} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k - \operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Im} \mathbf{H}_k + j [\operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k + \operatorname{Re} \mathbf{G} \operatorname{Im} \mathbf{H}_k] = \mathbf{1}_k \tag{8}$$

a po rozbiciu na dwa równania:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k - \operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Im} \mathbf{H}_k &= \mathbf{1}_k \\
\operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k + \operatorname{Re} \mathbf{G} \operatorname{Im} \mathbf{H}_k &= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{9}$$

Realizując wymuszenia jednostkowymi impulsami kolejno we wszystkich wejściach  $k$  uzyskujemy pełną macierz transmitancji  $\mathbf{H}(f)$ :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \mathbf{H}_k &= \left\{ \operatorname{Re} \mathbf{G} + \operatorname{Im} \mathbf{G} [\operatorname{Re} \mathbf{G}]^{-1} \operatorname{Im} \mathbf{G} \right\}^{-1} \mathbf{1}_k \\
\operatorname{Im} \mathbf{H}_k &= [\operatorname{Re} \mathbf{G}]^{-1} \operatorname{Im} \mathbf{G} \operatorname{Re} \mathbf{H}_k
\end{aligned} \tag{10}$$

### 3. RÓWNANIA RUCHU ZŁOŻONYCH UKŁADÓW DYSKRETYCH

Macierze  $\mathbf{M}; \mathbf{C}; \mathbf{K}$  występujące w równaniu (2) mogą być przedstawione jako sumy macierzy dwóch podstruktur – konstrukcji głównej i tłumików. Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  nie spełnia przy tych założeniach równania (1). Równanie ruchu (2) przyjmie teraz postać:

$$(\mathbf{M}_k + \mathbf{M}_t) \ddot{\mathbf{y}} + (\mathbf{C}_k + \mathbf{C}_t) \dot{\mathbf{y}} + (\mathbf{K}_k + \mathbf{K}_t) \mathbf{y} = \mathbf{p} \tag{11}$$

gdzie:  $\mathbf{M}_k; \mathbf{C}_k; \mathbf{K}_k$  – diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności dla konstrukcji głównej;  $\mathbf{M}_t; \mathbf{C}_t; \mathbf{K}_t$  – diagonalna macierz mas, macierz tłumienia, macierz sztywności dla dodatkowo zainstalowanych *MTMD*.

Jeżeli  $m$  oznacza liczbę dynamicznych stopni swobody układu podstawowego,  $n$  - liczbę dołączonych tłumików, macierze  $\mathbf{M}_k; \mathbf{C}_k; \mathbf{K}_k; \mathbf{M}_t; \mathbf{C}_t; \mathbf{K}_t$  przyjmą następującą postać:

$$\mathbf{M}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{t,n,n} \end{bmatrix}; \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{k,m,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{0}_{n,n} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{K}_{k,m,m} = \sum_i^m \mathbf{A}_i^e k_{k,i} \mathbf{A}_i^{eT}; \mathbf{C}_{k,m,m} = \sum_i^m \mathbf{A}_i^e c_{k,i} \mathbf{A}_i^{eT} \tag{13}$$

$$\mathbf{M}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k,m} & \mathbf{0}_{m,n} \\ \mathbf{0}_{n,m} & \mathbf{M}_{t,n,n} \end{bmatrix}; \mathbf{K}_t = \sum_i^n \mathbf{A}_i^t k_{t,i} \mathbf{A}_i^{tT}; \mathbf{C}_t = \sum_i^n \mathbf{A}_i^t c_{t,i} \mathbf{A}_i^{tT} \quad (14)$$

gdzie:  $k_{k,i}$  - element macierzy sztywności elementu konstrukcji związany z  $i$ -tym stopniem swobody;  $c_{k,i}$  - element macierzy tłumienia elementu konstrukcji związany z  $i$ -tym stopniem swobody;  $k_{t,i}$  - sztywność  $i$ -tego tłumika;  $c_{t,i}$  - tłumienie  $i$ -tego tłumika;  $\mathbf{A}_i^e$ ;  $\mathbf{A}_i^t$  - wektor połączeń (alokacji) elementów konstrukcji (tłumików).

#### 4. ZAGADNIENIA OPTIMALIZACJI TŁUMIÓW

##### 4.1. Parametry strojonych tłumików masowych

Przy doborze parametrów strojonych tłumików masowych musimy wziąć pod uwagę następujące parametry bezwymiarowe określające zastosowany tłumik:

1. Ułamek tłumienia krytycznego (stopień tłumienia)  $\xi_t = c_t / c_{krt}$ ,  
 $c_{krt} = 2m_t 2\pi f_t$  - gdzie:  $c_t$  oraz  $c_{krt}$  - tłumienie tłumika oraz tłumienie krytyczne tłumika;  $m_t$  - masa tłumika;  $f_t$  - częstotliwość drgań własnych tłumika.
2. Nastrojenie tłumika:  $\delta = f_t / f_1$ .
3. Masa względna tłumika:  $\mu_p = m_t / m_p$ ,  $\mu = m_t / M_k$  - gdzie:  $m_p$  - masa porównawcza,  $M_k$  - masa uogólniona lub masa całej konstrukcji przy sprowadzeniu układu do jednego stopnia swobody.

W kilku pracach zostały podane ściśle wzory na optymalne nastrojenie tłumika  $\delta$ , oraz stopień tłumienia tłumika  $\xi_t$ . Najbardziej znane są wzory Den Hartoga [3] wyprowadzone dla układu o dwu stopniach swobody (konstrukcja oraz tłumik) bez tłumienia konstrukcji głównej. Optymalna wartość nastrojenia tłumika wg [3] wynosi:

$$\delta = \frac{1}{1 + \mu} \quad (15)$$

Optymalny parametr tłumienia tłumika dla nastrojenia optymalnego:

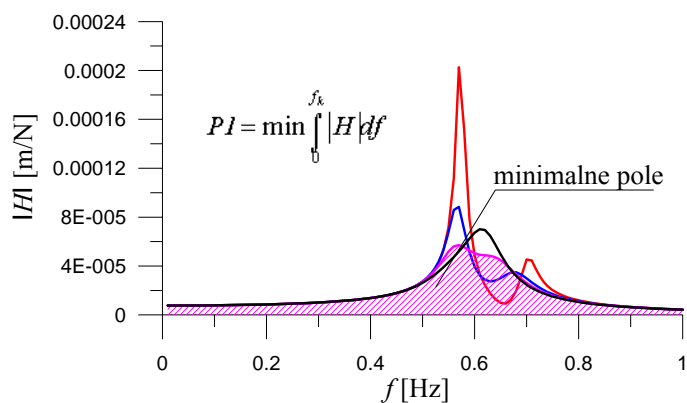
$$\xi_{t,opt} = \sqrt{\frac{3 \cdot \mu}{8 \cdot (1 + \mu)^3}} \quad (16)$$

##### 4.2. Określenie funkcji celu oraz analiza wrażliwości

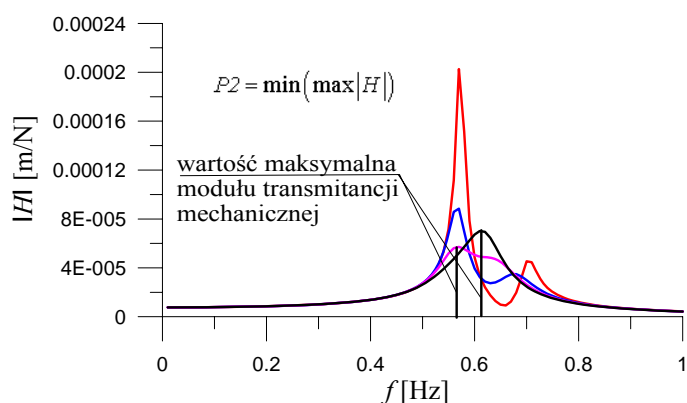
W celu doboru parametrów strojonych tłumików masowych pojedynczych czy wielokrotnych można przeprowadzić analizę wrażliwości zmian funkcji celu na zmiany wartości parametrów tłumików. W tym celu wykorzystana zostanie transmitancja mechaniczna. Założono dwie postacie kryterium doboru parametrów tłumików (funkcje celu).

1. Wartość minimalna całki oznaczonej z modułu określonej transmitancji mechanicznej (wzmocnienia układu) przypisanej danemu punktowi ustroju (Rys. 1):



Rysunek 1: Schemat do określania optymalnych parametrów tłumika funkcja  $P1$ 

2. Wartość minimalna z maksymalnych wartości modułu określonej transmitancji mechanicznej przypisanej danemu punktowi ustroju w przyjętym przedziale częstotliwości drgań (Rys. 2):

Rysunek 2: Schemat do określania optymalnych parametrów tłumika funkcja  $P2$ 

Aby wyrazić w sposób liczbowy wrażliwość funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$  na zmiany parametrów tłumików obliczono współczynniki wrażliwości wg wzoru:

$$w1 = \frac{\Delta P1}{\Delta p_i}, w2 = \frac{\Delta P2}{\Delta p_i}, \quad (17)$$

gdzie:  $\Delta P1, \Delta P2$  - mała zmiana wartości funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$ ,  $\Delta p_i$  - mała zmiana  $i$ -tego parametru.

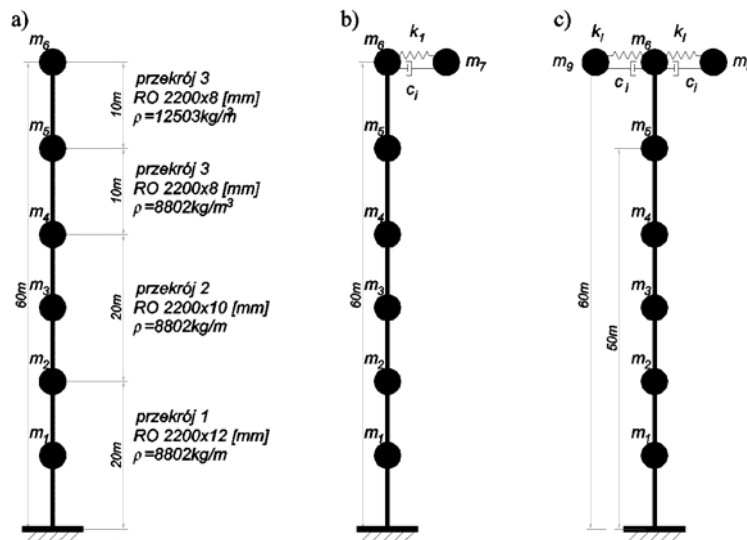
## 5. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Do analizy przyjęto komin stalowy o wysokości 60 m (Rys. 3). Macierze mas i sztywności konstrukcji wyznaczono modelując komin jako układ z masami skupionymi o 6 stopniach

swobody. Współczynniki tłumienia konstrukcji przyjęto na podstawie literatury [4, 5] logarytmiczny dekrement tłumienia  $\Delta_k = 0.063$  oraz ułamek tłumienia krytycznego  $\zeta_k = 0.01$ . Przyjęto założenie, że  $\zeta_k$  jest jednakowy dla 1 i 2 postaci drgań. Nie implikuje to poważnych błędów przy wyznaczaniu transmitancji przy wyższych częstotliwościach drgań własnych gdyż konstrukcja jest jednomateriałowa.

Częstotliwości drgań własnych ustroju bez zainstalowanych tłumików wyznaczono rozwiązując zagadnienie własne. Pierwsze trzy częstotliwości drgań własnych ustroju są równe:  $f_1 = 0.6296$  Hz,  $f_2 = 3.4278$  Hz,  $f_3 = 9.0741$  Hz. Parametry strojonych masowych tłumików drgań optymalizowano tak aby skutecznie tłumili wymuszenia z zakresie pierwszej częstotliwości drgań własnych  $f_1$ . Przyjęto do rozważań dwa przypadki rozmieszczenia tłumików:

1. Pojedynczy tłumik o masie  $m_7$  umieszczony na wysokości 60 m (Rys. 3b);
2. Dwa tłumiki o masach  $m_8 = m_9$ ;  $m_8 + m_9 = m_7$  umieszczone na wysokości 60 m (Rys. 3c).



Rysunek 3: Schemat geometryczny komina: a) bez tłumików, b) pojedynczy tłumik na wysokości 60 m, c) dwa tłumiki na wysokości 60 m

Dla obu przypadków macierz  $C_i$  została zbudowana w sposób bezpośredni,  $C_k$  - w sposób pośredni, z wykorzystaniem modelu tłumienia Rayleigha (1). Wyznaczono szereg transmitancji konstrukcji głównej z zainstalowanymi tłumikami (pojedynczym na wysokości 60 m oraz dwoma tłumikami na wysokości 60 m).

### 5.1. Przypadek 1 – pojedynczy strojony tłumik masowy

Dla pierwszego przypadku optymalizowano dwa parametry  $\xi_t$  oraz  $\delta$  przy ustalonym trzecim parametrze  $\mu$ . Zakres zmienności tłumienia wynosił  $\xi_t = (0, 0.005, \dots, 0.25)$  zaś zakres zmienności nastrojenia  $\delta = (0.900; 0.905, \dots, 1.100)$ . Obliczenia przeprowadzono dla

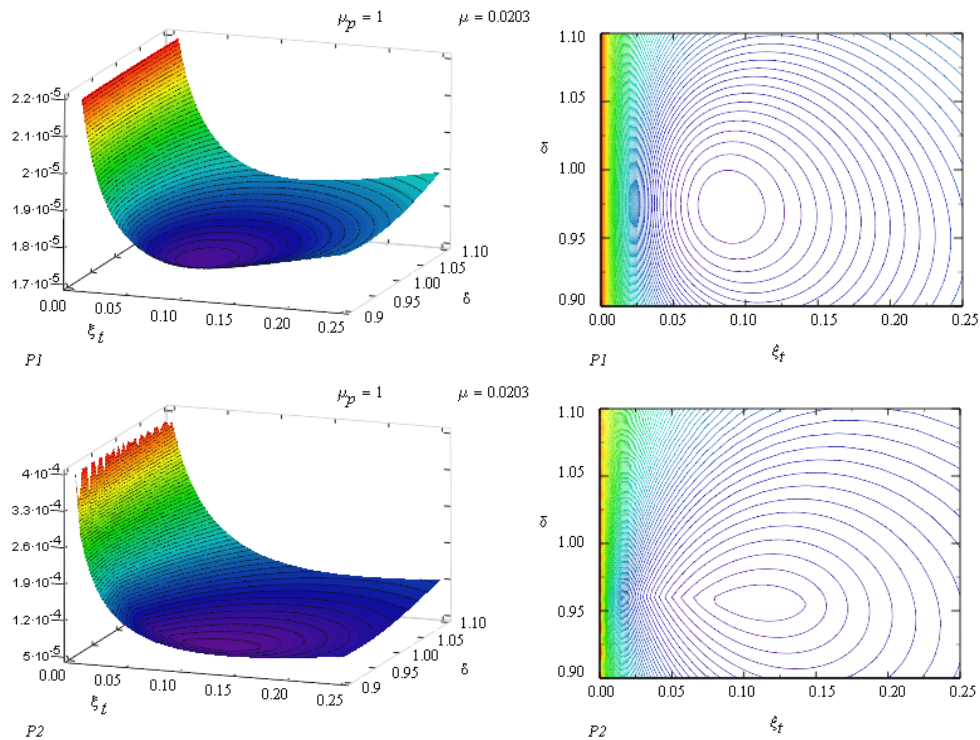
kilku stosunków masy tłumika do masy porównawczej  $m_p=300\text{kg}$  :  $\mu_p = (0.2; 0.5; 0.8; 1.0)$ . Na rysunkach podano także masę względną  $\mu = m_t / M_k$  gdzie  $M_k=14770\text{ kg}$ .

Jako kryterium (funkcję celu) przyjęto funkcję  $P1$  oraz  $P2$  na wysokości 60 m odniesione do masy  $m_6$  tj. związanej z modułem transmitancji mechanicznej  $|H_{66}(f)|$  w zakresie częstotliwości  $f = 0..1\text{Hz}$ .

Na Rys. 4 przedstawiono wykresy powierzchniowe funkcji celu  $P1$ ,  $P2$ , zaś na Rys. 5 rozkład powierzchniowy współczynników wrażliwości. Z wykresów widać, iż funkcje celu w większym stopniu są wrażliwe na zmianę parametru  $\xi_t$  niż parametru  $\delta$ .

W Tabelicy 1. zestawiono optymalne parametry tłumika jednokrotnego przy różnych proporcjach mas  $\mu_p$  z porównaniem do wartości otrzymanych ze znanych wzorów Den Hartoga.

Na Rys. 6 przedstawiono wykres modułu transmitancji  $|H_{66}(f)|$  na wysokości 60m dla optymalnego nastrojenia tłumików otrzymanych z funkcji  $P1$  oraz  $P2$  przy  $\mu_p=1.0$ .



Rysunek 4: Przykładowe wartości funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$  przy  $\mu_p=1,0$

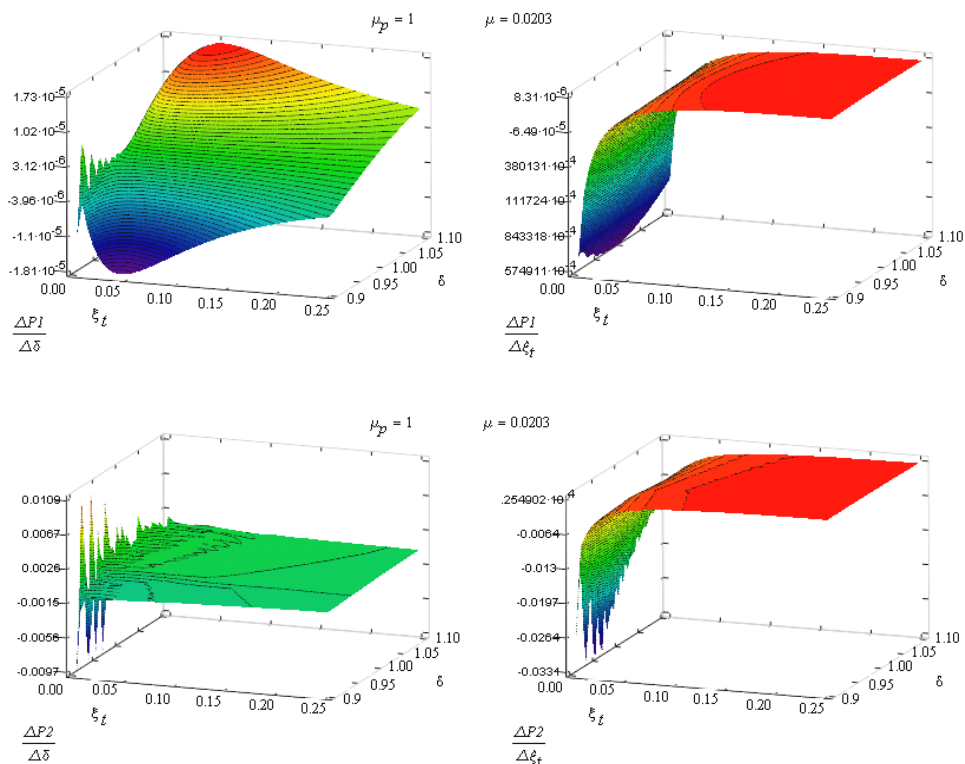
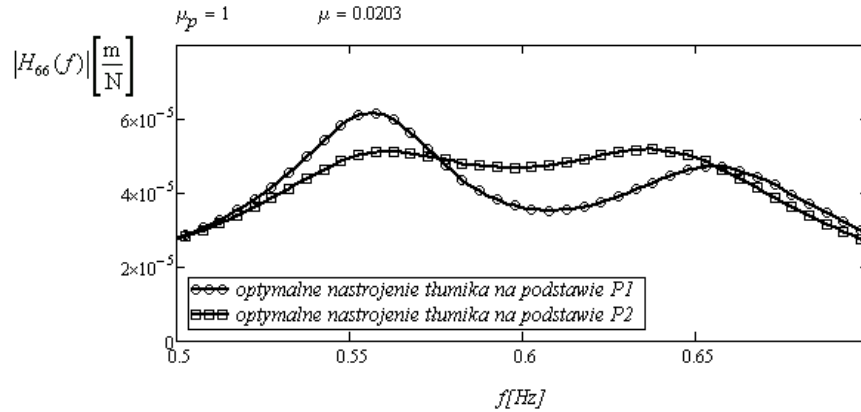
Rysunek 5: Rozkład powierzchniowy w1,w2 funkcji celu P1 oraz P2 przy  $\mu_p=1,0$ 

Tabela 1: Wartości optymalnego nastrojenia pojedynczego tłumika

$\mu_p$	$\mu$	DEN HARTOG		FUNKCJA CELU P1			FUNKCJA CELU P2		
		$\delta$	$\xi_t$	$\delta$	$\xi_t$	wartość P1	$\delta$	$\xi_t$	wartość P2
$m_t/m_p$	$m_t/M_k$	[-]	[-]	[-]	[-]	[Hz m/N]	[-]	[-]	[m/N]
0,2	4,062E-03	0,996	0,039	0,985	0,040	2,000E-05	0,980	0,050	1,021E-04
0,5	1,016E-02	0,990	0,061	0,980	0,060	1,850E-05	0,970	0,080	7,032E-05
0,8	1,625E-02	0,984	0,076	0,975	0,080	1,763E-05	0,960	0,100	5,764E-05
1	2,031E-02	0,980	0,085	0,975	0,085	1,720E-05	0,955	0,115	5,184E-05



Rysunek 6: Wykres  $|H_{66}(f)|$  na wys. 60m dla optymalnego nastrojenia tłumika i  $\mu_p=1,0$

## 5.2. Przypadek 2 – dwa strojone masowe tłumiki drgań

Dla drugiego przypadku optymalizowano dwa parametry  $\delta_1$  oraz  $\delta_2$  (nastrojenie tłumików na pierwszą częstotliwość drgań własnych ustroju) przy ustalonych parametrach  $\mu$  oraz  $\xi_i$ . Zakres zmienności nastrojenia wynosił  $\delta_1, \delta_2 = (0,900; 0,905, \dots, 1,100)$  zaś ułamek tłumienia krytycznego  $\xi_i = (0,04; 0,06; 0,08; 0,085)$ . Obliczenia przeprowadzono dla kilku stosunków mas tłumików do masy porównawczej  $m_p=150$  kg  $\mu = (0,2; 0,5; 0,8; 1,0)$ . Na rysunkach podano także masę względną  $\mu = m_i / M_k$  gdzie  $M_k=14770$  kg

Jako kryterium (funkcję celu) przyjęto funkcję  $P1$  oraz  $P2$  na wys. 60 m odpowiadającą  $|H_{66}(f)|$  w zakresie częstotliwości  $f = 0..1\text{Hz}$ .

Na Rys. 7 przedstawiono wykresy powierzchniowe funkcji celu  $P1$ ,  $P2$ , zaś na Rys. 8 rozkład powierzchniowy współczynników wrażliwości  $w1$ ,  $w2$ . Z wykresów widać, iż funkcje celu są jednakowo wrażliwe na zmianę parametru  $\delta_1$  oraz  $\delta_2$ .

W Tabelicy 2. zestawiono optymalne parametry tłumików przy różnych proporcji mas  $\mu_p$ .

Na Rys. 9 przedstawiono wykres modułu transmitancji  $|H_{66}(f)|$  na wysokości 60 m dla optymalnego nastrojenia tłumików otrzymanych z funkcji  $P1$  oraz  $P2$  przy  $\mu_p=1,0$ .

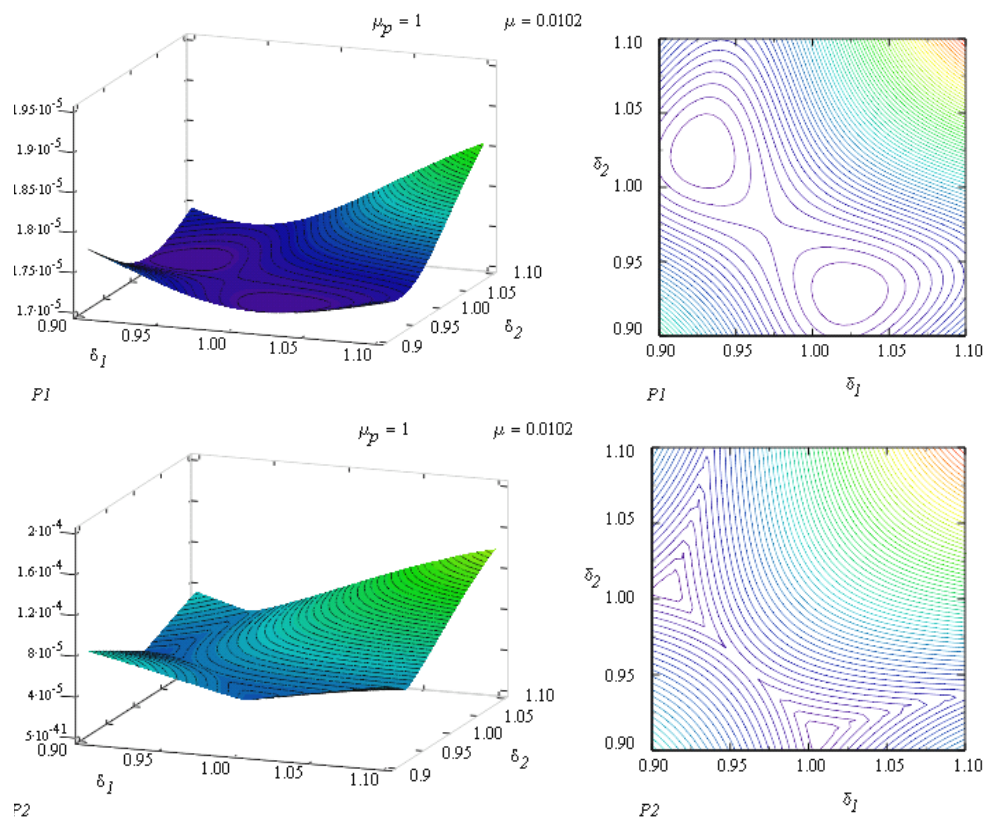
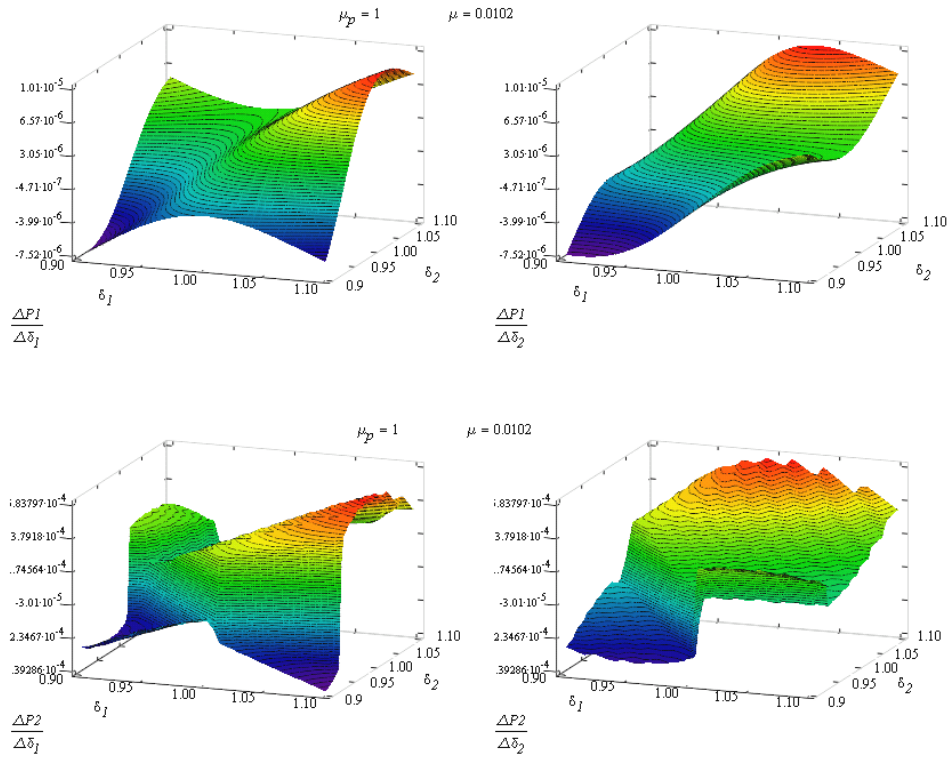
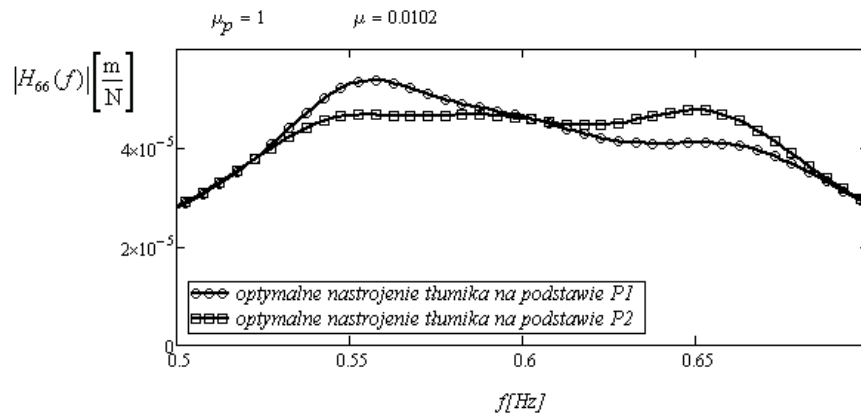
Rysunek 7: Przykładowe wartości funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$  przy  $\mu_p=1,0$ ;  $\xi_i=0,85$ 

Tabela 2: Wartości optymalnego nastrojenia tłumików

$\mu_p$	$\mu$	TŁUMIENIE		FUNKCJA CELU $P1$		FUNKCJA CELU $P2$			
		$\xi_1$	$\xi_2$	$\delta_1$	$\delta_2$	wartość $P1$	$\delta_1$	$\delta_2$	wartość $P2$
$m_t/m_p$	$m_t/M_k$	[-]	[-]	[-]	[-]	[Hz m/N]	[-]	[-]	[m/N]
0,2	4,062E-03	0,040	0,040	1,010	0,965	1,996E-05	1,005	0,960	9,224E-05
0,5	1,016E-02	0,060	0,060	1,020	0,950	1,843E-05	1,010	0,940	6,385E-05
0,8	1,625E-02	0,080	0,080	1,020	0,940	1,759E-05	1,005	0,920	5,281E-05
1	2,031E-02	0,085	0,085	1,025	0,930	1,713E-05	1,005	0,910	4,767E-05

Rysunek 8 Rozkład powierzchniowy  $w_1, w_2$  funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$  przy  $\mu_p=1,0$ ;  $\xi_i=0,85$ Rysunek 9: Wykres  $|H_{66}(f)|$  dla optymalnego nastrojenia tłumików przy  $\mu_p=1,0$ ;  $\xi_i=0,85$

## 6. WNIOSKI

Metoda badania charakterystyk dynamicznych układów przy wykorzystaniu macierzy transmitancji mechanicznych stanowi prosty sposób oceny skuteczności działania tłumików masowych.

Analizując wykresy modułów transmitancji dla parametrów tłumików otrzymanych z dwóch funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$  okazuje się, że parametry otrzymane z funkcji  $P2$  (minimum z maksymalnych wartości modułów transmitancji) są korzystniejsze z punktu widzenia dynamiki konstrukcji.

W przypadku zastosowania dwóch tłumików których łączna masa jest równa masie pojedynczego tłumika a ułamki tłumienia krytycznego  $\xi_i$  są przyjęte z optymalnych parametrów dla pojedynczego tłumika otrzymujemy mniejsze wartości funkcji celu  $P1$  oraz  $P2$  niż w przypadku zainstalowania pojedynczego tłumika. Prawidłowość ta jest spełniona dla każdej proporcji mas  $\mu$ . Dla funkcji  $P1$  jest to spadek wartości o około 1% zaś dla funkcji  $P2$  około 8%-9%.

W przypadku modelu wspornikowego o wielu stopniach swobody dla którego podstawowe częstotliwości drgań własnych są wyraźnie rozseparowane otrzymujemy zbliżone wartości optymalnych parametrów strojonego tłumika masowego (otrzymane z funkcji  $P1$  oraz  $P2$ ) z wartościami parametrów otrzymanych ze wzorów Den Hartoga, które są ważne dla układu o dwu stopniach swobody (konstrukcja + tłumik) i przy pominięciu w analizie tłumienia konstrukcyjnego.

*Praca została wykonana w ramach programu badawczego promotorskiego N 506 3122 33.*

## LITERATURA

- [1] Flaga A., Kawecki J., Kucwaj J.: *Zastosowanie charakterystyk częstotliwościowych do opisu własności dynamicznych obiektów budowlanych*, Archiwum Inżynierii Łądowej – tom XXV z.4 (1979)
- [2] Flaga A., Kawecki J.: *Twierdzenie o wzajemności transmitancji i wzajemności odpowiedzi impulsowych*, Archiwum Inżynierii Łądowej – tom XXV z.1 (1979)
- [3] Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*. McGraw Hill, N.Y., 1947
- [4] Dyląg Z. i inni: *Wytrzymałość materiałów*, tom 2, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, (1997).
- [5] Flaga A.: *Praktyczne ujęcie tłumienia drgań budowli jako całości*, Zeszyt Naukowy Politechniki Krakowskiej, nr 6, (1979).



## **MASZYNOWE UCZENIE RUCHU MOBILNEGO ROBOTA KOŁOWEGO**

**Zenon Hendzel, Marcin Szuster**

Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki  
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów  
e-mail: {zenhen, mszuster}@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *In this paper, we proposed an algorithm used in feedback control of a wheeled mobile robot, based on approximate dynamic programming, in form of an actor-critic structure (ACE-ASE). An algorithm operates in discrete time, it uses parametric structure – actor (ASE) in form of neural network, to approximate nonlinear functions of mobile robot in control law, and critic (ACE) that generates rating of control quality. Verification based on experiment using Pioneer-2DX wheeled mobile robot, confirmed correctness of assumed control algorithm.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Projektowanie mechatroniczne jest interdyscyplinarnym podejściem do budowy złożonych układów elektromechanicznych, w którym następuje integracja części konstrukcji mechanicznej oraz części programowej w postaci odpowiednio skonstruowanego algorytmu sterowania [1, 8]. Integrację programową rozumiemy jako adaptację metod pozwalających na szeroko pojęte przetwarzanie sygnałów dla celów sterowania [8]. Projektowanie ruchu mobilnego robota kołowego (MRK) można rozpatrywać jako proces przetwarzania sygnałów w hierarchicznym układzie sterowania [4, 6], mający na celu wygenerowanie oraz realizację wymaganych przebiegów parametrów stanu robota niezbędnych do wykonania zadania. Zagadnienie sterowania mobilnymi robotami kołowymi w celu realizacji ruchu nadążnego jest zadaniem trudnym, wymagającym odpowiedniej konstrukcji prawa sterowania ze względu na złożony opis nieliniowej dynamiki MRK. W sterowaniu mobilnych robotów kołowych duże możliwości daje zastosowanie nowoczesnych metod sztucznej inteligencji [8], z których szczególnie popularne stały się algorytmy oparte o metody uczenia ze wzmocnieniem [11], ze względu na możliwość adaptacji do różnych klas rozwiązywanych problemów oraz powiązanie z klasyczną teorią sterowania optymalnego.

W artykule zaprezentowano neuronowy układ sterowania ruchem nadążnym mobilnego robota dwukołowego, wykorzystujący aproksymacyjne programowanie dynamiczne w postaci struktury aktor-krytyk (ASE-ACE). Algorytm działa w dyskretnej dziedzinie czasu, wykorzystuje parametryczną strukturę aktora (ASE), w postaci sztucznej sieci neuronowej, do generowania kompensacji nieliniowości obiektu w prawie sterowania, oraz krytyka



gdzie  $u = [u_1, u_2]^T$  jest wektorem sterowań.

Stosując aproksymację Eulera pochodnej funkcji otrzymamy dyskretny opis dynamiki mobilnego robota w postaci

$$\begin{aligned} z_1(k+1) &= z_1(k) + z_2(k) \cdot h \\ z_2(k+1) &= -M^{-1} [C(z_2(k))z_2(k) + F(z_2(k)) - u(k)] h + z_2(k) \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie  $h$  jest krokiem dyskretyzacji czasu. Przyjmując zadaną trajektorię w postaci  $[z_{1d}, z_{2d}]^T$ , błąd nadążania zdefiniujemy w postaci

$$e_1(k) = z_1(k) - z_{1d}(k) \quad (4)$$

$$e_2(k) = z_2(k) - z_{2d}(k) \quad (5)$$

oraz uogólniony błąd nadążania

$$s(k) = e_2(k) + \Lambda e_1(k) \quad (6)$$

Na podstawie (3) możemy zapisać

$$e_1(k+1) = z_1(k) + z_2(k)h - z_{1d}(k+1) \quad (7)$$

$$e_2(k+1) = z_2(k) - M^{-1} [C(z_2(k))z_2(k) + F(z_2(k)) - u(k)] h - z_{2d}(k+1) \quad (8)$$

W oparciu o zależności (7) i (8) dynamikę błędu opiszemy wzorem

$$s(k+1) = f(x(k)) + Y_d(k) + M^{-1}hu(k) \quad (9)$$

gdzie

$$f(x(k)) = -M^{-1} [C(z_2(k))z_2(k) + F(z_2(k))] h \quad (10)$$

$$Y_d(k) = z_2(k) + \Lambda [z_1(k) + z_2(k)h - z_{1d}(k+1)] - z_{2d}(k+1) \quad (11)$$

Występująca w równaniu (9) nieliniowa funkcja  $f(x(k))$  zawiera wszystkie nieliniowości i potencjalnie nieznanne parametry robota. Sterowanie kompensujące zaprojektowano w oparciu o aproksymacyjne programowanie dynamiczne.

### 3. DYSKRETNY NEURONOWY UKŁAD STEROWANIA O STRUKTURZE AKTOR-KRYTYK

Przeprowadźmy syntezę dyskretnego neuronowego układu sterowania o strukturze aktor-krytyk, realizującego zadanie nadążania za zadaną trajektorią oraz wykorzystującego metody aproksymacyjnego programowania dynamicznego do kompensacji nieliniowości sterowanego obiektu. Zagadnienie generowania sygnału sterowania w ruchu nadążnym możemy rozpatrywać jako problem optymalizacji kryterium jakości sterowania zapisanego w postaci [10, 11]

$$V(u_k, x_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_k \quad (12)$$

gdzie  $\gamma \in (0, 1)$ . Z zasady optymalności Bellmana wynika zależność

$$V^*(u_k, x_k) = \min_{u \in U(x)} \{r(x_k, u_k) + V^*(u_{k+1}, x_{k+1})\} \quad (13)$$

gdzie  $V^*(u_k, x_k)$  jest optymalną funkcją wartości [11].

W klasycznej metodzie programowania dynamicznego Bellmana sterowania optymalne są obliczane dla poszczególnych kroków dyskretyzacji od ostatniego etapu procesu do etapu pierwszego zgodnie z zależnością

$$\pi^*(x_k) = \arg \min_{u \in U(x)} \{r(x_k, u_k) + V^*(x_{k+1}, u_{k+1})\} \quad (14)$$

Sformułowanie problemu wyznaczania ciągu sterowań optymalnych dla klasycznego programowania dynamicznego uniemożliwia jego implementację w procesach sterowanych on-line, dodatkowo powodując znaczne obciążenie obliczeniowe powiązane z koniecznością wyznaczania sterowań w każdym kroku iteracji dla każdego z możliwych fizycznie stanów obiektu. Problem ten, nazywany „eksplozją rozwiązań”, gwałtownie rośnie wraz ze wzrostem liczby parametrów rozpatrywanego procesu oraz liczby kroków iteracji. Wady tej pozbawione jest aproksymacyjne programowanie dynamiczne, w którym obliczanie ciągu sterowań optymalnych odbywa się „w przód” dzięki zastąpieniu funkcji wartości  $V(u_k, x_k)$  jej aproksymatą [11]. Przyjmijmy w ogólności funkcjonal  $r_k$  w postaci formy kwadratowej błędu nadążania i sterowania kompensującego

$$r_k(s_k, u_k) = s_k^T R_s s_k + u_k^T R_u u_k \quad (15)$$

gdzie  $R_s, R_u$  są dodatnio określonymi macierzami. Dla tak sformułowanego problemu zadanie optymalizacji (14) może być widziane jako zagadnienie minimalizacji błędu nadążania oraz zużycia energii przez robot.

Zastosowanie adaptacyjnego krytyka, składającego się z dwóch parametrycznych struktur: aktora (ASE) oraz krytyka (ACE), opiera się na dekompozycji problemu sterowania quasi optymalnego na dwa zadania: generowanie sterowań, realizowane przez aktora, oraz aproksymację funkcji wartości  $V(u_k, x_k)$  realizowaną przez krytyka [10, 11]. W metodach uczenia ze wzmocnieniem podstawowym problemem jest tzw. zagadnienie chwilowego przypisania nagród [10, 11], polegające na właściwym przypisaniu parom stan–akcja estymaty funkcji wartości. W proponowanym algorytmie dyskretnego regulatora nadążnego z zastosowaniem struktury aktor–krytyk problem przypisania estymat funkcji wartości poszczególnym parom stan obiektu–sterowanie rozwiązano poprzez zastosowanie modelu predykcyjnego [12, 13].

$$\varepsilon_{k+1} = V_k(s_k) - \gamma \hat{V}_{k+1}(\hat{s}_{k+1}) - r_k \quad (16)$$

Struktury aktora oraz krytyka zrealizowano przy pomocy sztucznych sieci neuronowych, uczonych metodami gradientowymi poprzez propagację wsteczną wskaźnika jakości [10]

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{k+1}^2 \quad (17)$$

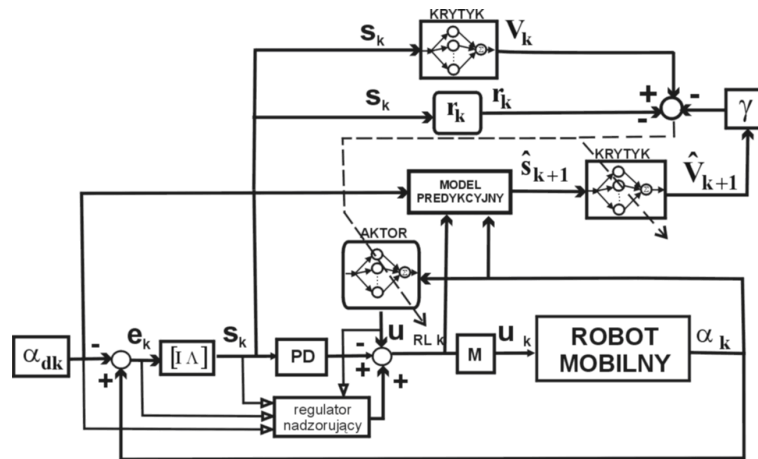
Neuronowy układ sterowania ruchem nadążnym mobilnego robota dwukołowego schematycznie przedstawiono na Rys. 2. W skład układu sterowania wchodzi następujące elementy funkcjonalne:

**Dyskretny nominalny model predykcyjny dynamiki mobilnego robota** – realizujący predykcję stanu zgodnie z zależnością

$$\hat{s}(k+1) = \hat{f}(x) + Y_d(k) + \hat{M}^{-1}hu(k) \quad (18)$$

Zastosowanie uproszczonego modelu predykcyjnego stanowi realizację koncepcji sterowania biomimetycznego [13].

**Krytyk (ACE)** – generuje aproksymatę funkcji wartości  $V(u_k, x_k)$  odpowiadającą bieżącemu stanowi  $s_k$  (Rys. 2). Został zrealizowany w oparciu o sztuczną sieć neuronową liniową ze względu na parametry [2, 6], której budowę schematycznie przedstawiono na Rys. 3. Adaptacja wag krytyka odbywa się zgodnie z zależnością



Rysunek 2: Schemat układu sterowania nadążnego MRK z zastosowaniem struktury ACE-ASE

$$w_{Ck+1} = w_{Ck} + \Delta w_{Ck} \quad (19)$$

Przyrost wag krytyka opisuje reguła łańcuchowa [2, 10, 12]

$$\Delta w_{Cij} = -\alpha_w \frac{\partial J_{(i)}}{\partial \varepsilon_{k+1(i)}} \frac{\partial \varepsilon_{k+1(i)}}{\partial \hat{V}_{k+1(i)}} \frac{\partial \hat{V}_{k+1(i)}}{\partial w_{ij}} \quad (20)$$

gdzie  $\alpha_w$  jest stałą uczenia wag krytyka.

**Aktor (ASE)** – generuje sterowania kompensujące nieliniowości w pętli wewnętrznej (Rys. 2). Został zrealizowany przy pomocy sieci neuronowej liniowej ze względu na parametry z ograniczeniem wyjścia [2, 6], którą schematycznie przedstawiono na Rys. 3. Zastosowanie sieci liniowej ze względu na parametry wynika z faktu, że nieliniowa funkcja  $f(x)$  może zostać przedstawiona w postaci liniowej kombinacji sygnału  $x$  [2,5,6]. Adaptacja

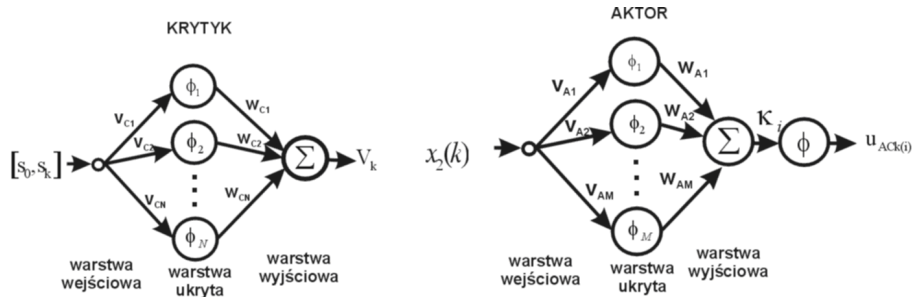
wag aktora odbywa się zgodnie z zależnością

$$w_{A k+1} = w_{A k} + \Delta w_{A k} \quad (21)$$

Uczenie wag aktora odbywa się na podstawie propagacji wstecznej kryterium jakości (17) przez sieć neuronową krytyka oraz model predykcyjny [10, 12] według zależności

$$\Delta w_{A m i k} = -\eta \frac{\partial J_i}{\partial \varepsilon_{k+1(i)}} \frac{\partial \varepsilon_{k+1(i)}}{\partial \hat{V}_{k+1(i)}} \frac{\partial \hat{V}_{k+1(i)}}{\partial \hat{s}_{k+1(i)}} \frac{\partial \hat{s}_{k+1(i)}}{\partial u_{k i}} \frac{\partial u_{k i}}{\partial u_{A C k i}} \frac{\partial u_{A C k i}}{\partial w_{A m i}} \quad (22)$$

gdzie  $\eta$  - jest współczynnikiem uczenia wag aktora.



Rysunek 3: Schemat sieci neuronowych krytyka (ACE) i aktora (ASE)

#### 4. STABILNOŚĆ ZAMKNIĘTEGO UKŁADU STEROWANIA

Założmy, iż zaprojektowany algorytm kompensujący nieliniowości mobilnego robota dwukołowego  $u = u_{AC}(k) = u_{RL}(k)$  oparty o metody uczenia ze wzmocnieniem w postaci struktury adaptacyjnego krytyka, uzupełnimy dodatkowym sterowaniem o zmiennej strukturze. Naszym celem jest zagwarantowanie stabilności zamkniętego układu sterowania poprzez zapewnienie jednostajnego ograniczenia stanu  $s(k)$ , tzn.  $|s_i(k)| \leq \phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , gdzie  $\phi_i$  jest wielkością stałą.

Oznaczmy nowy wektor sterowania jako

$$u(k) = \frac{1}{h} \{-M u_{RL}(k) + M I^* u_S(k) + M K_D s(k) - M Y_d(k)\} \quad (23)$$

gdzie wartość wskaźnika  $I^* = 1$  jeżeli  $|s_i(k)| \geq \phi_i$  oraz  $I^* = 0$  gdy  $|s_i(k)| < \phi_i$ .

Wprowadźmy sygnał sterowania (23) do równania (9)

$$s(k+1) = f(x(k)) - u_{RL}(k) + K_D s(k) + I^* u_S(k) \quad (24)$$

Przyjmując założenia  $|s_i(k)| = \phi_i \Rightarrow I^* = 1$ ,  $|f_i(x(k))| \leq f_{Mi}$  przy  $\det M \neq 0$ , dla wybranej dodatnio określonej funkcji

$$V = s^T(k) s(k) \quad (25)$$

której pierwsza różnica wynosi [9]

$$\Delta V = s^T(k+1) s(k+1) - s^T(k) s(k) \quad (26)$$

i jest równoważna formie [9]

$$\Delta V = |s^T(k) s(k+1)| < \|s(k)\|^2 \quad (27)$$

otrzymamy

$$\Delta V = |s^T(k) [K_D s(k) + f(x(k)) + u_{RL}(k) + u_S(k)]| < \|s(k)\|^2 \quad (28)$$

Przekształcając nierówność (28) do postaci

$$\Delta V \leq \left| s^T(k) K_D s(k) + \sum |s_i(k)| [|f_i(x(k))| + |u_{RL}(k)|] + s^T(k) u_S(k) \right| < \|s(k)\|^2 \quad (29)$$

przy wybranym sterowanie opisanym zależnością

$$u_{S_i}(k) = -sgn s_i(k) [f_{M_i} + |u_{RL_i}(k)|] \quad (30)$$

dostaniemy

$$\Delta V \leq K_{D \max} \|s(k)\|^2 < \|s(k)\|^2 \quad (31)$$

Zakładając, że  $\phi_1 = \phi_2 = K_{D \max}$  przy spełnionej zależności  $0 < K_{D \max} < 1$  zaprojektowany algorytm sterowania (31) gwarantuje zmniejszanie wartości  $|s_i(k)|$  dla  $|s_i(k)| \geq \phi_i$ . W rezultacie dla warunku początkowego spełniającego zależność  $|s_i(0)| < \phi_i$  otrzymamy  $|s_i(k)| < \phi_i$  dla  $\forall k \geq 0$ .

## 5. WYNIKI EKSPERYMENTU

Weryfikację zaprojektowanego układu sterowania przeprowadzono dla ruchu wybranego punktu mobilnego robota po zadanej trajektorii w postaci pętli, składającej się z pięciu charakterystycznych etapów ruchu [2]:

a) jazdy po torze prostoliniowym, rozruch:

$$v_A^* = \frac{v_A}{t_r} (t - t_p) \quad t_p \leq t \leq t_r \quad \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \frac{v_A^*}{r} \quad \dot{\beta} = 0$$

gdzie:  $t_p$  – czas początkowy ruchu,  $t_r$  – czas zakończenia rozruchu,

b) ruch z ustaloną prędkością, gdy  $v_A = \text{const}$ :

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \frac{v_A}{r} \quad t_r \leq t \leq t_1 \quad \dot{\beta} = 0$$

gdzie:  $t_1$  – czas ruchu ustalonego,

c) jazdę po torze kołowym o promieniu R, dla:

$v_A = \text{const}$ ,  $R=0,75$  m,

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{v_A}{r} + h_1 \dot{\beta} \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{v_A}{r} - h_1 \dot{\beta} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

gdzie:  $t_2$  – czas jazdy po torze kołowym,

d) wyjście z łuku z uwzględnieniem okresu przejściowego, następnie jazda po torze prostoliniowym ze stałą prędkością ( $v_A = \text{const}$ ):

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_{10} - \left( \dot{\alpha}_{10} - \frac{v_A}{r} \right) (1 - e^{-\gamma t}) \quad \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_{20} - \left( \frac{v_A}{r} - \dot{\alpha}_{20} \right) (1 - e^{-\gamma t}) \quad t_2 \leq t \leq t_3$$

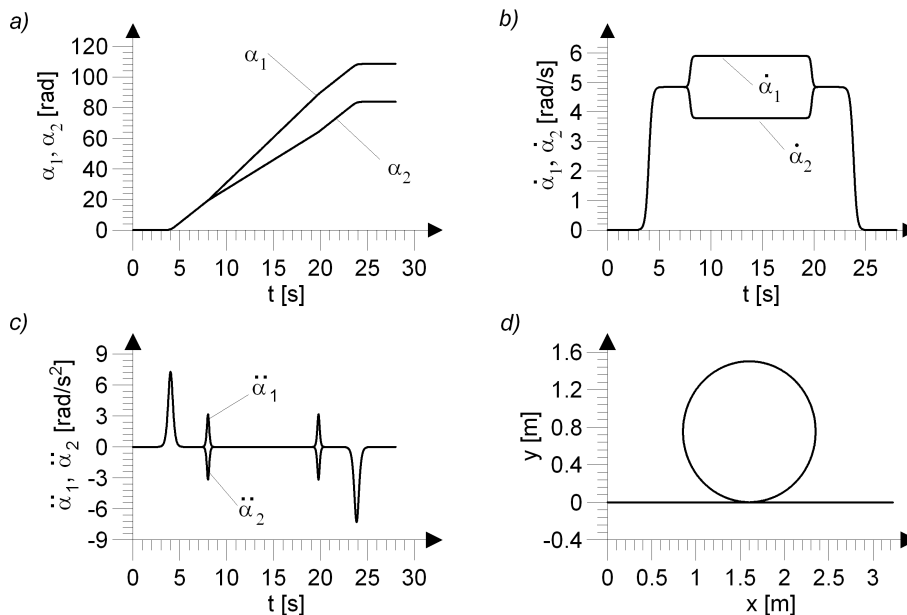
gdzie:  $t_3$  – czas ruchu ustalonego,  $\gamma$  – stała aproksymacji krzywych przejściowych,  $\dot{\alpha}_{10}, \dot{\alpha}_{20}$  – wartości prędkości kątowych kół na początku okresu przejściowego. Wprowadzenie takiej aproksymacji umożliwia realizację ruchu układu z łagodną zmianą takich parametrów jak prędkość i przyspieszenie.

e) hamowanie:

$$v_A^* = v_A - \frac{v_A}{t_h} (t - t_3) \quad t_3 \leq t \leq t_k \quad \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \frac{v_A^*}{r} \quad \dot{\beta} = 0$$

gdzie  $t_k$  – czas końcowy,  $t_h$  – czas hamowania.

W przeprowadzonym eksperymencie przyjęto taką samą długość czasu hamowania oraz rozruchu ( $t_r = t_h$ ). Maksymalna prędkość liniowa punktu A mobilnego robota wynosi  $v_A = 0.4 [m/s]$ . Przebiegi zmiennych kątowych, które w czasie eksperymentu posłużyły jako zadana trajektoria ruchu punktu A mobilnego robota dwukołowego, przedstawiono na Rys. 4.



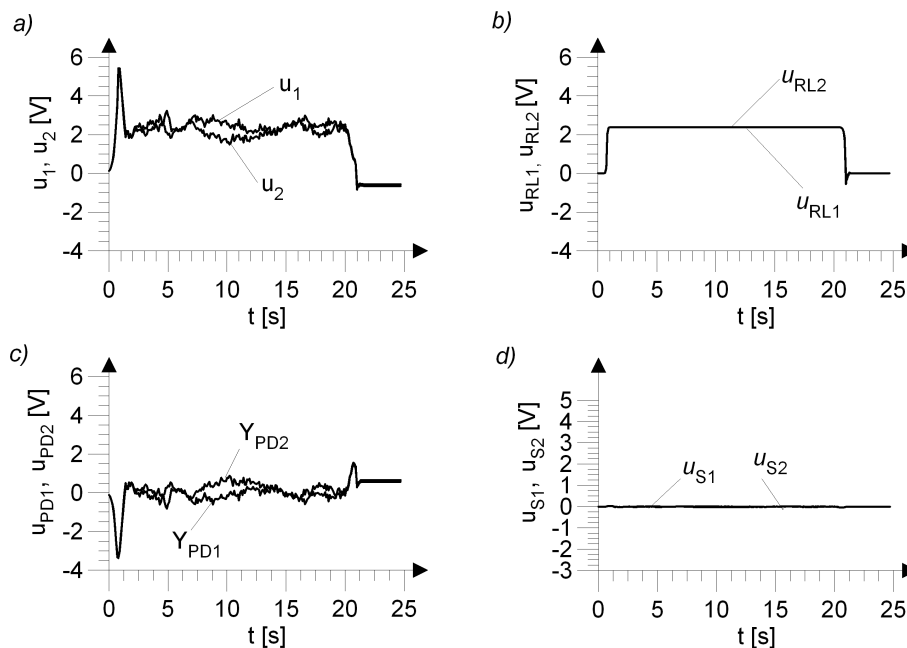
Rysunek 4: a) wartości kątów obrotu własnego kół napędzających  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$ , b) prędkości kątowe  $\dot{\alpha}_1$  oraz  $\dot{\alpha}_2$ , c) przyspieszenia kątowe  $\ddot{\alpha}_1$  i  $\ddot{\alpha}_2$ , d) tor ruchu punktu A

Przebieg zmiany wartości kątów obrotu własnego kół napędzających  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$  przedstawiono na Rys. 4a. Rys. 4b przedstawia prędkości kątowe kół 1 oraz 2 mobilnego robota



( $\dot{\alpha}_1$  oraz  $\dot{\alpha}_2$ ), natomiast na Rys. 4c pokazano przyspieszenia kątowe  $\ddot{\alpha}_1$  i  $\ddot{\alpha}_2$  odpowiednich kół. Tor ruchu charakterystycznego punktu A mobilnego robota przedstawiono na Rys. 4d.

Weryfikację zaprojektowanego algorytmu sterowania przeprowadzono na mobilnym robocie Pioneer-2DX z wykorzystaniem metody szybkiego prototypowania. Wyniki eksperymentu w postaci przebiegów odpowiednich zmiennych przedstawiono na Rys. 5 oraz Rys. 6. W skład sygnału sterowania całkowitego ruchem mobilnego robota dwukołowego (Rys. 5a) wchodzi sterowanie kompensacyjne generowane przez strukturę aktor – krytyk (Rys. 5b), sterowanie  $Y_{PD}$  (Rys. 5c), jako sterowanie zdefiniowane w postaci (11), oraz sterowanie nadzorujące  $u_S$  (Rys. 5d).

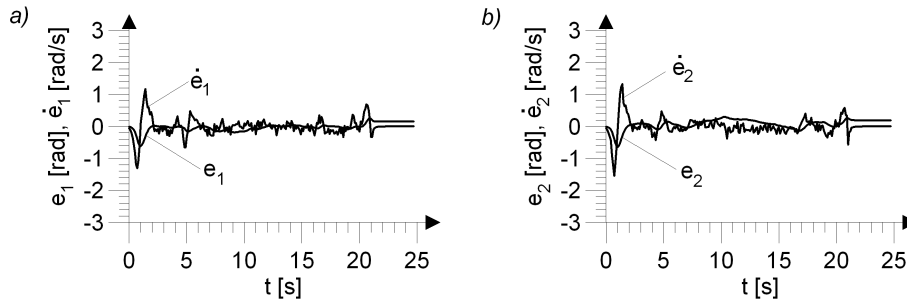


Rysunek 5: a) Sterowanie całkowite  $u_1$  dla koła 1 oraz  $u_2$  dla koła 2, b) sterowanie kompensacyjne  $u_{RL1}$  oraz  $u_{RL2}$ , c) sterowanie  $Y_{PD1}$  oraz  $Y_{PD2}$ , d) sterowanie nadzorujące  $u_{S1}$  oraz  $u_{S2}$  odpowiednio dla kół 1 i 2

W strukturze dyskretnego ACE–ASE w roli aktora oraz krytyka zastosowano dwuwarstwowe sieci neuronowe liniowe ze względu na parametry, o 6 neuronach sigmoidalnych dla każdej z sieci, oraz losowym doborze wag warstwy wejściowej. Wynikiem zastosowania SN o zerowych wartościach wag warstwy wyjściowej z sieci w początkowej fazie procesu uczenia jest zmienny udział sterowania kompensacyjnego w sterowaniu całkowitym. Podczas początkowego etapu adaptacji wag sieci główną rolę w sterowaniu odgrywa regulator PD, którego udział w sterowaniu całkowitym maleje w miarę postępu procesu uczenia wag sieci neuronowej aktora (ASE).

Na Rys. 6a oraz Rys. 6b przedstawiono błąd nadążania  $e_1$  dla koła 1 i  $e_2$  dla koła 2, oraz odpowiednie błędy prędkości nadążania ( $\dot{e}_1, \dot{e}_2$ ), wszystkie przebiegi błędów są ograniczone.

Do ilościowej oceny wyników przeprowadzonego eksperymentu zastosowano następu-



Rysunek 6: a) Błąd nadążania  $e_1 = \alpha_1 - \alpha_{1d}$ , oraz pochodna błędu nadążania  $\dot{e}_1 = \dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_{1d}$  dla koła 1, b) błąd nadążania  $e_2 = \alpha_2 - \alpha_{2d}$ , oraz pochodna błędu nadążania  $\dot{e}_2 = \dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_{2d}$  dla koła 2

jące wskaźniki jakości:

- maksymalna wartość błędu nadążania  $e_{\max 1}$  [rad],  $e_{\max 2}$  [rad],
- maksymalna wartość pochodnej błędu nadążania  $\dot{e}_{\max 1}$  [rad/s],  $\dot{e}_{\max 2}$  [rad/s],
- pierwiastek sumy kwadratów błędów nadążania  $e_1$  i  $e_2$ ,  $\varepsilon_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^n e_{1k}^2}$  [rad], gdzie k -

indeks oznaczający kolejne kroki iteracyjne,  $\varepsilon_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n e_{2k}^2}$  [rad],

- pierwiastek sumy kwadratów pochodnej błędu nadążania

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{\sum_{k=1}^n \dot{e}_{1k}^2} \quad [\text{rad/s}], \quad \dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n \dot{e}_{2k}^2} \quad [\text{rad/s}].$$

Wartości poszczególnych wskaźników zamieszczono w Tabeli 1.

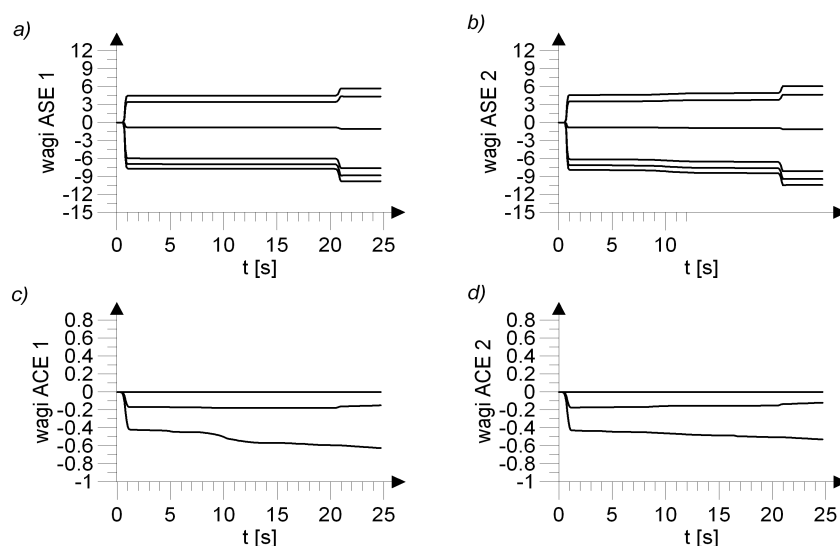
Tabela 1: Wartości wskaźników jakości dla poszczególnych kół

Koło:	$e_{\max}$ [rad]	$\dot{e}_{\max}$ [rad/s]	$\varepsilon$ [rad]	$\dot{\varepsilon}$ [rad/s]
1.	0.617	1.306	0.209	0.421
2.	0.642	1.546	0.267	0.433

Przebiegi wartości wag aktora (ASE) oraz krytyka (ACE) przedstawiono na Rys. 7. Wagi przed rozpoczęciem procesu uczenia są równe zero, natomiast w miarę postępów procesu uczenia pozostają ograniczone. Wagi sieci neuronowej aktora, dla odpowiednich kół, pokazano na Rys. 7.a. i Rys. 7.c., natomiast wagi krytyka przedstawiono na Rys. 7.b. i Rys. 7.d.

## 6. WNIOSKI

W artykule zaproponowano dyskretny algorytm sterowania ruchem nadążnym mobilnego robota dwukołowego, wykorzystujący metody uczenia ze wzmocnieniem do kompensacji nieliniowości sterowanego obiektu. Zastosowano strukturę aktora (ASE, w postaci sztucznej sieci neuronowej), do generowania sterowania, oraz krytyka (ACE) do oceny jakości sterowania. Weryfikację układu sterowania przeprowadzono na obiekcie rzeczywistym, mobilnym



Rysunek 7: a) wagi ASE dla koła 1, b) wagi ASE dla koła 2, c) wagi ACE dla koła 1, d) wagi ACE dla koła 2

robocie dwukołowym Pioneer-2DX. Przeprowadzone badania potwierdziły skuteczność zaprojektowanego algorytmu sterowania w realizacji ruchu nadszerego oraz zbieżności błędów nadszerego.

Niniejsza praca badawcza została zrealizowana w ramach projektu badawczego Nr 4 T07A 030 29

## LITERATURA

- [1] J. van Amerongen, Mechatronic design. *Mechatronics*, **13**, 1045–1066, 2003.
- [2] M.J. Giergiel, Z. Hendzel, W. Żylski, *Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych*. PWN Warszawa, 2002.
- [3] J. Giergiel, W. Żylski, Description of motion of a mobile robot by Maggie's equations. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **43**, 511–521, 2005.
- [4] Z. Hendzel, Collision free path planning and control of wheeled mobile robot using Kohonen self-organising map. *Bull. Polish Acad. Sci. Tech. Sci.*, **53**, 39–47, 2005.
- [5] Z. Hendzel, An adaptive critic neural network for motion control of a wheeled mobile robot. *Nonlinear Dynamics*, **50**, 849–855, 2007.
- [6] Z. Hendzel, K. Cąkała, *Zastosowanie uczenia ze wzmocnieniem w strukturze aktor-krytyk w sterowaniu ruchem nadszerego mobilnego robota kołowego*. KMP2007, 2007.

- 
- [7] Z. Hendzel, K. Cąkała, *Zastosowanie uczenia ze wzmocnieniem w mechatronicznym projektowaniu ruchu mobilnego robota kołowego*. Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji – PIB, 2007.
- [8] R. Isermann, Information processing for mechatronic systems. *Robotics and Autonomous Systems*, **19**, 117–134, 1996.
- [9] A.J. Koshkouei, A.S.I. Zinober, Sliding mode control of discrete–time systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **122**, 793–802, 2000.
- [10] D.V. Prokhorov, D.C. Wunsch, Adaptive critic designs. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **8**, 997–1007, 1997.
- [11] R.S. Sutton, A.G. Barto, *Reinforcement learning*. Cambridge, 1999.
- [12] R. Syam, K. Watanabe, K. Izumi, Adaptive actor-critic learning for the control of mobile robots by applying predictive models. *Soft Computing*, **9**, 835–845, 2005.
- [13] R. Syam, *Biomimetic control methods for nonholonomic mobile robots*, Saga University, Japan, 2005.

## **INTELIGENTNE STEROWANIE ROZMYTO-NEURONOWE UKŁADEM DYNAMICZNYM.**

**Zenon Hendzel, Magdalena Wereszczak**

Politechnika Rzeszowska Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki  
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów  
e-mail: {zenhen, magdaw}@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *In this paper was introduced fuzzy-neural algorithm adaptation conclusions rule base, applied to approximation nonlinearity mobile circular robot. Computer simulation proposed solution was realized in emulator 2 circular mobile robot.*

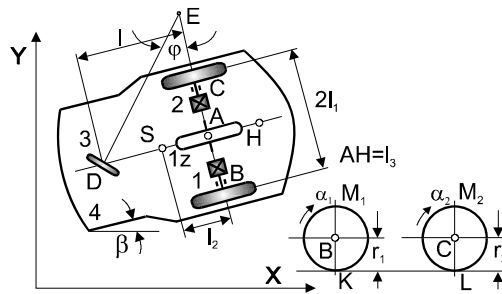
---

### **1. WPROWADZENIE**

Z punktu widzenia sterowania ruchem nadążnym mobilnego robota kołowego głównym problemem jest opracowanie odpowiednich algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym. W algorytmach tych niezbędne jest uwzględnienie niepewności modelowania [1]. Niepewności modelowania wynikają ze zmiennych warunków pracy przy realizacji różnych zadań przez mobilne roboty kołowe. W syntezie algorytmów sterowania może być zastosowane między innymi podejście klasyczne bazujące na teorii układów o zmiennej strukturze [2]. Wśród wspomnianych metod stosowanych do projektowania układów sterowania w warunkach niepewności coraz większym zainteresowaniem cieszą się techniki stosowane w sztucznej inteligencji – sieci neuronowe i układy z logiką rozmytą [3, 4]. Układy te stosowane są ze względu na możliwość uzyskania prostych ale odpornych rozwiązań, które obejmują szeroki zakres zmian parametrów obiektu. Ponadto układy te posiadają zdolność do aproksymacji dowolnych odwzorowań nieliniowych oraz w przypadku sieci neuronowych możliwość uczenia się i adaptacji. W niniejszej pracy do kompensacji nieliniowości mobilnego robota zastosowano układ hybrydowy wykorzystujący logikę rozmytą i sieci neuronowe. Układy hybrydowe często zwane są układami rozmyto-neuronowymi [3, 5, 6]. W referacie tym właściwości tych układów zostaną zastosowane do aproksymacji nieliniowości występujących w opisie matematycznym 2 kołowego mobilnego robota. Pozostała część referatu jest zorganizowana następująco. W rozdziale drugim zawarte są dynamiczne równania ruchu mobilnego robota 2-kołowego. W rozdziale trzecim omówiono zastosowany układ rozmyto-neuronowy i własności kompensatora rozmyto-neuronowego. Rozdział 4 zawiera otrzymane wyniki testu numerycznego. Rozdział piąty podsumowuje rezultaty badań.

## 2. OPIS RUCHU MOBILNEGO ROBOTA

Obiektem sterowania jest 2-kołowy mobilny robot, którego schemat pokazano na Rys. 1 [1].



Rysunek 1: Schemat mobilnego robota Pioneer 2-DX

Dynamiczne równania ruchu 2-kołowego mobilnego robota można przedstawić w postaci równania:

$$M(q, a)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, a)\dot{q} + F(\dot{q}, a) = u \quad (1)$$

gdzie  $q = [\alpha_1 \quad \alpha_2]^T$  jest wektorem współrzędnych uogólnionych, którymi są kąty obrotu własnego kół,  $M$  to macierz bezwładności układu,  $C(q, \dot{q})\dot{q}$  jest wektorem sił odśrodkowych,  $F$  to wektor oporów ruchu,  $u = [M_1, M_2]^T$  jest wektorem momentów kół napędzających,  $a$  to wektor parametrów mobilnego robota kołowego, gdzie  $a_5$  i  $a_6$  to parametry związane z oporami ruchu. Dla zadanej trajektorii ruchu  $q_d$  definiujemy błąd nadążania

$$e = q_d - q \quad (2)$$

oraz uogólniony błąd

$$s = \dot{e} + \Lambda e \quad (3)$$

gdzie  $\Lambda$  to macierz diagonalna dodatnio określona. Różniczkując (3) oraz uwzględniając dynamiczne równania mobilnego robota [7], otrzymujemy opis układu sterowania w funkcji uogólnionego błędu  $s$  [8]

$$M\dot{s} = -Cs + f(x) - u \quad (4)$$

gdzie nieliniowa funkcja  $f(x)$  dana jest zależnością

$$f(x) = M(q)(\ddot{q}_d + \Lambda\dot{e}) + C(q, \dot{q})(\dot{q}_d + \Lambda e) + F(\dot{q}) \quad (5)$$

Ogólna postać sygnału sterowania z uwzględnieniem kompensacji mobilnego robota kołowego jest następująca [1, 8]

$$u = \hat{f} - K_D s \quad (6)$$

gdzie  $\hat{f}$  to funkcja aproksymująca nieliniową funkcję (5), natomiast

$$K_D s = K_D \dot{e} + K_D \Lambda e \quad (7)$$

to równanie regulatora PD. Mając na uwadze zależność (5) zapiszmy wektor sterowania kompensującego w postaci

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) a_1 + (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) a_2 + \dot{v}_1 a_3 + 2(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) v_2 a_4 + a_5 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}_1 \\ (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) a_1 + (\dot{v}_2 - \dot{v}_1) a_2 + \dot{v}_2 a_3 + 2(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) v_1 a_4 + a_6 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

gdzie  $v = \dot{q}_d - \Lambda e$ ,  $\dot{v} = \ddot{q}_d - \Lambda \dot{e}$ .

Zgodnie z twierdzeniem mówiącym o dokładności aproksymacji nieliniowej funkcji modelem rozmyto-neuronowym [3, 8], ze wzrostem stopnia złożoności modelu (ilość reguł, liczba zbiorów rozmytych) rośnie jego możliwość do dokładnego odwzorowania. Jakkolwiek, przy większej ilości wejść modelu rozmyto-neuronowego pojawia się problem eksplozji rozwiązań. Aby uniknąć tego typu zjawisk wprowadźmy strukturalne sterowanie rozmyto-neuronowe poprzez zastąpienie modelu złożonego, modelami prostymi. Takie podejście upraszcza problem projektowania, wprowadza nową strukturę sterowania rozmyto-neuronowego i przyspiesza proces obliczeniowy. Elementy wektora sterowania kompensującego nieliniowości mobilnego robota, można zapisać jako:

$$f_{roz-neuro1} = g_1 + g_2 + g_3 \quad (9)$$

$$f_{roz-neuro2} = g_4 + g_5 + g_6 \quad (10)$$

gdzie składowe elementów w których zastosowano aproksymację oporów ruchu funkcją tangens hiperboliczny, wynoszą

$$\begin{aligned} g_1 &= (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) a_1 + (\dot{v}_1 - \dot{v}_2) a_2 + \dot{v}_1 a_3 \\ g_2 &= 2\dot{\alpha}_2 v_2 a_4 \\ g_3 &= -2\dot{\alpha}_1 v_2 a_4 + a_5 \frac{(1 - e^{-\beta \dot{\alpha}_1})}{(1 + e^{-\beta \dot{\alpha}_1})} \\ g_4 &= (\dot{v}_1 + \dot{v}_2) a_1 + (\dot{v}_2 - \dot{v}_1) a_2 + \dot{v}_1 a_3 \\ g_5 &= 2\dot{\alpha}_1 v_1 a_4 \\ g_6 &= -2\dot{\alpha}_2 v_1 a_4 + a_6 \frac{(1 - e^{-\beta \dot{\alpha}_2})}{(1 + e^{-\beta \dot{\alpha}_2})} \end{aligned} \quad (11)$$

Po złożeniu funkcji występujących odpowiednio w równaniach (9) i (10) otrzymamy elementy wektora sterowania kompensującego.

### 3. ROZMYTO-NEURONOWY KOMPENSATOR NIELINIOWOŚCI

W niniejszej pracy do aproksymacji nieliniowości obiektu zastosowano układ rozmyto-neuronowy. Uczeniu w tym układzie podlegają parametry konkluzji bazy reguł modelu Takagi-Sugeno, przy założonych stałych parametrach funkcji przynależności wejścia  $\mu_{A_i^k}$  (założono równomierne rozmieszczenie funkcji przynależności w przestrzeni rozważań). Do aproksymacji nieliniowości zastosowano model rozmyty w postaci bazy reguł:

$$R^{(k)} : \text{IF } x_1 \text{ is } A_1^k \text{ AND...AND } x_n \text{ is } A_n^k \text{ THEN } \bar{y} = \bar{y}^k \quad (12)$$

gdzie  $A_i^k$  jest zbiorem rozmytym w  $U_i \subset R$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in U$  a  $k = 1, 2, \dots, N$  to liczba reguł. Model rozmyty z operacją rozmywania typu singleton, z bazą reguł (12), rozmytą implikacją typu (MIN), metodą wyostrzania typu CA można opisać zależnością [3, 5]:

$$f(x) = \frac{\sum_{k=1}^N \tau_k \bar{y}^k}{\sum_{k=1}^N \tau_k} \quad (13)$$

gdzie  $\tau_k$  oznacza stopień aktywności reguły  $R^{(k)}$

$$\tau_k = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(x) \quad (14)$$

$x \in U \subset R^n$ ,  $\bar{y} \in V \subset R$  to odpowiednio wejście do modelu rozmytego i wyjście ostre z modelu. Jeżeli wybierzemy funkcje przynależności  $\mu_{A_i^k}$  w postaci krzywych gaussowskich, które są wyrażone wzorem:

$$\mu_{A_i^k}(x_i) = \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \bar{x}_i^k}{s_i^k} \right)^2 \right] \quad (15)$$

gdzie  $s_i^k$  jest parametrem określającym szerokość krzywej gaussowskiej a  $\bar{x}_i^k$  jest jej środkiem, wówczas wyjście z modelu rozmytego możemy zapisać w formie:

$$f(x) = \frac{\sum_{k=1}^N \left[ \prod_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \bar{x}_i^k}{s_i^k} \right)^2 \right] \right] \bar{y}^k}{\sum_{k=1}^N \left[ \prod_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \bar{x}_i^k}{s_i^k} \right)^2 \right] \right]} \quad (16)$$

Natomiast stopień aktywności reguły wyznaczamy na podstawie zależności (14):



$$\tau_k = \prod_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \bar{x}_i^k}{s_i^k} \right)^2 \right] \quad (17)$$

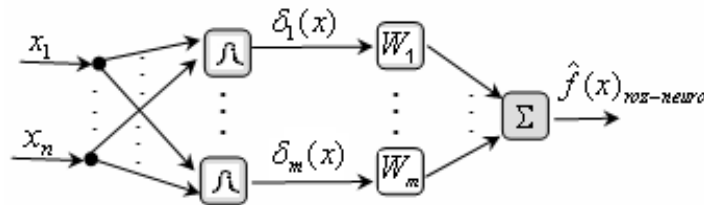
W dalszych rozważaniach do aproksymacji zależności funkcyjnych występujących w konkluzjach bazy reguł modelu Takagi-Sugeno zostanie zastosowana sieć neuronowa. W tym celu przyjmijmy we wzorze (13)  $\bar{y}^k = w_k$  jako wagi sieci neuronowej i wówczas model rozmyto-neuronowy zapiszemy w postaci równania:

$$\hat{f}(x)_{roz-neuro} = \frac{\sum_{k=1}^N \tau_k w_k}{\sum_{k=1}^N \tau_k} \quad (18)$$

Przyjmując oznaczenie  $\delta(x) = \frac{\tau_k}{\sum_{k=1}^N \tau_k}$ , model rozmyto-neuronowy zapiszemy jako:

$$\hat{f}(x)_{roz-neuro} = \hat{W}^T \delta(x) \quad (19)$$

gdzie  $W^T = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ , a jego schemat pokazano na Rys.2.



Rysunek 2: Schemat układu rozmyto-neuronowego.

Prawo uczenia wag układu rozmyto-neuronowego wyznaczamy stosując teorie stabilności Lapunowa[1]. W tym celu wprowadźmy funkcję dodatnio określoną w postaci [1]:

$$V = \frac{1}{2} \left[ s^T M s + tr \{ \tilde{W}^T \Gamma^{-1} \tilde{W} \} \right] \quad (20)$$

Gdzie  $\Gamma$  jest macierzą diagonalną o elementach dodatnich,  $\tilde{W} = W - \hat{W}$  to błąd estymowanych wag sieci,  $\hat{W}$  to ocena wag sieci. Załóżmy, że idealne wagi sieci są ograniczone  $\|W\|_F \leq W_0$ , a  $\|\cdot\|_F$  oznacza normę Frobeniusa. Po zróżniczkowaniu zależności (20) otrzymamy:

$$\dot{V}(t) = s^T M \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M} s + tr \left\{ \tilde{W}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{W}} \right\} \quad (21)$$

Wstawiając do zależności (21) opis układu sterowania (4) i (6) oraz (19) otrzymamy:

$$\dot{V}(t) = -s^T K_D s + 0.5 s^T (\dot{M} - 2C) s + tr \left\{ \tilde{W}^T (\Gamma \dot{\tilde{W}} + \delta s^T) \right\} \quad (22)$$

Przyjmujemy algorytm uczenia wag sieci w postaci równania

$$\dot{\tilde{W}} = \Gamma \delta s^T - \kappa \Gamma \|s\| \hat{W} \quad (23)$$

gdzie  $\kappa > 0$  jest wielkością projektową. Dla przyjętego prawa uczenia konkluzji bazy reguł (23) otrzymujemy ograniczenie na uogólniony błąd nadążania  $s$  i ograniczenie błędu estymowanych wag sieci neuronowej w postaci:

$$\|s\| > \left[ \kappa W_0^2 / 4 \right] / K_{D \min} \equiv b_s \quad (24)$$

$$\|\tilde{W}\|_F > W_0 / 2 + \sqrt{W_0^2 / 4} \equiv b_W \quad (25)$$

gdzie  $K_{D \min}$  jest najmniejszą wartością własną macierzy  $K_D$ . Należy zauważyć iż błąd nadążania  $s$  można zmniejszyć przez odpowiedni dobór macierzy wzmocnień  $K_D$  regulatora PD. Odpowiedni dobór parametru  $\kappa$  wprowadza kompromis w syntezy algorytmu sterowania dotyczący relacji pomiędzy wartością błędu nadążania a dokładnością estymowanych wag sieci. Takie ujęcie syntezy sterowania neuronowego umożliwi poprawną pracę układu sterowania w wyniku działania pętli wewnętrznej z regulatorem PD, do momentu, aż sieć zacznie się uczyć. Oznacza to iż nie jest wymagany wstępny proces uczenia wag sieci, a wagi sieci są estymowane w czasie rzeczywistym [1].

#### 4. REZULTATY SYMULACJI

Na podstawie równania (19) aproksymowane elementy  $g_i$ , wektora  $f$  zapiszemy jako:

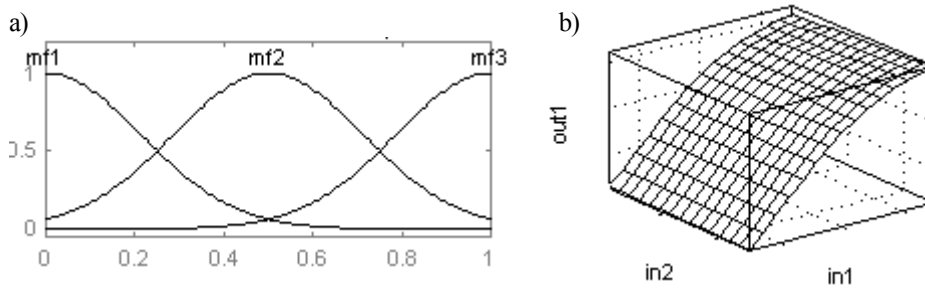
$$\hat{g}_i(x) = \hat{W}^T \delta(x) \quad (26)$$

Rozwiniętą postać równania (26) możemy przedstawić następująco:

$$\hat{g}_i(x) = [\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_N] \begin{bmatrix} \delta_1(x) \\ \delta_2(x) \\ \vdots \\ \delta_m(x) \end{bmatrix} \quad (27)$$

gdzie  $N$  to liczba reguł rozmytych. W wyniku takiego podejścia otrzymujemy sześć prostych modeli rozmyto-neuronowych, każdy o dwóch sygnałach wejściowych, co znacznie ułatwia syntezę modelu rozmyto-neuronowego.

W celu symulacji przeprowadzonych rozważań zaprojektowano rozmyto-neuronowy kompensator nieliniowości dla mobilnego robota kołowego Pioneer-2DX. Każdy element  $g_i$  zawiera dwie zmienne wejściowe. Do aproksymacji modelem rozmyto-neuronowym przestrzeń rozważań każdej z tych zmiennych wejściowych podzielono na 3 zbiory rozmyte opisane gaussowskimi funkcjami przynależności (15), w wyniku tego otrzymano bazę reguł złożoną z 9 reguł. Przykładowo dla funkcji  $g_6$  opisanej wzorem  $g_6 = -2\dot{\alpha}_2 v_1 a_4 + a_6(1 - e^{-\beta\dot{\alpha}_2}) / (1 - e^{-\beta\dot{\alpha}_2})$  zdefiniowanej na zbiorze  $U = [0, 6] \times [0, 6] \subset R^2$  dla  $a_4 = 0.0023$ ,  $a_6 = 2.4116$ , rozkład zbiorów rozmytych oraz powierzchnię otrzymanego modelu przedstawiono odpowiednio na Rys. 3.



Rysunek 3: a) Rozkład zbiorów rozmytych, b) powierzchnia otrzymanego modelu.

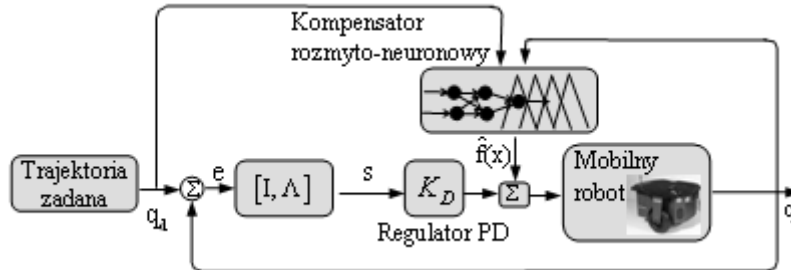
W wyniku tych operacji dla przykładowej funkcji  $g_6$  otrzymano bazę reguł złożoną z 9 reguł:

$$\begin{aligned}
 & \text{IF } \dot{\alpha}_2 \text{ is } A_1^1 \text{ AND } v_1 \text{ is } A_1^2 \text{ THEN } \bar{y} = w_1 \\
 & \text{IF } \dot{\alpha}_2 \text{ is } A_1^1 \text{ AND } v_1 \text{ is } A_2^2 \text{ THEN } \bar{y} = w_2 \\
 & \vdots \\
 & \text{IF } \dot{\alpha}_2 \text{ is } A_3^1 \text{ AND } v_1 \text{ is } A_3^2 \text{ THEN } \bar{y} = w_9
 \end{aligned} \tag{28}$$

Zgodnie z zależnością (27) projektowany model rozmyto-neuronowy zapiszemy jako:

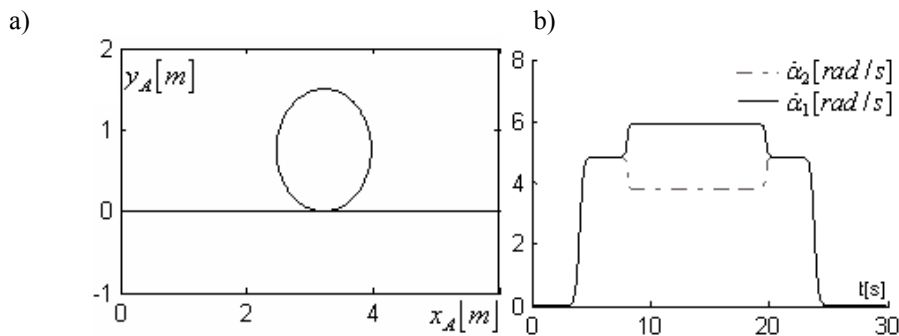
$$\hat{g}_{roz-neuro6} = [w_1, w_2, \dots, w_9] \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_9 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Symulacje zaprojektowanego rozmyto-neuronowego algorytmu sterowania przeprowadzono według modelu obliczeniowego wygenerowanego w Simulinku, a zamieszczono go na Rys. 4.

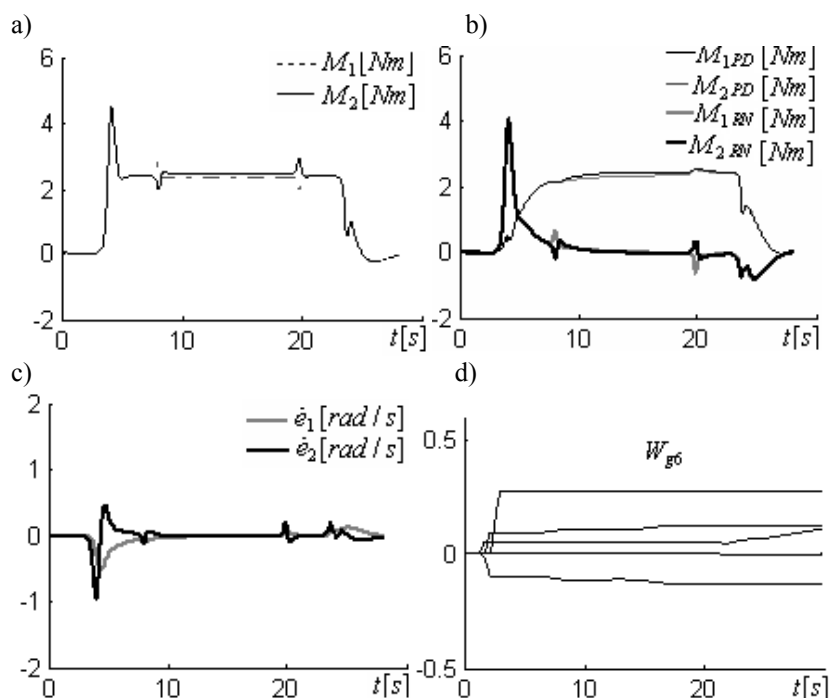


Rysunek 4: Schemat układu sterowania

Symulacje numeryczną rozmyto-neuronowego kompensatora nieliniowości przeprowadzono dla przypadku, kiedy punkt A mobilnego robota przemieszcza się po torze w kształcie pętli pokazanej na (Rys.5.) Rozważa się pięć okresów ruchu, tzn.: start, ruch o stałej prędkości punktu (punkt porusza się po linii prostej), ruch po trajektorii kołowej, ruch po linii prostej oraz zatrzymanie. Badania numeryczne zostały przeprowadzone dla  $V_A = 0.4$  [m/s]. Wartości pozostałych danych przyjętych w symulacji wynoszą:  $K_D = \text{diag}[0.5, 0.5]$ ,  $\kappa = 0.01$ ,  $\Gamma = \text{diag}[0.4]$ ,  $\hat{W}(0) = 0$ ,  $\Lambda = \text{diag}[0.2, 0.2]$ , a pozostałe dane zaczerpnięto z [1].

Rysunek 5: a) Zadana trajektoria ruchu - pętla, b)  $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$  - prędkości kątowe kół napędzających.

Wyniki symulacji przedstawiono na Rys. 6. Stosując algorytm sterowania (6) i algorytm uczenia wag sieci (23), otrzymano wartości momentów napędzających koła 1 i 2, które pokazano na rys 6a. Na Rys. 6b zestawiono sterowanie kompensacyjne i sterowanie za pomocą regulatora PD. Jak wynika z tych przebiegów, na początku ruchu realizowane jest sterowanie PD, kiedy proces adaptacji się rozpoczyna zostaje ono zastąpione sterowaniem kompensacyjnym. Na Rys. 6c pokazano przebiegi prędkości błędów nadążania. Największe błędy zauważono w okresie rozruchu i hamowania. Błędy podczas rozruchu wynikają z faktu iż dopiero zaczynał się proces adaptacji parametrów obiektu. Natomiast występowanie błędów nadążania parametrów ruchu w okresie hamowania, wynikało ze zmieniającej się trajektorii



Rysunek 6: Wyniki symulacji ruchu punktu A mobilnego robota, a) sterowanie całkowite b) zestawienie sterowania kompensacyjnego i PD c) błąd prędkości nadążania d) przebieg wybranych wag.

zadanej. Błąd ten jest szybko kompensowany przez algorytm sterowania rozmyto-neuronowego. Nieznaczną zmianę tych błędów można zauważyć przy jeździe po łuku. Błędy te są zbliżone do zera. Na Rys. 6d zamieszczono wybrane oceny wag sieci. Oceny te spełniają warunki ograniczoności (24) i (25). Z przeprowadzonej symulacji wynika iż testowany algorytm sterowania rozmyto-neuronowego (6) zapewnia stabilność badanego układu sterowania, pomimo zmiennych warunków pracy. A otrzymane błędy sterowania można zmniejszyć przez odpowiedni dobór macierzy  $K_D$  oraz założenie niezerowych warunków początkowych.

## 5. WNIOSKI

W referacie tym przeanalizowano tematykę związaną z adaptacją konkluzji bazy reguł układu rozmyto-neuronowego, zastosowanego do aproksymacji nieliniowości występujących w sterowaniu ruchem nadążnym mobilnego robota kołowego. Założono stałe parametry funkcji przynależności wejścia (założono równomierne rozmieszczenie tych funkcji w przestrzeni rozważań), którymi były zbiory Gaussa. Uczono jedynie konkluzje bazy reguł. Z przeprowadzonych badań wynika iż układy te mogą stanowić jeden ze sposobów aproksymacji nieliniowych odwzorowań. Proces uczenia był krótki a zastosowane podejście umożliwiło odwzorowanie nieliniowości robota z dużą dokładnością. Uzyskane wyni-

ki potwierdzają poprawność przyjętej metody kompensacji nieliniowości. Dalsze badania skupiać się będą na uczeniu parametrów wejściowych funkcji przynależności, dzięki czemu można uzyskać optymalne dopasowanie rozkładu zbiorów rozmytych, co w rezultacie poprawi jakość sterowania.

*Niniejsza praca badawcza została zrealizowana w ramach projektu badawczego Nr 4T07A03029.*

#### LITERATURA

- [1] Giergiel M. J., Hendzel Z., Żylski W.: *Modelowanie i sterowanie mobilnych robotów kołowych*, PWN, Warszawa, 2002.
- [2] Slotine J.J., Sastry S.S.: Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators, *International Journal of Control*, 38, s.465, 1983.
- [3] Piegat A.: *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 1999.
- [4] Rutkowski L.: *Metody i techniki sztucznej inteligencji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- [5] Rutkowska D., Piliński M., Rutkowski L.: *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, Wydawnictwo Naukowe, PWN, Warszawa, 1997.
- [6] Kowal M.: *Optimization of Neuro-Fuzzy Structures in Technical Diagnostics Systems*, University of Zielona Góra, Poland 2005.
- [7] Gianluca Antonelli, Stefano Chiaverini, Giuseppe Fusco: *A Fuzzy-Logic-Based Approach for Mobile Robot Path Tracking*, IEEE Transaction on Fuzzy Systems, vol. 15, NO. 2, April 2007.
- [8] Giergiel J., Hendzel Z., Żylski W., Trojnecki M.: *Zastosowanie metod sztucznej inteligencji w mechatronicznym projektowaniu mobilnych robotów kołowych*, AGH, Kraków, 2004.
- [9] Giergiel J., Hendzel Z., Żylski W.: Adaptive fuzzy controller for wheeled mobile robot, *Proc. of the 5-th Conference Neural Networks and Soft Computing*, Zakopane, 2000, 395-400.
- [10] Astom K.J., Wittenmark B.: *Adaptive control*, Addison-Wesley, New York, 1989.
- [11] Hunt K.J., Sbarbaro D., Żbikowski R., Gawthrop P.J.: Neural Networks for Control System-A Survey-Automatica, 28 (6), 1083-1112, 1992.

## **WPLYW ZMIAN LEPKOŚCI OLEJU SILIKONOWEGO W TŁUMIKU DRGAŃ SKRĘTNYCH NA WIELKOŚĆ ROZPRASZANEJ ENERGII I KĄT SKRĘCENIA WAŁU KORBOWEGO SILNIKA**

**Wojciech Homik**

Politechnika Rzeszowska  
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów  
e-mail: whomik@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *General description of fluids applied to viscotic torsional dampers are presented in this paper. Results of experimental investigations of fluid viscosity influence on dissipated energy and angle of torsion of crankshaft as well as results of numerical computations are also included.*

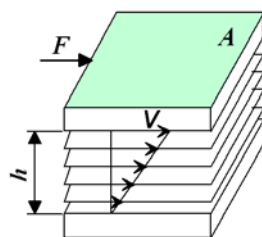
---

### **1. WPROWADZENIE**

W wiskotycznych tłumikach drgań skrętnych czynnikiem tłumiącym jest ciecz. W latach 20-tych minionego wieku były to oleje silikonowe produkowane na bazie olejów organicznych, które po stosunkowo krótkim użytkowaniu w trudnych warunkach, traciły swoje właściwości fizyczne. Obecnie do napełniania wiskotycznych tłumików drgań skrętnych stosuje się stabilizowane oleje silikonowe AK produkowane przez firmę Bayer i Wacker.

Oleje silikonowe AK są wodnisto czystymi cieczami o lepkościach od 0.65 do 1000000 cSt. Ich właściwości fizyczne zależą od struktury molekularnej [1 - 3]. Olej silikonowy zbudowany jest z łańcuchów składających się z atomów krzemu i tlenu, które połączone są grupami metylowymi mineralne. Podstawą właściwością oleju (tak zresztą jak i każdego innego płynu rzeczywistego) jest lepkość. Lepkość określa się jako opór wewnętrzny pojawiający się podczas przesuwania warstwy płynu. W tym sensie lepkość decyduje o wartości tarcia płynnego: im większa jest lepkość tym większe jest tarcie wewnętrzne płynu. W praktyce wyróżnia się lepkość dynamiczną i kinematyczną.

Zależność pomiędzy siłą tarcia płynnego, a szybkością ścinania cieczy podana została po raz pierwszy przez Newtona. Przy założeniu, że nieważka płytka o powierzchni  $A$  porusza się po warstewce płynu o grubości  $h$  z prędkością  $V$  (Rys. 1), można siłę  $F$  potrzebną do jej przesunięcia określić z wzoru [4]



Rysunek 1: Schemat rozkładu prędkości odpowiadający formule Newtona

$$F = \eta \cdot A \frac{dV}{dh} \quad (1)$$

W wiskotycznych tłumikach drgań skrętnych powszechnie stosuje się oleje silikonowe, których lepkość nie przekracza 200000 – 300000 cSt. Jest to głównie podyktowane problemami występującymi podczas napełniania tłumików.

W celu napełnienia tłumika olejem o wyższej lepkości należy podgrzać nie tylko olej ale także wszystkie części tłumika. Oleje o wysokich lepkościach stosowane są głównie w tłumikach, których wymiary geometryczne, ze względu na ograniczoną ilość miejsca np. w komorze silnika, nie mogą przekroczyć pewnych granicznych wartości.

Olej silikonowy podczas pracy tłumika, narażony jest na działania wysokich temperatur, a także poddawany jest ścinaniu. Te naturalne czynniki z punktu widzenia pracy tłumika, wpływają bezpośrednio na obniżenie lepkości roboczej oleju [5], a także powodują wzrost ciśnienia wewnątrz tłumika wywołany temperaturową zmianą objętości oleju.

## 2. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Do podstawowych parametrów geometrycznych wiskotycznego tłumika drgań skrętnych zalicza się (Rys. 2):  $R_{pz}$  - promień zewnętrzny pierścienia bezwładnościowego,  $R_{pw}$  - promień wewnętrzny pierścienia bezwładnościowego,  $b_z$ ,  $b_w$  - szerokości pierścienia bezwładnościowego (zewnętrzna, wewnętrzna),  $h_z$ ,  $h_b$ ,  $h_w$  - luzy (grubości filmów olejowych).

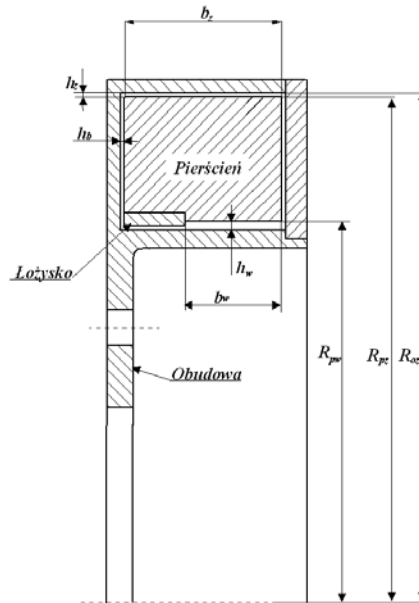
Wymienione wyżej parametry geometryczne mają decydujący wpływ na masowy moment bezwładności pierścienia bezwładnościowego tłumika, a także na wartość momentu tarcia i wartość współczynnika tłumienia  $\alpha$ , co z kolei w sposób bezpośredni przekłada się na wielkość rozpraszanej przez tłumik energii.

Przy założeniu postaciowego modelu odkształcenia cieczy, dla tłumika odpowiadającemu konstrukcji przedstawionej na Rys. 2, wartość momentu tarcia na pierścieniu bezwładnościowym i obudowie tłumika opisują wzory (2) i (3)

$$M_{tp} = (C_{pz} + C_{pw}) \dot{\varphi}_o - \left( C_{pz} \frac{R_{pz}}{h_z} - C_{pw} \frac{R_{pw}}{h_w} - C_{pb} \right) \dot{\varphi}_w, \quad (2)$$

$$M_{to} = C_{oz} \left( \dot{\varphi}_o - \frac{R_{pz}}{h_z} \dot{\varphi}_w \right) + C_{ow} \left( \dot{\varphi}_o - \frac{R_{pw}}{h_w} \dot{\varphi}_w \right) + C_{ob} \dot{\varphi}_w \quad (3)$$





Rysunek 2: Opis podstawowych parametrów geometrycznych tłumika

gdzie:  $C_{ij}$  – wielkości będące funkcją parametrów geometrycznych tłumika i właściwości cieczy [6].

Równanie dynamiczne ruchu obrotowego pierścienia wokół osi obrotu wału (pomijając mimośrodowość pierścienia ze względu na jego niewielkie luzy promieniowe) ma postać (4):

$$I_p \cdot \ddot{\varphi}_p = M_{tp} \quad (4)$$

Podstawiając do wzoru (4) zależność (2) oraz uwzględniając  $\ddot{\varphi}_p = \ddot{\varphi}_o + \ddot{\varphi}_w$  otrzymujemy

$$\ddot{\varphi}_w + \alpha \dot{\varphi}_w = F_w(t) \quad (5)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{I}{I_p} \left( C_{pz} \frac{R_{pz}}{h_z} - C_{pw} \frac{R_{pw}}{h_w} - C_{ob} \right) \quad (6)$$

Całkowita energia rozpraszana przez tłumik w czasie jednego okresu  $T$  jest równa pracy  $L$  wykonywanej przez tłumik w ciągu tego okresu  $T$ . Praca ta wyraża się wzorem:

$$L = \int_0^T [M_{tp} \dot{\varphi}_w - (M_{to} - M_{tp}) \dot{\varphi}_o] dt \quad (7)$$

W oparciu o wyprowadzone wzory została przeprowadzona analiza numeryczna, której wyniki pozwoliły stwierdzić (Rys. 3, Tabela1), że dla danego tłumika i danej częstotliwości rezo-

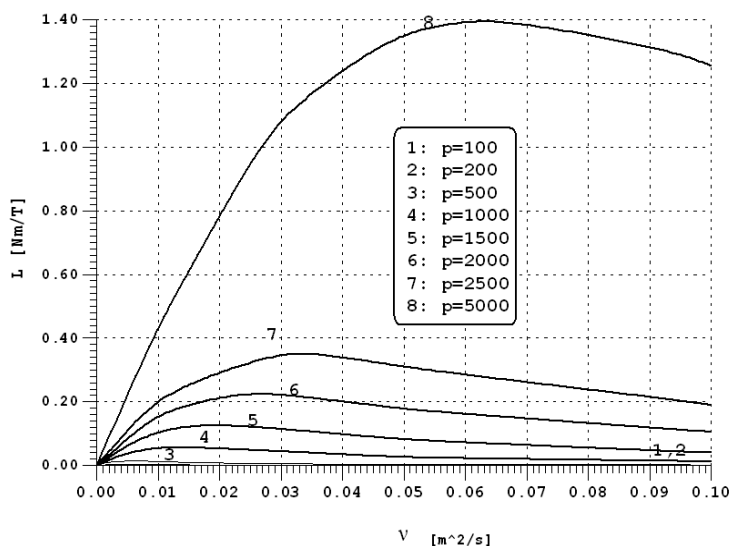
Rysunek 3: Wykresy pracy  $L$  tłumika w funkcji zmieniającej się lepkości

Tabela 1: Wyniki obliczeń

$p$ [rad/s]	$v_{opt}$ [ $m^2/s$ ]	$\alpha/p$
100	0.00125	1.000299
200	0.0025	1.000299
500	0.00625	1.000299
1000	0.0125	1.000299
1500	0.01875	1.000299
2000	0.025	1.000299
2500	0.03125	1.000299
5000	0.0625	1.000299

nansowej  $p$  (rad/s) istnieje pewna wartość optymalna lepkości  $v_{opt}$ , przy której rozpraszana energia przez tłumik jest maksymalna.

Okazało się również, że jeżeli dla każdej częstotliwości wymuszenia  $p$  dobierze się ciecz o odpowiedniej lepkości kinematycznej  $v_{opt}$ , to iloraz  $\alpha/p$  jest bliski 1. Wynik równy 1.000299 zamieszczony w tabeli 1 jest konsekwencją błędu metody, popełnianego podczas obliczeń. Błąd ten wynosi ok. 0.03%, a więc jest bardzo mały.

### 3. WYNIKI BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

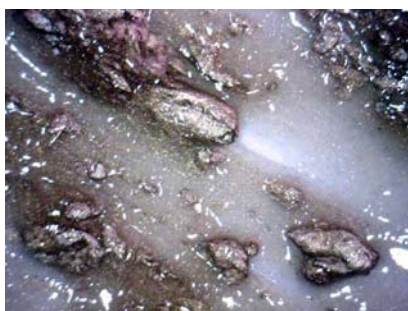
Oprócz wspomnianego powyżej zjawiska spadku lepkości oleju, w wiskotycznych tłumikach drgań skrętnych obserwujemy również niebezpieczny wzrost lepkości oleju. Jest on niejednokrotnie podyktowany:

- zjawiskiem dyfuzji zachodzącej pomiędzy brązowym łożyskiem pierścienia bezwładnościowego, a obudową tłumika – zjawiska tzw. szczepiania się łożyska z obudową oraz szczepiania się samego pierścienia z obudową (Fot. 1, 2),
- wchłaniania się oleju w porowatą strukturę pierścienia,
- wypłukiwania przez olej silikonowy podczas pracy tłumika grafitu z pierścienia,
- występowaniem tarcia suchego pomiędzy pierścieniem a obudową tłumika, po okresach długotrwałych przestojów silnika,
- niewłaściwej eksploatacji tłumika (np. przekraczania norm czasowych pracy tłumika)



Fotografia 1, 2: Uszkodzone powierzchnie obudowy tłumika

Badania doświadczalne prowadzone we współpracy z Firmą DAMPOL wykazały, że w wielu tłumikach [7], olej silikonowy miał konsystencję żelu z wyraźnymi wtrąceniami metalicznymi (Fot. 3), a nawet przypominał sobą ciało stałe (Fot. 4)



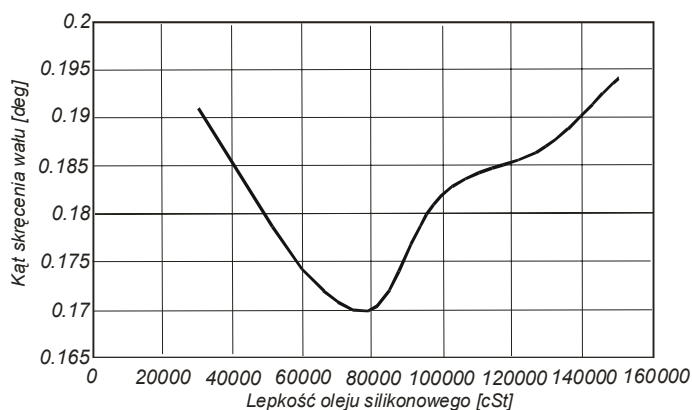
Fotografia 3: Zużyty olej silikonowy – żel



Fotografia 4: Zużyty olej silikonowy – ciało stałe

We współpracy z w/w firmą, zostały również przeprowadzone badania, których celem było określenie wpływu zmian lepkości oleju silikonowego w tłumiku na wartość kąta skręcenia wału korbowego silnika – ustalenie skuteczność tłumienia drgań skrętnych przez tłumik drgań.

Do badań został wykorzystany wiskotyczny tłumik drgań o średnicy zewnętrznej 285 mm i szerokości 38 mm, w którym zmieniano lepkość od wartości 30000 cSt do 150000 cSt. Badania przeprowadzono w zakresie prędkości eksploatacyjnych silnika. Wyniki przeprowadzonych badań obrazuje Rys. 4.

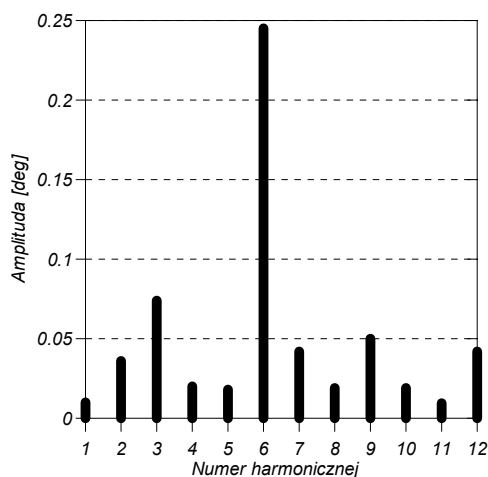


Rysunek 4: Zmiany kąta skręcenia wału w funkcji zmieniającej się lepkości oleju

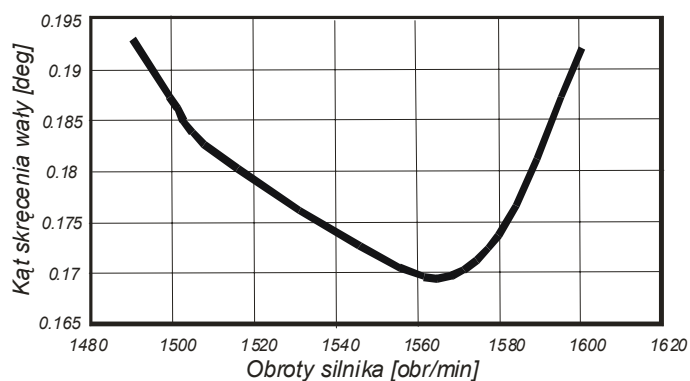
Analiza otrzymanych wyników pozwala stwierdzić, że istnieje pewna wartość optymalna lepkości oleju, przy której kąt skręcenia jest najmniejszy. W tym konkretnym przypadku wartość optymalna lepkości wynosi 80000 cSt. Stwierdzono również, że zarówno wzrost jak i spadek lepkości oleju silikonowego w tłumiku wpływa niekorzystnie na drgania skrętne wału korbowego. Przeprowadzone badania wykazały również, że spadek lepkości oleju w tłumiku prowadzi do zacierania się tłumika, zaś wzrost lepkości oleju ogranicza swobodny ruch pierścienia bezwładnościowego tłumika, sprawiając, że staje się on wzbudnikiem drgań skrętnych.

Badania doświadczalne prowadzone na przestrzeni lat dowodzą, że praktyczne znaczenie na drgania skrętne wału korbowego silnika mają harmoniczne do 12 rzędu [4, 6] i praktycznie na każdej z harmonicznych występują strefy rezonansu. Jednak największe amplitudy rezonansowe drgań skrętnych występują na 6 harmonicznej, co dokładnie widać na widmach drgań skrętnych wału bez tłumika (Rys.5) [8].

Mając powyższe na względzie dla każdej z przyjętych lepkości, ustalono wartość maksymalnej amplitudy na 6-tej harmonicznej i odpowiadającą jej prędkość obrotową wału. Wyniki badań zaprezentowano na Rys. 6.



Rysunek 5: Przykładowe widmo drgań skrętnych wału bez tłumika



Rysunek 6: Kąt skręcenia wału w funkcji prędkości obrotowej i lepkości (6 harmoniczna)

## LITERATURA

- [1] Katalog firmy Wacker.
- [2] Katalog Firmy Bayer
- [3] W. Homik, Brązowe czy teflonowe łożyskowanie pierścienia bezwładnościowego w wiskotycznym tłumiku drgań skrętnych?, *Acta Mechanica Slovaca*, 2-B/2008.
- [4] W. Wilkinson, *Ciecze newtonowskie*, WNT, Warszawa 1963.
- [5] W. Homik, Zmiany lepkości cieczy w czasie eksploatacji wiskotycznego tłumika drgań, praca złożona na Journal of KONES 2008

- 
- [6] W. Homik, Analiza zmodernizowanego geometrycznie wiskotycznego tłumika drgań skrętnych, *Mechanika*, **12**, Zeszyt 4, Wydawnictwa AGH, 1993.
  - [7] Firma DAMPOL - producent wiskotycznych i gumowych tłumików drgań skrętnych
  - [8] W. Homik, Analiza porównawcza drgań skrętnych wału korbowego silnika z tłumikiem wiskotycznym i gumowym, *XIII Konferencja Naukowa Wibroakustyki i Wibrotechniki*, Jachranka – Warszawa 2007, Przegląd Mechaniczny 11'07.

## **WERYFIKACJA ODPORNEGO STEROWANIA ROZMYTEGO RUCHEM NADAŻNYM MOBILNEGO ROBOTA KOŁOWEGO**

**Celina Jagielowicz - Ryznar**

Politechnika Rzeszowska, Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki  
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów  
e-mail: cjagielo@prz.rzeszow.pl

---

**Abstract:** *The problems addressed in the thesis concern important and up-to-date issue of the mechatronic design of the robust control systems of follow-up motion of the mobile wheeled robots. In the thesis the synthesis of control algorithms based on stability theory of Lapunov was carried out along with simulation analysis of the three control algorithms of the follow-up motion of the mobile wheeled robot with consideration of the parametric inaccuracy: analytic robust sliding control algorithm, robust sliding control algorithm with fuzzy compensation control, fuzzy algorithm of sliding control. The mobile wheeled robots Pioneer-2DX was a real object, which was used for verification of research.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Znajomość opisu matematycznego obiektu lub budowa jego symulatora różnymi technikami daje możliwość opracowania efektywnych algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym, szczególnie obiektami nieliniowymi, do których należą mobilne roboty kołowe. Sterowanie ruchem mobilnych robotów kołowych zostało rozwiązane w ujęciu współczesnej teorii sterowania układami nieliniowymi. Rozważono układy śledzenia zadanej trajektorii ruchu. W algorytmach sterowania ruchem zostały uwzględnione niepewności modelowania. W syntezy algorytmów sterowania zastosowane zostało klasyczne ujęcie bazujące na teorii układów o zmiennej strukturze oraz metody sterowania rozmytego oparte o układy z logiką rozmytą. Badania eksperymentalne przeprowadzono na obiekcie rzeczywistym Pioneer-2DX. Do badań tych wykorzystano metodę szybkiego prototypowania.

### **2. NADAŻNE STEROWANIE ODPORNE RUCHEM MOBILNYCH ROBOTÓW KOŁOWYCH**

Dynamiczne równania ruchu 2-kołowego mobilnego robota podane w postaci [1, 2, 4]

$$M(q, a)\ddot{q} + C(q, \dot{q}, a)\dot{q} + F(\dot{q}, a) = u \quad (1)$$

W zadaniu sterowania odpornego, dla zadanej trajektorii ruchu wybranego punktu mobilnego robota  $q_d$  i występujących niedokładności parametrycznych, należy wyznaczyć momenty

napędzające kół, które zapewnią, że  $q_2 \rightarrow q_{2d}$  gdy  $t \rightarrow \infty$ . Zapiszemy równanie (1) w dogodnej postaci do syntezy algorytmu sterowania

$$Y(\ddot{q}, \dot{q})a = u \quad (2)$$

Założmy, że w danej klasie modeli matematycznych (1) występują niedokładności parametryczne modelowania co oznacza, że istnieje wektor parametrów  $\hat{a} \in \mathbb{R}^N$  oraz  $\gamma \in \mathbb{R}_+^N$  gdzie  $\hat{a}$ ,  $\gamma$  to wielkości znane, takie, że są spełnione zależności

$$|\hat{a}_i - a_i| \leq \gamma_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$V(t) = 0.5s^T Ms \quad (4)$$

gdzie  $s = \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q}$ ,  $\tilde{q} = q - q_d$ ,  $q_d$  jest zadaną trajektorią ruchu dwukrotnie różniczkowalną, a  $\Lambda$  to macierz diagonalna dodatnio określona. Jej pochodna wynosi

$$\dot{V}(t) = s^T (M\ddot{q} - M\dot{v}) + .5s^T \dot{M}s \quad (5)$$

gdzie  $v = \dot{q}_d - \Lambda \tilde{q}$ ,  $\dot{v} = \ddot{q}_d - \Lambda \dot{\tilde{q}}$ .

Wyznaczając  $M\ddot{q}$  z równania (1) i wstawiając do (5) otrzymamy

$$\dot{V}(t) = s^T (u - M\dot{v} - Cv - F(v)) \quad (6)$$

gdzie wykorzystano macierz skośnosymetryczną  $\dot{M} - 2C$  do zredukowania członu  $0.5s^T \dot{M}s$ . Wybierzmy sygnał sterowania w postaci

$$u = u_s - K_D s \quad (7)$$

$u_s = \hat{u} - u_o$  jest sterowaniem ślizgowym,

$\hat{u}$  jest sterowaniem kompensacyjnym nieliniowości obiektu,

$u_o = k \operatorname{sgn}(s)$  jest sterowaniem odpornym uwzględniającym niedokładności modelowania, w którym sygnał  $k \operatorname{sgn}(s)$  jest zdefiniowany jako wektor o elementach  $k_i \operatorname{sgn}(s_i)$ .

Ostatecznie sygnał sterowania o zmiennej strukturze zapiszemy jako

$$u = \hat{u} - k \operatorname{sgn}(s) - K_D s \quad (8)$$

Mając na uwadze właściwości ruchu ślizgowego układów o zmiennej strukturze [6], wyznaczono sygnał sterowania równoważnego w postaci

$$\hat{u} = Y_v(\dot{q}, v, \dot{v})\hat{a} \quad (9)$$

Wprowadzając (9) do (6) pochodna (5) będzie

$$\dot{V}(t) = s^T (Y_v(\dot{q}, v, \dot{v})\tilde{a} - k \operatorname{sgn}(s) - K_D s) \quad (10)$$



gdzie  $\tilde{a} = \hat{a} - a$ .  
Ponieważ

$$Y_i \tilde{a} - k_i \text{sgn}(s) = \left\{ \sum_{j=1}^m Y_{vij} \tilde{a}_j - k_i \text{sgn}(s_i) \right\}^T, i = 1, 2; m = 6 \quad (11)$$

to jeżeli wybierzemy współczynniki wzmocnień sterowania odpornego

$$k_i = \sum_{j=1}^m |Y_{vij}| \gamma_j + \eta_i \quad (12)$$

wówczas otrzymamy

$$\dot{V}(t) \leq -s^T K_D s - \sum_{i=1}^2 \eta_i |s_i| \quad (13)$$

Powyższy warunek występowania ruchu ślizgowego gwarantuje, że trajektoria układu osiągnie w skończonym czasie powierzchnię ślizgową  $s=0$  i pozostanie na niej. Warstwa graniczna

$$B(t) = \{x : |s(t)| \leq \Phi\} \quad (14)$$

W dalszych rozważaniach przyjęto sterowanie ciągłe w postaci

$$u = \hat{u} - k \text{sat}(s) - K_D s \quad (15)$$

gdzie funkcja  $\text{sat}(\cdot)$  zdefiniowana jest wzorem [7,8]

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} \text{sgn}(s) & \text{dla } |s| > \Phi \\ \frac{s}{\Phi} & \text{dla } |s| \leq \Phi \end{cases} \quad (16)$$

Jeżeli warunek ruchu ślizgowego (13) jest spełniony na zewnątrz warstwy granicznej, wówczas w skończonym czasie zapewniona jest dokładność sterowania [8]

$$|x(t)| \leq \Phi / \lambda^{n-1} \equiv \varepsilon \quad (17)$$

gdzie  $n$  jest wymiarem wektora stanu.

### 3. PROJEKTOWANIE STEROWANIA ŚLIZGOWEGO Z ROZMYTYM STEROWANIEM RÓWNOWAŻNYM

Mając na uwadze analizę sterowania odpornego, założmy, że wybraliśmy sterowanie w postaci (15)

$$u = \hat{u} - k \text{sat}(s) - K_D s \quad (18)$$

ze sterowaniem równoważnym (8)

$$\hat{u} = \hat{M}\dot{v} + \hat{C}(\dot{q})v + \hat{F}(v) \quad (19)$$

Dla zadanej dokładności sterownia  $\varepsilon$  należy przyjąć  $\Phi$  i  $\lambda$  aby była spełniona zależność  $\varepsilon = \Phi / \lambda^{n-1}$ . W tym celu napiszmy

$$u_{fuzz} = \hat{M}\dot{v} + \hat{C}(\dot{q})v + \hat{F}(\dot{q}) \quad (20)$$

Mając na uwadze zależność (9) zapiszmy wektor sterowania równoważnego w postaci

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{v}_1 + \dot{v}_2)a_1 + (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)a_2 + \dot{v}_1 a_3 + 2(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1)v_2 a_4 + a_5 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}_1 \\ (\dot{v}_1 + \dot{v}_2)a_1 + (\dot{v}_2 - \dot{v}_1)a_2 + \dot{v}_2 a_3 + 2(\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1)v_1 a_4 + a_6 \operatorname{sgn} \dot{\alpha}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Elementy wektora sterowania kompensującego nieliniowości mobilnego robota, można zapisać jako

$$u_{fuzz1} = g_1 + g_2 + g_3 \quad (22)$$

$$u_{fuzz2} = g_4 + g_5 + g_6 \quad (23)$$

gdzie  $u_{fuzz1} = f_1, u_{fuzz2} = f_2$  a składowe elementów w których zastosowano aproksymację oporów ruchu funkcją tangens hiperboliczny, wynoszą

$$\begin{aligned} g_1 &= (\dot{v}_1 + \dot{v}_2)a_1 + (\dot{v}_1 - \dot{v}_2)a_2 + \dot{v}_1 a_3 \\ g_2 &= 2\dot{\alpha}_2 v_2 a_4 \\ g_3 &= -2\dot{\alpha}_1 v_2 a_4 + a_5 (1 - e^{-\beta \dot{\alpha}_1}) / (1 + e^{-\beta \dot{\alpha}_1}) \\ g_4 &= (\dot{v}_1 + \dot{v}_2)a_1 + (\dot{v}_2 - \dot{v}_1)a_2 + \dot{v}_2 a_3 \\ g_5 &= 2\dot{\alpha}_1 v_1 a_4 \\ g_6 &= -2\dot{\alpha}_2 v_1 a_4 + a_6 (1 - e^{-\beta \dot{\alpha}_2}) / (1 + e^{-\beta \dot{\alpha}_2}) \end{aligned} \quad (24)$$

Model rozmyty [5]

$$f(\bar{x}) = \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^N \tau_k \bar{y}^k}{\sum_{k=1}^N \tau_k} \quad (25)$$

gdzie

$$\tau_k = \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^k}(\bar{x}) \quad (26)$$

wartość  $\tau_k$  oznacza stopień aktywności (stopień odpalenia) reguły  $R^{(k)}$ .

Niech

$$\delta_k(x) = \frac{\tau_k}{\sum_{k=1}^N \tau_k} \quad (27)$$

Wówczas wyjście ostre z modelu rozmytego zapiszemy jako

$$\bar{y} = W^T \delta(\bar{x}) \quad (28)$$

gdzie  $W^T = [w_1, w_2, \dots, w_N]$  jest wektorem generowanym przez singletony poszczególnych reguł bazy reguł modelu rozmytego takim, że  $w_k = \bar{y}^k = \bar{y}^{i_1 i_2} = g(e_1^{i_1}, e_2^{i_2})$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,

$\delta(x) = [\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_N(x)]^T$  ma interpretację wektora funkcji podstawowych.

Nieliniowe funkcje (24) zapiszemy jako

$$\begin{aligned} g_1 &= W_1^T \delta_1(x_1) + \varepsilon_1 \\ g_2 &= W_2^T \delta_2(x_2) + \varepsilon_2 \\ g_3 &= W_3^T \delta_3(x_3) + \varepsilon_3 \\ g_4 &= W_4^T \delta_4(x_4) + \varepsilon_4 \\ g_5 &= W_5^T \delta_5(x_5) + \varepsilon_5 \\ g_6 &= W_6^T \delta_6(x_6) + \varepsilon_6 \end{aligned} \quad (29)$$

$w_i \in \mathbb{R}^{N_i}$ ,  $\delta_i(x_i) \in \mathbb{R}^{N_i}$ ,  $N_i$  jest liczbą reguł,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

W wyniku tej procedury otrzymujemy sześć podukładów rozmytych a rozmyte sterowanie równoważne (20) zapiszemy w postaci

$$u_{fuzz} = \begin{bmatrix} W_1^T, W_2^T, W_3^T, & 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, & W_4^T, W_5^T, W_6^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{fuzz1} \\ \varepsilon_{fuzz2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

gdzie wektor błędu aproksymacji zdefiniujemy następująco

$$\varepsilon_{fuzz} = [\varepsilon_{fuzz1}, \varepsilon_{fuzz2}]^T = [[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3], [\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6]]^T \quad (31)$$

Rozmyta aproksymacja nieliniowa funkcji wektorowej (21) w skróconej postaci

$$u_{fuzz} = W_{fuzz} \delta_{fuzz} + \varepsilon_{fuzz} \quad (32)$$

Natomiast rozmyte sterowanie równoważne (20) zapiszemy jako

$$\hat{u}_{fuzz} = W_{fuzz} \delta_{fuzz} + \hat{\varepsilon}_{fuzz} \quad (33)$$

Prawo sterowania (8) zapiszemy jako

$$u = W_{fuzz} \delta_{fuzz} + \hat{\varepsilon}_{fuzz} - k \operatorname{sgn}(s) - K_D s \quad (34)$$

Pochodną funkcji (6) wyrazimy następująco

$$\dot{V}(t) = s^T (\hat{\varepsilon}_{fuzz} - \varepsilon_{fuzz} - k \operatorname{sgn}(s) - K_D s) \quad (35)$$

Zapisując błędy aproksymacji w postaci

$$\varepsilon_{fuzz} = Y_{fuzz}(\dot{q}, v, \dot{v})a \quad (36)$$

$$\hat{\varepsilon}_{fuzz} = Y_{fuzz}(\dot{q}, v, \dot{v})\hat{a} \quad (37)$$

wyznamy współczynniki wzmocnień sterowania odpornego

$$k_i = \sum_{j=1}^m |Y_{fuzzij}| \gamma_j + \eta_i, \quad i=1,2; \quad j=1,2,\dots,6 \quad (38)$$

które zapewniają odporność projektowanego algorytmu sterowania na zakłócenia parametryczne a sygnał sterowania spełnia warunek występowania ruchu ślizgowego.

Uzyskane oszacowania otrzymamy

$$\varepsilon_{fuzz} = \begin{bmatrix} |2h_1| & 0 & |h_1| & |(2v_2 + 2\dot{\alpha}_2)h_2 - 2\dot{\alpha}_1 h_3| & |.5\beta(1 - z_1^2)h_3| & 0 \\ |2h_4| & 0 & |h_4| & |(2v_1 + 2\dot{\alpha}_1)h_5 - 2\dot{\alpha}_2 h_6| & 0 & |.5\beta(1 - z_2^2)h_6| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (39)$$

#### 4. PROJEKTOWANIE ROZMYTEGO STEROWANIA ŚLIZGOWEGO

Mając na uwadze warunek występowania ruchu ślizgowego

$$s_i [u_i - Y_{vi}(\dot{q}, v, \dot{v})\hat{a}] \leq \eta_i |s_i| \quad (40)$$

ruch ten zapewnia prawo sterowania ślizgowego

$$u_s = \hat{u} - k \operatorname{sgn}(s) \quad (41)$$

gdzie  $\hat{u}$  jest sterowaniem równoważnym a  $k \operatorname{sgn}(s)$  jest wersją sterowania odpornego. Założmy, że wybraliśmy sterowanie  $u_s$  jako układ z logiką rozmytą  $u_{fuzz}$  tzn.

$$u_s = u_{fuzz} \quad (42)$$

Jeżeli rozmyte sterowanie ślizgowe  $u_{fuzzi}$  spełnia występujące warunki

$$\begin{aligned} u_{fuzzi} &\leq -\eta_i + Y_{vi}(\dot{q}, v, \dot{v})a \text{ dla } \text{sgn}(s) > 0, \\ u_{fuzzi} &\geq \eta_i + Y_{vi}(\dot{q}, v, \dot{v})a \text{ dla } \text{sgn}(s) < 0 \end{aligned} \quad (43)$$

wówczas mamy zapewnioną zbieżność błędu  $e(t) = [(q - q_d)^T, (\dot{q} - \dot{q}_d)^T]^T$  do zera.

$$\text{sgn}_i[u_{fuzzi} - Y_{vi}(q, v, \dot{v})a] \leq \eta_i \quad (44)$$

Jeżeli wprowadzamy modyfikacje algorytmu sterowania zastępując go wersją „miękką”, ale wówczas otrzymujemy uchyb statyczny tzn.

$$|e_i(t)| \leq \frac{\varphi_i}{\lambda_i} \equiv \varepsilon_i, i = 1, 2 \quad (45)$$

Konsekwencją wprowadzenia „miękkiej” wersji sterowania ślizgowego jest fakt spełnienia warunku ruchu ślizgowego na zewnątrz otoczenia rozmaitości ślizgowej oraz możliwość zaprojektowania „gładkiego” sterowania ślizgowego to znaczy w miejsce sterowania wprowadzamy sterowanie

$$u_s = \hat{u} - \text{ksat}(s/\varphi) \quad (46)$$

Jeżeli przyjmiemy

$$u_{fuzzi} = Y_v(q, v, \dot{v})\hat{a} - \text{ksat}(s/\varphi) \quad (47)$$

wówczas po skończonym czasie błąd sterowania  $e(t) = q - q_d$  będzie spełniał oszacowanie (48). Zapiszemy wektor sterowania odpornego w postaci elementów

$$g_7 = k_1 \text{sat}(s_1/\varphi_1), \quad g_8 = k_2 \text{sat}(s_2/\varphi_2) \quad (48)$$

Przyjmując oszacowanie

$$k_i^* = \sup_{t \in (0, T]} \left| \sum_{j=1}^m |Y_{vij}| \gamma_j \right| \quad i = 1, 2 \quad (49)$$

zależności przyjmują postać

$$g_7 = [k_1^* + \eta_1] \text{sat}(s_1/\varphi_1), \quad g_8 = [k_2^* + \eta_2] \text{sat}(s_2/\varphi_2) \quad (50)$$

Funkcje te zapiszmy w postaci

$$g_7 = w_7^T \delta(s_1) + \varepsilon_7, \quad g_8 = w_8^T \delta(s_2) + \varepsilon_8 \quad (51)$$

W wyniku przyjęcia aproksymacji sterowania odpornego modelem rozmytym otrzymujemy ostatecznie osiem podukładów rozmytych a rozmyte sterowanie ślizgowe zapiszemy następująco

$$\mathbf{u}_{\text{fuzz}} = \begin{bmatrix} w_1^T & w_2^T & w_3^T & 0 & 0 & 0 & w_7^T \\ 0 & 0 & 0 & w_4^T & w_5^T & w_6^T & w_8^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{\text{fuzz1}} \\ \varepsilon_{\text{fuzz2}} \end{bmatrix} \quad (52)$$

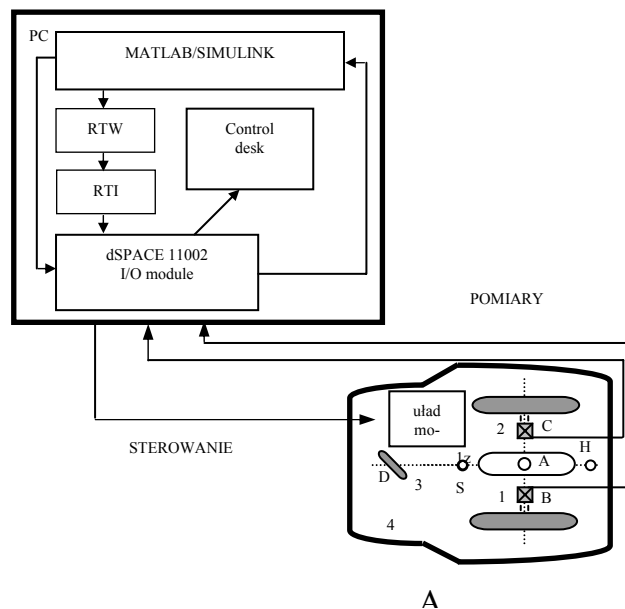
Gdzie wektor błędu aproksymacji zapiszemy jako

$$\varepsilon_{\text{fuzz}} = [\varepsilon_{\text{fuzz1}} \varepsilon_{\text{fuzz2}}]^T = [[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_7], [\varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_8]]^T \quad (53)$$

## 5. BADANIA EKSPERYMETALNE

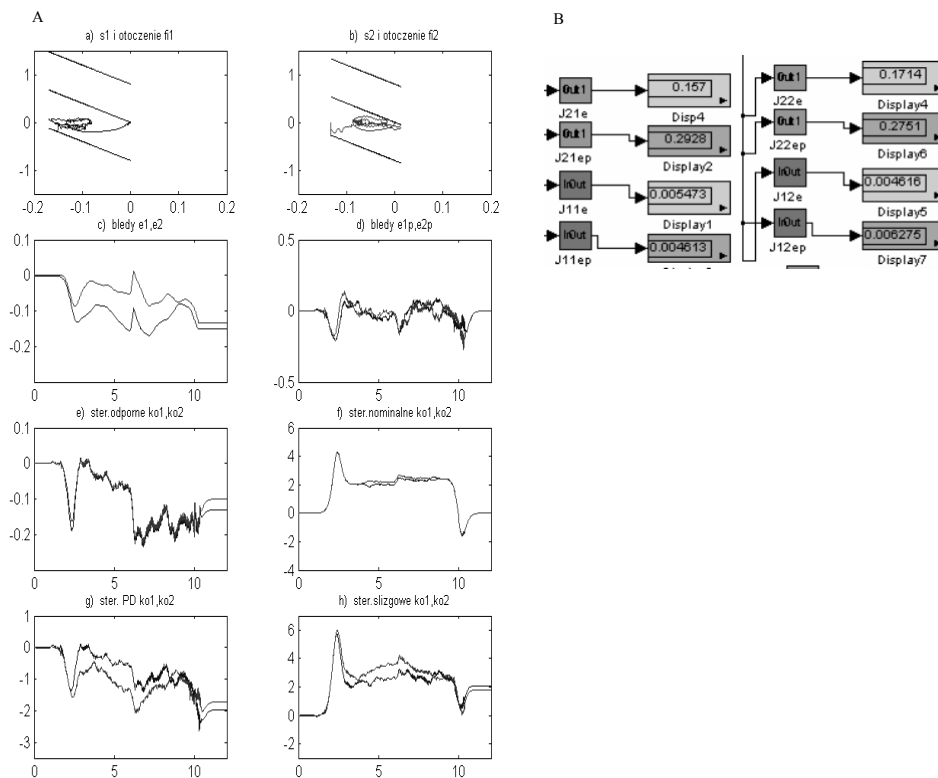
### 5.1. Opis stanowiska do badań eksperymentalnych

W badaniach eksperymentalnych algorytmów sterowania w czasie rzeczywistym wykorzystano metodę szybkiego prototypowania. Jest ona nowoczesnym narzędziem wspomaganego komputerowo projektowania. Dzięki tej metodzie możliwa jest budowa sterowników o otwartej architekturze, a także udostępnia ona projektantowi efektywne narzędzie do generowania oraz testowania własnych rozwiązań na etapie modelowania i sterowania układami dynamicznymi. W obecnym czasie metoda szybkiego prototypowania oparta jest na specjalizowanym sprzęcie i technikach komputerowych, które zawierają procesy sygnałowe. Środowisko do przeprowadzania badań eksperymentalnych oparte jest na środowisku programowym Matlab/Simulink, a także platformie sprzętowej firmy dSPACE, która została wykorzystana do modelowania oraz sterowania ruchem nadążnym mobilnego robota Pioneer-2DX.



Rysunek 1: Schemat ideowy stanowiska badawczego do prototypowania [2]

W badaniach eksperymentalnych obiektu rzeczywistego, wykorzystano system szybkiego prototypowania z procesorem sygnałowym TMS320C31, który umieszczony został na karcie DS1102 firmy dSPACE, a także biblioteki oprogramowania karty. Karta jest połączona z komputerem nadrzędnym. Dzięki karcie możliwe jest generowanie sterowań i rejestracja pomiarów przez wykorzystanie zasobów sprzętowych takich jak generator sterowań (PWM), a także interfejsy enkoderów optycznych. Nadrzędną jednostką systemu stanowi komputer PC, w którym zainstalowane jest oprogramowanie (ControlDesk 1.0) umożliwiające wizualizację oraz rejestrację danych pomiarowych, jak również zarządzające eksperymentem. Jednostka nadrzędna w postaci komputera stanowi platformę umożliwiającą generowanie programów badanych układów w środowisku programowym Matlab 5.21/Simulink 2.2. Programy te są przetwarzane w postaci kodu języka programowania C i implementowane do pamięci karty. W ten sposób stają się one aplikacjami działającymi w czasie rzeczywistym. W przeprowadzonych eksperymentach badawczych mobilnego robota Pioneer-2DX, do karty DS1102 przyłączone zostały dwa wejścia z enkoderów przyrostowych mierzących pręd-



Rysunek 2: A: Ruch punktu A po trajektorii kołowej z zakłóceniem: a – rozmaitość ślizgowa dla koła 1, b – rozmaitość ślizgowa dla koła 2, c, d – błędy, e – sterowanie odporne, f – sterowanie nominalne, g – sterowanie PD, h – sterowanie ślizgowe; B: schemat blokowy pakietu Matlab/Simulink metryk miary błędów

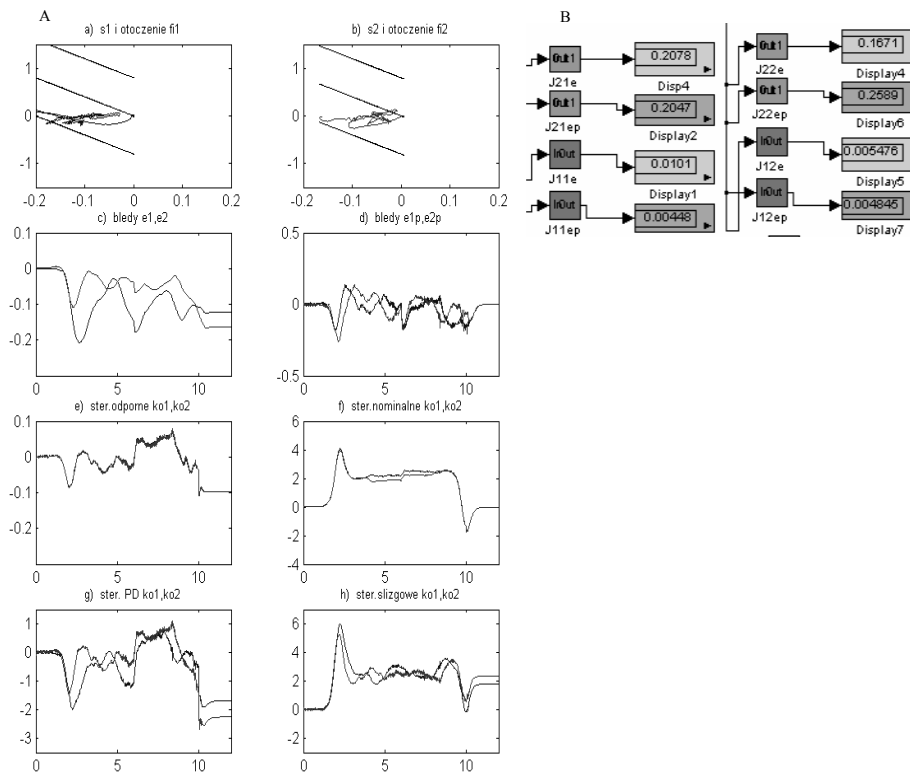
kości kątowe kół napędzających robot oraz dwa generatory sterowań PWM przesyłające sygnały do sterowników mocy dwóch silników napędzających koła robota.

### 5.2. Badania eksperymentalne analitycznego sterowania ślizgowego

Jednym z przeprowadzonych eksperymentalnych testów analitycznego sterowania ślizgowego był test, gdy wybrany punkt A mobilnego robota przemieszcza się po trajektorii kołowej, przy założeniu, że występuje zakłócenie parametryczne  $\Delta m_4 = 8$  [kg] w czasie  $t \geq 8$  [s]. W symulacji uwzględnia się trzy fazy ruchu: a) rozruch, b) jazda ze stałą prędkością punktu A równą  $V_A = 0.3$  [m/s] oraz c) hamowanie.

### 5.3. Badania eksperymentalne sterowania ślizgowego z rozmytym sterowaniem równoważnym

Kolejnym z przeprowadzonych eksperymentalnych testów był test sterowania ślizgowego z rozmytym sterowaniem równoważnym, gdy wybrany punkt A mobilnego robota prze-



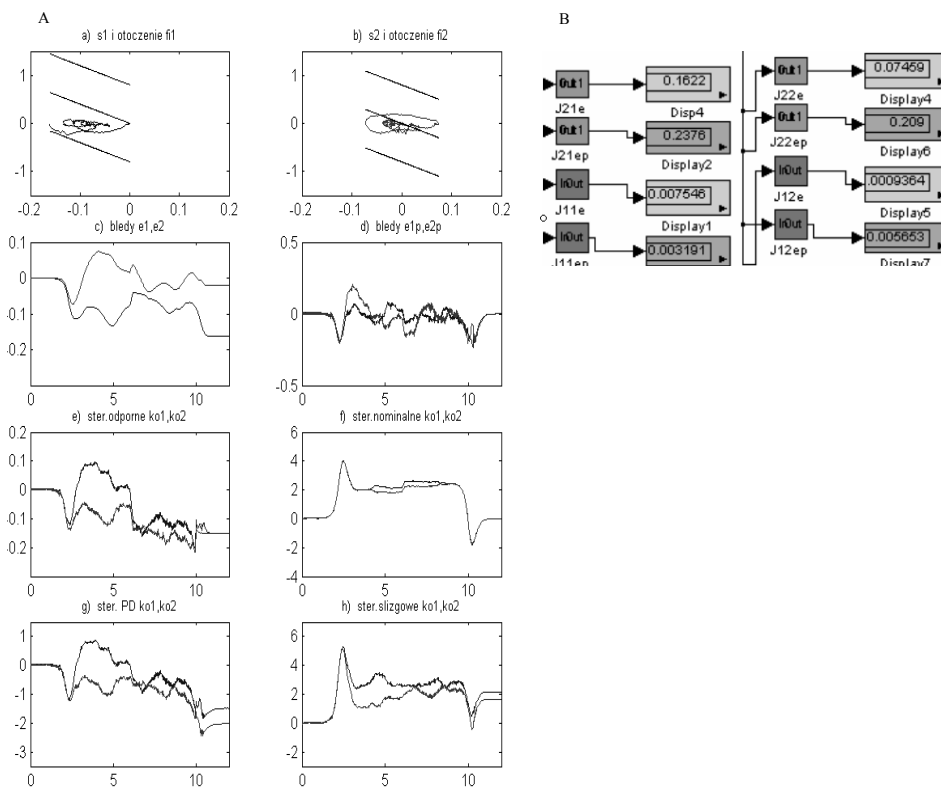
Rysunek 3: A: Ruch punktu A po trajektorii kołowej z zakłóceniem: a – rozmaitość ślizgowa dla koła 1, b – rozmaitość ślizgowa dla koła 2, c, d – błędy, e – sterowanie odporne, f – sterowanie nominalne, g – sterowanie PD, h – sterowanie ślizgowe; B: schemat blokowy pakietu Matlab/Simulink metryk miary błędów



mieszczą się po trajektorii kołowej, przy założeniu, że występuje zakłócenie parametryczne  $\Delta m_4 = 8$  [kg] w czasie  $t \geq 8$  [s]. W symulacji uwzględnia się jak poprzednio trzy fazy ruchu: a) rozruch, b) jazda ze stałą prędkością punktu A równą  $V_A = 0.3$  [m/s] oraz c) hamowanie.

#### 5.4. Badania eksperymentalne rozmytego sterowania ślizgowego

Kolejnym z przeprowadzonych eksperymentalnych testów był test rozmytego sterowania ślizgowego przy takich samych założeniach co poprzednie przedstawione testy.



Rysunek 4: A: Ruch punktu A po trajektorii kołowej z zakłóceniem: a – rozmaitość ślizgowa dla koła 1, b – rozmaitość ślizgowa dla koła 2, c, d – błędy, e – sterowanie odporne, f – sterowanie nominalne, g – sterowanie PD, h – sterowanie ślizgowe; B: schemat blokowy pakietu Matlab/Simulink metryk miary błędów

## 6. WNIOSKI

Z przeprowadzonych testów eksperymentalnych wynika, iż wzrost błędów realizacji przemieszczeń i prędkości kół napędzających widoczny jest w chwili startu i hamowania oraz podczas występowania zakłócenia parametrycznego tj. zmiany masy ramy mobilnego robota. Zmiany wartości sygnału sterowania nominalnego widoczne w symulacjach wystę-

pują w charakterystycznych okresach ruchu tj. rozpędzanie oraz hamowanie. Zmiany wartości sygnałów są również zauważalne na wszystkich składowych sterowania ślizgowego. Z przeprowadzonych badań eksperymentalnych wynika również, że zastosowanie algorytmu rozmytego sterowania ślizgowego uzyskuje najlepszą jakość realizacji założonego ruchu dla kolejnych trajektorii i zakłóceń parametrycznych. Z analizy przebiegu kolejnych parametrów i sterowań wynika, że dany układ sterowania szybko kompensuje zmianę parametrów robota. Uzyskane rezultaty testów eksperymentalnych dowodzą, iż zastosowane algorytmy sterowania aproksymują nieliniowości układu a wygenerowane sygnały sterowania utrzymują trajektorię układu w otoczeniu wartości ślizgowych  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0$ . Analiza przebiegów sygnałów potwierdza skuteczność zaprojektowanego rozmytego algorytmu ślizgowego sterowania a rezultaty testów dowodzą poprawność przyjętego sposobu realizacji zadania syn-tezy algorytmu sterowania.

#### LITERATURA

- [1] Z. Hendzel, J. Giergiel, C. Jagielowicz: *Rozmyta realizacja odpornego sterowania ruchem mobilnego robota kołowego*, Przegląd Mechaniczny nr 9, 20-24, 2005.
- [2] Z. Hendzel, C. Jagielowicz: *Eksperymentalna weryfikacja odpornego algorytmu sterowania ruchem mobilnego robota kołowego*, Projektowanie Mechatroniczne, Praca zbior. Pod red. T. Uhla, Wydawnictwo Katedry Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH Kraków 2002, str.80-89.
- [3] Z. Hendzel, C. Jagielowicz: *Odporne sterowanie ruchem mobilnego robota kołowego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Mechanika z.60, Problemy dynamiki konstrukcji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, str. 249-256.
- [4] A. Piegat: *Modelowanie i sterowanie rozmyte*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 1999.
- [5] Hendzel Z., Giergiel J., Jagielowicz C.: *Rozmyta realizacja algorytmu sterowania ruchem mobilnego robota kołowego*, Projektowanie Mechatroniczne, Praca zbior. pod red. T. Uhla, Wydawnictwo Katedry Robotyki i Dynamiki Maszyn AGH Kraków 2003, str. 69-77.
- [6] J.J. Slotine, W. Li: *Applied nonlinear control*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [7] J.J. Slotine, S.S. Sastry: *Tracking control of non linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators*, International Journal Control, Vol. 38, No. 2, 1983, 465-492.
- [8] M. Vidysagar: *Nonlinear systems analysis, 2-nd ed.*, Prentice Hall, New Jersey 1993.
- [9] R.R. Yager, D.P. Filev: *Podstawy modelowania i sterowania rozmytego*, WNT, Warszawa, 1995.

## IDENTYFIKACJA USZKODZENIA W PAŚMIE ALUMINIUM Z WYKORZYSTANIEM MIĘKKICH METOD OBLICZENIOWYCH

Michał Jurek, Leonard Ziemiański

Katedra Mechaniki Konstrukcji, Politechnika Rzeszowska  
ul. Poznańska 2, 35-959 Rzeszów  
e-mail: {mjurek, ziele}@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *This paper presents an application of non-destructive damage detection method based on structural wave propagation phenomenon. A set of laboratory experiments on aluminium strip was carried out. Several failure cases were introduced into the laboratory model. Elastic wave was actuated and received by piezoelements. Recorded signals were processed using wavelet analysis. Obtained signal parameters were used as an input vector of artificial neural networks. Several network architectures were tested.*

---

### 1. WPROWADZENIE

Monitorowanie stanu konstrukcji (SHM, ang. *Structural Health Monitoring*) jest zagadnieniem stanowiącym w ostatnich latach obszar intensywnych badań grup badawczych związanych z różnorodnymi gałęziami przemysłu. Przykładowo, okresowa kontrola elementów konstrukcji dotyczy branży budowlanej, natomiast w przypadku konstrukcji lotniczych konieczna jest ciągła kontrola stanu jej określonych elementów. Wymaga się, aby fakt przeprowadzenia oceny stanu konstrukcji nie skutkował jej osłabieniem, zatem zachodzi konieczność stosowania nieniszczących metod wykrywania uszkodzeń (NDT ang. *Nondestructive Testing*). Skuteczny system monitorowania konstrukcji pozwala uniknąć awarii i katastrof oraz obniżyć koszty eksploatacji maszyn i obiektów budowlanych. Istotne jest, aby wykrycie uszkodzenia następowało jak najwcześniej. Daje to możliwość podjęcia określonych działań, które pozwolą zapobiec jego rozprzestrzenianiu się. Opracowywane nieinwazyjne metody detekcji uszkodzeń skupiają się na wykrywaniu i ocenie defektów w postaci zarysowań, pęknięć i delaminacji. Wiele spośród metod nieniszczących to metody lokalne. Przykładami takich technik są badania ultradźwiękowe, radiograficzne, szczelności czy też ocena wizualna. Główną wadą wymieniony metod jest konieczność posiadania wstępnych informacji dotyczących lokalizacji uszkodzenia. Ponadto ich zastosowanie ogranicza się do dostępnych miejsc konstrukcji i z reguły jest czasochłonne. Mając na uwadze wspomniane

ograniczenia stosowalności metod lokalnych od kilku lat prowadzone są poszukiwania metod pozwalających na monitorowanie całej konstrukcji. Metody te, określane jako globalne umożliwiają ocenę stanu konstrukcji o znacznych rozmiarach, nie wykluczając miejsc niedostępnych.

Dobre wyniki w zakresie detekcji, lokalizacji i identyfikacji uszkodzeń uzyskiwane są w przypadku podejść bazujących na analizie fali sprężystej [1, 2]. Wystąpienie uszkodzenia skutkuje lokalną zmianą sztywności konstrukcji, a to z kolei powoduje zaburzenia propagującej fali sprężystej. Przedstawione i omówione w niniejszej pracy wyniki badań laboratoryjnych bazują na zjawisku propagacji fali sprężystej, wykorzystując przy tym zaawansowane techniki przetwarzania sygnałów oraz sztuczne sieci neuronowe.

## 2. FALE SPREŻYSTE

Cechą fal sprężystych, rozumianych jako mechaniczne zaburzenie rozprzestrzeniające się w ośrodku sprężystym, jest ich przestrzenny charakter. W przypadku elementów o charakterystycznej geometrii opisane zostały specyficzne fale sprężyste. Dla ciał stałych o stosunkowo małej grubości charakterystyczna jest fala Rayleigh'a. Jest to fala propagująca na powierzchni ciała, wchodząca na głębokość równą długości fali. Fala Rayleigh'a wykorzystywana jest w technikach wykrywania uszkodzeń powierzchni. W przypadku elementów o dostatecznie małej grubości, porównywalnej z długością fali sprężystej występują fale Lamba. Są to fale propagujące pomiędzy dwiema równoległymi powierzchniami. Ich charakterystyczną cechą jest zdolność propagacji na duże odległości z małymi stratami amplitudy, co czyni je przydatnymi w nieniszczących metodach wykrywania uszkodzeń. Fala Lamba charakteryzuje się silną dyspersyjnością. Kolejną jej cechą jest wielopostaciowość, nawet w przypadku niskich częstotliwości występują dwie formy – symetryczna (S0) i antysymetryczna (A0). Wraz ze wzrostem częstotliwości możliwe jest wystąpienie kolejnych postaci fal, co w przypadku zagadnienia monitorowania konstrukcji znacznie utrudnia analizę zarejestrowanej odpowiedzi konstrukcji. Przykładowo dla aluminium dwie podstawowe postaci fal (S0, A0) otrzymywane są dla współczynnika częstotliwość-grubość elementu mniejszego od 1.6 MHz.mm, natomiast dla wyższych wartości pojawiają się mody S1, A1, S2, A2 [3]. Ponadto wraz ze zmianą częstotliwości fali zmieniają się wartości amplitud poszczególnych postaci, osiągając wartości maksymalne dla różnych częstotliwości. Porównując podstawową symetryczną i antysymetryczną postać fali większą prędkością fazową przy jednocześnie mniejszej dyspersyjności charakteryzuje się postać S0. Chociaż przyjmuje się, że dla zagadnień detekcji uszkodzeń korzystniejsza jest niska dyspersyjność fali to uzyskane wyniki dowodzą, iż bardziej czuła na wystąpienie uszkodzenia jest postać A0. Stosowanie fal Lamba w zadaniach detekcji uszkodzeń wymaga poznania i zrozumienia ich własności oraz pewnego doświadczenia.

U podstaw metody wykrywania uszkodzeń, bazującej na analizie propagacji fali sprężystej, leżą zjawiska odbicia i transmisji, które pojawia się jako skutek wystąpienia zaburzenia, np uszkodzenia. W konsekwencji modyfikacji ulegają parametry fali, takie jak amplituda, faza, czas przelotu, długość fali. Zmiany wymienionych parametrów mogą zawierać informacje pozwalające stwierdzić wystąpienie uszkodzenia

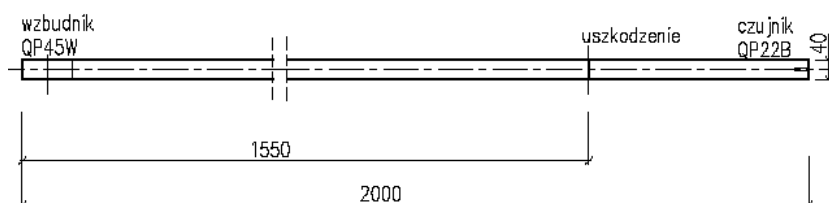
i zidentyfikować jego cechy, tj. wielkość oraz miejsce wystąpienia. Z uwagi na pojawianie się odbić od krawędzi modelu laboratoryjnego oraz przetworników spełniających rolę wzbudników fali analiza zarejestrowanych sygnałów jest mocno utrudniona. Zastosowanie odpowiedniego przetwarzania sygnałów umożliwi zminimalizować wpływ występowania fal odbitych.

Na etapie badań laboratoryjnych możliwe jest takie dobranie miejsca wystąpienia uszkodzenia, dla którego problem fal odbitych od krawędzi elementu jest wyeliminowany. Ponadto właściwy wybór kształtu impulsu wymuszenia, tj. jego długości (liczba cykli fali sinus) i rodzaju modulacji pozwalają zminimalizować efekt odbicia fali wymuszenia od krawędzi przetwornika.

Jako wzbudniki i czujniki fali sprężystej stosowane są elementy piezoelektryczne, pozwalające generować i rejestrować sygnały o szerokim zakresie częstotliwości i amplitud. Ich zaletami są również niewielkie rozmiary i niska masa, przez co nie zmieniają one w znaczącym stopniu parametrów analizowanej konstrukcji. Również w badaniach, których dotyczy niniejsza praca zastosowane zostały piezoelementy.

### 3. TESTY LABORATORYJNE

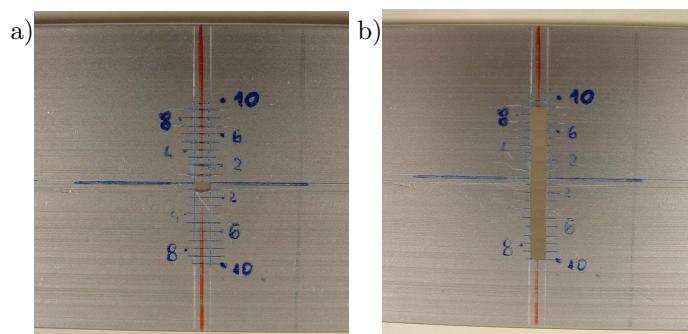
Testy laboratoryjne przeprowadzono na elemencie aluminiowym w postaci pasma. Na modelu zamocowano piezoelementy, będące wzbudnikiem i czujnikiem fali. Wymiary modelu laboratoryjnego oraz lokalizację elementów piezo przedstawia (Rys. 1).



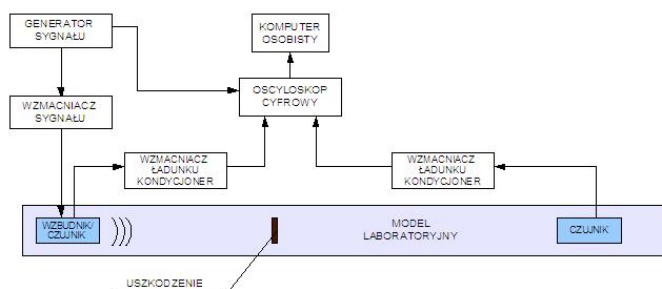
Rysunek 1: Model laboratoryjny

Pomiędzy elementami piezo, w odległości 1550mm od krawędzi przy której zamocowano wzbudnik, wprowadzone zostało uszkodzenie w postaci otworu o wymiarach 1mm x 2mm (Rys. 2a). W kolejnych etapach było ono powiększane o 1mm co pokazano na Rys. 2b, osiągając ostatecznie wymiar 20mmx 2mm.

Schemat toru pomiarowego przedstawia Rys. 3. Sygnał generowany przez generator fal TTi TG1010 podlegał wzmocnieniu przez liniowy wzmacniacz piezo EPA-104 firmy PiezoSystems. Jako aktuator i sensory fali zastosowane zostały elementy piezo odpowiednio QP45W i QP22B, przy czym element QP45W posłużył jednocześnie jako wzbudnik i czujnik fali. Odpowiedź modelu laboratoryjnego wzmocniona przez zastosowanie wzmacniacza ładunku i kondycjonera sygnału 422E02 firmy PCB Piezotronics została zarejestrowana przez oscyloskop cyfrowy LeCroy WaveSurfer 424. Dalsza obróbka sygnału przeprowadzona została przy użyciu komputera osobistego i pakietu Matlab.



Rysunek 2: Uszkodzenie wprowadzone w modelu laboratoryjnym: a) 1x2mm, b) 19x2mm



Rysunek 3: Schemat toru pomiarowego

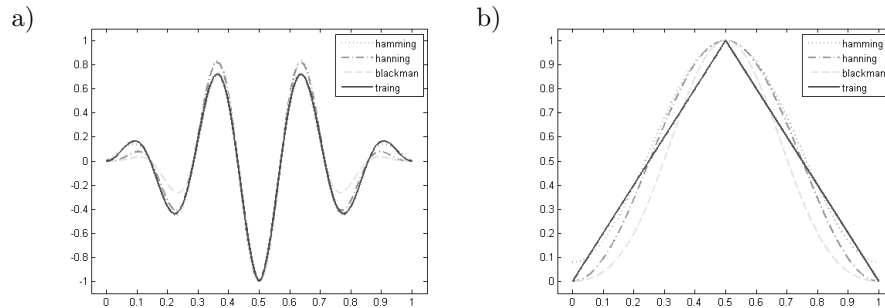
Jako sygnały wymuszenia zastosowano paczki złożone z 3.5, 5.5 oraz 7.5 cykli sinus modulowane oknem Blackaman'a, Hanning'a, Hamming'a oraz trójkątnym (Rys. 4a,b). Częstotliwości wymuszenia przedstawia Tabela 1.

Częstotliwości wymuszenia przedstawia Tabela 1. Wartości częstotliwości wynikają z liczby cykli sinus w impulsie oraz optymalnego doboru długości impulsu wymuszenia ze względu na geometrię piezowzbudnika.

Tabela 1: Częstotliwości dla kolejnych form impulsu wymuszenia (w kHz)

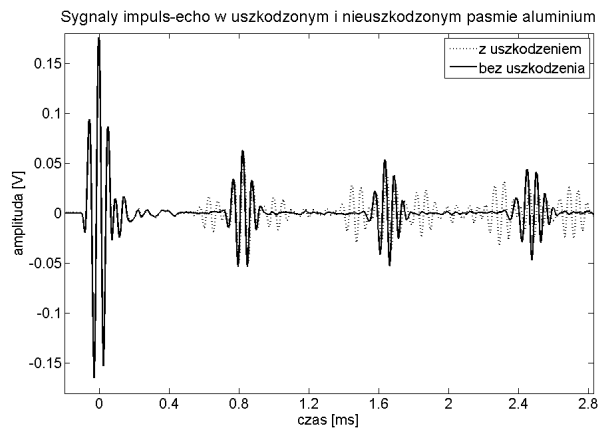
3.5x sin	5.5x sin	7.5x sin
4.4	4.2	3.8
17.5	22.0	22.5
22.8	27.5	28.5

W trakcie pomiarów laboratoryjnych zarejestrowane zostały odpowiedzi modelu na wymuszenia opisane powyżej. Przykład przebiegu czasowego odpowiedzi modelu na wymuszenie impulsem 3.5x sinus modulowanym oknem Hanning'a o częstotliwości 17.5 kHz przedstawia Rys. 5. Zestawiono przebiegi czasowe dla elementu uszkodzo-

Rysunek 4: Sygnał wymuszenia: impuls a)  $3.5x \sin$ , b) okna modulacji

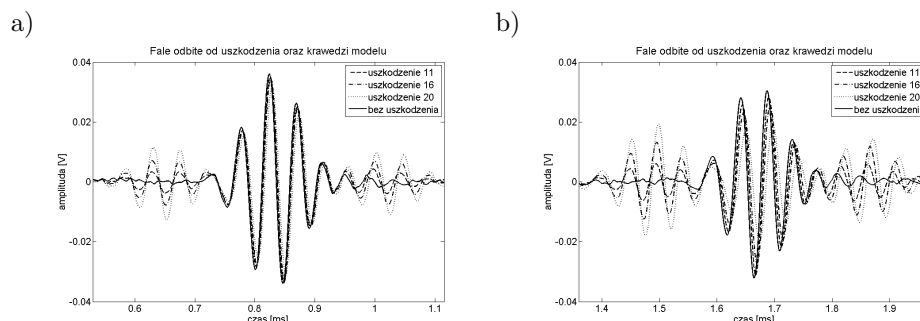
nego oraz bez uszkodzenia. Ponieważ Rys. 5 przedstawia sygnał zarejestrowany przez piezoelement będący równocześnie wzbudnikiem i czujnikiem fali, stąd łatwo na rysunku wyodrębnić wymuszenie oraz kolejne paczki odbite od krawędzi elementu.

Dodatkowo dla przebiegów w elemencie z uszkodzeniem pojawia się fala odbita od uszkodzenia. Dokładniej pokazują to Rys. 6a, b – odpowiednio pierwsza i trzecia paczka fal odbitych od krawędzi modelu oraz uszkodzenia. Wyraźnie widoczna jest zmiana amplitudy oraz przesunięcie fazowe w zależności od wielkości uszkodzenia.



Rysunek 5: Przebiegi czasowe w elemencie uszkodzonym oraz nieuszkodzonym

W celu ekstrakcji istotnych z punktu widzenia identyfikacji uszkodzenia parametrów fali sprężystej stosuje się zaawansowane metody analizy sygnałów, jak na przykład analiza falkowa [5, 4]. Zarejestrowane przebiegi czasowe poddano obróbce z wykorzystaniem dekompozycji falkowej. Wykonano dekompozycję z użyciem falki *coiflet*, dostępnej w pakiecie Matlab. Do dalszej analizy wzięto pod uwagę współczynniki falkowe z poziomu 10, 11 oraz 12.



Rysunek 6: Fale odbite od uszkodzenia oraz krawędzi modelu

#### 4. IDENTYFIKACJA USZKODZENIA

Z uwagi na fakt, iż identyfikacja uszkodzeń konstrukcji na podstawie określonych parametrów fali sprężystej jest zadaniem odwrotnym, bazując na zarejestrowanych sygnałach w celu określenia wielkości uszkodzenia zastosowano sztuczne sieci neuronowe [6]. Procedura uczenia SSN polega na minimalizowaniu wielkości błędu pomiędzy wartością oczekiwaną i obliczoną. W testach użyto sieci ze wsteczną propagacją błędów oraz algorytmem uczenia Levenberg'a-Marquardt'a. Jako miarę błędu przyjęto błąd średniokwadratowy (MSE ang. Mean Square Error). Procedurę uczenia i testowania wykonywano 44 razy. Dysponowano 20 wzorcami z czego 14 użyto jako wzorce uczące, pozostałe 6 jako wzorce testujące. Jako wektory wejściowe SSN zastosowano kombinacje współczynników falkowych z poziomów 10, 11 i 12 o maksymalnej wartości bezwzględnej. Przetestowano wektory o dwóch i trzech elementach. Przeprowadzono testy sieci o zróżnicowanej liczbie neuronów w warstwie ukrytej. Wybrane wyniki pokazano w Tabeli 2 i 3 gdzie zestawiono średnie błędy uczenia dla sieci o 2 do 6 neuronów w warstwie ukrytej oraz wektora wejściowego złożonego ze współczynników z poziomu 10 i 11, 11 i 12 oraz 10, 11, 12. Tabele 2 oraz 3 przedstawiają wyniki identyfikacji otrzymane na podstawie analizy odpowiedzi modelu na sygnał wymuszenia w postaci paczki  $3.5x \sin$  z modulacją Blackmana o częstotliwości odpowiednio 17.5 kHz oraz 22.8 kHz. W obydwu prezentowanych przypadkach najmniejszy błąd uzyskano dla sieci o 2 neuronach w warstwie ukrytej i wektorze wejściowym złożonym z współczynników falkowych z poziomem 10, 11 i 12.

Tabela 2: Wartości błędów testowania SSN dla wymuszenia  $3.5x \sin$  z mod. Blackmana i częst. 17.5 kHz

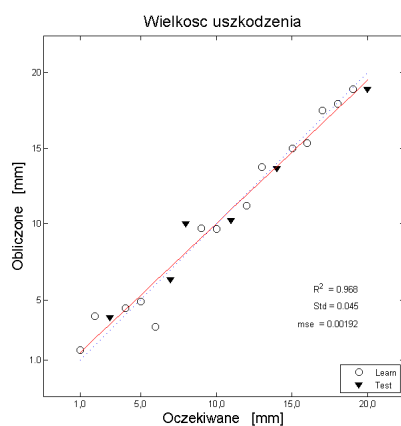
L. neuron. w warstwie ukrytej	2	3	4	5	6
Wektor wej. (10, 11)	0.0302	0.0360	0.0405	0.0426	0.0352
Wektor wej. (11, 12)	0.0096	0.0100	0.0236	0.0198	0.0207
Wektor wej. (10, 11, 12)	<b>0.0070</b>	0.0158	0.0228	0.0300	0.0274

Przykładowy wynik identyfikacji przedstawiony w formie graficznej prezentuje Rys. 7.



Tabela 3: Wartości błędów testowania SSN dla wymuszenia  $3.5x \sin$  z mod. Blackmana i częst. 22.8 kHz

L. neuron. w warstwie ukrytej	2	3	4	5	6
Wektor wej. (10, 11)	0.0021	0.0104	0.0106	0.0175	0.0193
Wektor wej. (11, 12)	0.0039	0.0030	0.0074	0.0102	0.0142
Wektor wej. (10, 11, 12)	<b>0.0013</b>	0.0018	0.0050	0.0034	0.0040



Rysunek 7: Wynik identyfikacji uszkodzenia sieć (3-2-1)

Wyniki identyfikacji dla kolejnych form wymuszenia, przy użyciu SSN o architekturze (3-2-1) pokazuje Tabela 4.

Tabela 4: Wartości błędów testowania SSN dla kolejnych form impulsu wymuszenia

	Hanning	Hamming	Blackman	trójk.
<b>3.5x sin</b>				
częst. 17.5 kHz	0.0061	0.0046	0.0070	0.0077
częst. 22.8 kHz	0.0019	0.0022	0.0013	0.0032
<b>5.5x sin</b>				
częst. 22.0 kHz	0.0077	0.0078	0.0073	0.0065
częst. 27.5 kHz	0.0042	0.0023	0.0087	0.0121
<b>7.5x sin</b>				
częst. 22.5 kHz	0.0033	0.0028	0.0031	0.0049
częst. 28.5 kHz	0.0012	0.0017	0.0011	0.016

Analizując powyższą tabelę można wskazać pewne kombinacje długości impulsu, sposobu modulacji oraz częstotliwości wymuszenia, dla których błąd uczenia jest mniej-

szy, jednak otrzymane wyniki nie są jednoznaczne.

## 5. WNIOSKI

W oparciu o dane z pomiarów laboratoryjnych oraz przeprowadzone próby zastosowań sztucznych sieci neuronowych w połączeniu z analizą falkową w zadaniu identyfikacji wielkości uszkodzenia sformułować można następujące wnioski:

- możliwe jest identyfikowanie, na podstawie zmian parametrów fali sprężystej, stosunkowo niewielkich uszkodzeń,
- dokładność identyfikacji zależy od formy (długości, sposobu modulacji) oraz częstotliwości sygnału wymuszenia jednakże trudno wskazać najlepszą formę wymuszenia z punktu widzenia identyfikacji uszkodzenia.

*Przedstawione w pracy wyniki badań zrealizowano dzięki finansowemu wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, grant numer: R10 005 02.*

## LITERATURA

- [1] P.S.Tua, S.T. Quek, Q. Wang, Detection of cracks in plates using piezo-actuated Lamb waves. *Smart Material Structures*, 13, (2004), 643-660
- [2] P. Nazarko, L. Ziemianski, Experiments on damage detection in strips based on soft computing methods and wave propagation. C.A. Mota Soares et al. eds. *3rd European Conf. on Comput. Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Lisbon, Portugal, June 5-8, 2006.
- [3] W.J. Staszewski, B.C. Lee, F. Scarpa, Structural health monitoring using laser vibrometry. *Smart Material Structures*, 13, (2004), 251-260
- [4] P. Rizzo, F.L. di Scalea, Feature extraction for defect detection in strands by guided ultrasonic waves. *Structural Health Monitoring*, 5, (2006), 297-308
- [5] M. M. Reda Taha, A. Noureldin, J. L. Lucero, T. J. Baca, Wavelet Transform for Structural Health Monitoring: A Compendium of Uses and Features. *Structural Health Monitoring*, 5, (2006), 267-295
- [6] Z. Waszczyszyn L. Ziemianski, Parameter Identification of Materials and structures. Z. Mroz and G.E. Stavroulakis eds. *CISM Courses and Lectures*, 469, (2005), 256-340

## **DYNAMICZNE EFEKTY DZIAŁANIA OBCIĄŻENIA UŻYTKOWEGO NA CIĘGNO NOŚNE NAPOWIETRZNEJ KOLEI DWULINOWEJ**

**Marta Knawa, Danuta Bryja**

Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław  
e-mail: {marta.knawa, danuta.bryja}@pwr.wroc.pl

---

**Abstract:** *The model of a carrying rope of a bicable ropeway system under in-service loads is introduced to analyze dynamic response of the cable during: start and steady ride of passenger carriers, an emergency stop of operating system. The pendulum model of a moving carrier is formulated to define loads acting on the cable. Equations of motion of system composed of continuous cable and a set of traveling pendulums are derived by applying Ritz approximate method and Lagrangian description of motion. Some illustrative numerical results are presented to demonstrate applicability of proposed method in an analysis of cable vibrations.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

W Polsce transport z wykorzystaniem napowietrznych kolei linowych nie jest jeszcze rozwinięty w porównaniu do innych krajów. Jednak realizacja kilku obiektów, które odpowiadają współczesnym wymaganiom technicznym (np. kolej na Szyndzielnię, Jaworzynę Krynicką, Kasprowy Wierch) stanowi pewien krok wprzód na drodze unowocześniania systemów kolei linowych w naszym kraju. Na całym świecie koleje linowe znalazły zastosowanie jako środek transportu materiałów (np. w kopalniach, fabrykach) oraz ludzi – w szczególności w terenach górskich, ośrodkach turystycznych i parkach rozrywki, ale również coraz częściej w terenach miejskich jako środek komunikacji.

Zagadnienia związane z bezpieczeństwem i komfortem użytkowania kolei linowych stanowią priorytet podczas ich projektowania i analizy. Ponieważ możemy wyróżnić wiele typów kolei, publikacje podejmujące temat dynamiki tego typu konstrukcji często dotyczą konkretnych, istniejących obiektów [1, 2]. Najczęściej rozważane są w nich pewne wybrane problemy, gdyż kompleksowa analiza kolei linowych jest zagadnieniem dość skomplikowanym – głównie ze względu na charakter pracy tych konstrukcji, stanowiących układ o stale zmieniającej się masie i geometrii wskutek zmiany lokalizacji obciążenia.

W niniejszej pracy przedmiotem rozważań jest dynamika wieloprzelotowego ciężnego nośnego kolei dwulinowej o ruchu okrężnym, w warunkach obciążenia użytkowego.

Sformułowano model obciążenia ciągną zbiorem ruchomych gondoli pasażerskich, w postaci zbioru wahadeł poruszających się ze stałą prędkością poziomą i drgających w płaszczyźnie zwisu ciągną. Uwzględniono krótkotrwałe obciążenia impulsowe, które działają na linię nośną w trakcie: a) wyjazdu wagonika ze stacji i jego wjazdu na trasę, b) nagłego zatrzymania systemu operacyjnego. Dla układu złożonego z ciągną i poruszających się po nim gondoli wyprowadzono nieliniowe równania ruchu w dziedzinie czasu, uwzględniające wzajemną interakcję przelotów ciągną i pojazdów. Do wyprowadzenia równań zastosowano metodę aproksymacyjną Ritz'a i lagranżowski opis ruchu. Na podstawie przedstawionej teorii opracowano program komputerowy do analizy drgań. Przedstawiono wybrane wyniki analiz numerycznych, które świadczą o możliwości zastosowania proponowanej metody w analizie dynamicznej ciągną nośnego kolei dwulinowych.

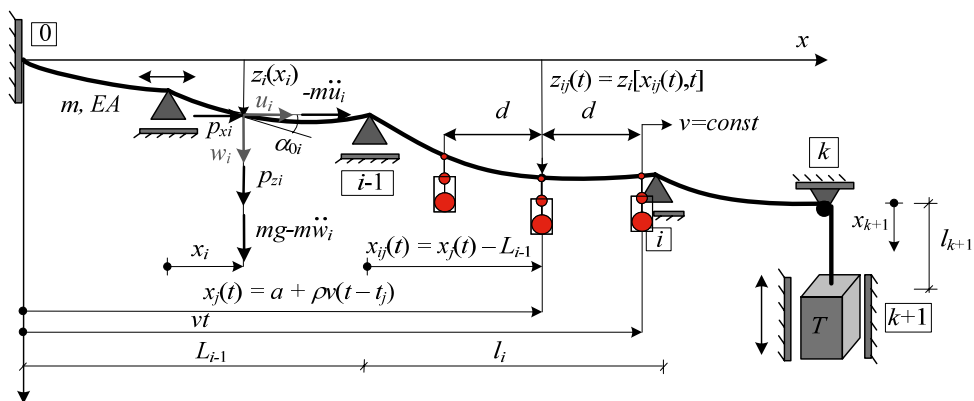
## 2. CIĘGNO NOŚNE Poddane RUCHOMEMU OBCIĄŻENIU UŻYTKOWEMU

### 2.1. Model ciągną nośnego

W pracy rozważamy płaski model wieloprzelotowego ciągną nośnego napowietrznej kolei dwulinowej o ruchu okrężnym. Przyjęto na podstawie [1], że praca linii napędowej nie ma znaczącego wpływu na zachowanie się linii nośnej. Ciągną rozpatrywane jest jako ciągłe, doskonale wiotkie i jednorodne. Właściwości materiału podlegają prawu Hooke'a a zależność pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami jest zdefiniowana wzorem Green'a -Lagrange'a postaci

$$\varepsilon_i(x_i, t) = \cos^2 \alpha_{0i} (u_i' + z_i' w_i') + \cos^2 \alpha_{0i} (u_i'^2 / 2 + w_i'^2 / 2). \quad (1)$$

W analizie dynamicznej brane są pod uwagę tylko sprężyste odkształcenia ciągną (nie uwzględnia się wpływów niemechanicznych). Ciągną jest zakotwione na jednym końcu trasy (w stacji górnej) i napięte przeciwwagą o masie  $T$  na jej drugim końcu (w stacji dolnej). Sposób podparcia ciągną na podporach pośrednich umożliwia przesuw poziomy z pominięciem tarcia. Trasa ciągną składa się z kilku przelotów oznaczonych numerami  $i = 1 \dots k$  oraz odcinka napinającego oznaczonego numerem  $i = k+1$  (Rys. 1).



Rysunek 1: Model ciągną nośnego obciążonego zbiorem ruchomych gondoli pasażerskich

Krzywe wstępno (statycznego) zwisu ciężna  $z_i(x_i)$  są funkcjami lokalnej współrzędnej geometrycznej  $x_i$ , gdzie  $0 \leq x_i \leq l_i$ , i kształtowane są przez obciążenie stałe w postaci ciężaru własnego ciężna. Stan przemieszczenia ciężna względem krzywej  $z_i(x_i)$  w  $i$ -tym przelocie opisują w płaszczyźnie zwisu dwie składowe: pionowa  $w_i(x_i, t)$  i pozioma  $u_i(x_i, t)$ , będące ciągłymi funkcjami lokalnej współrzędnej geometrycznej  $x_i$  oraz czasu  $t$ .

Cząstkowe równania różniczkowe opisujące ruch ciężna w  $i$ -tym przelocie zostały szczegółowo wyprowadzone w pracy [3], a ich końcowa postać jest następująca

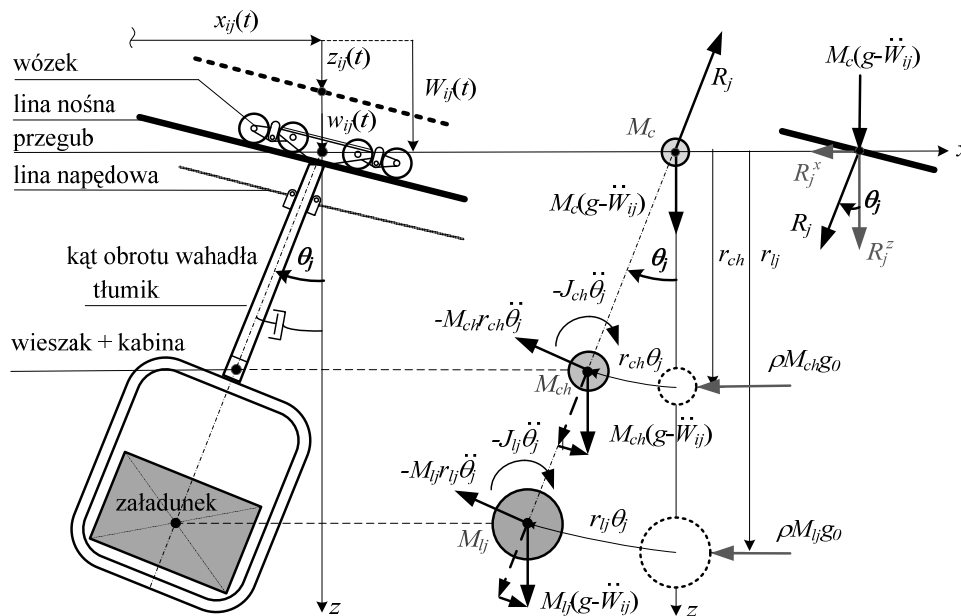
$$-[(H_{0i} + \Delta H_i)(1 + u_i')] + m(\cos \alpha_{0i})^{-1} \ddot{u}_i = p_{xi}, \quad (2)$$

$$-[(H_{0i} + \Delta H_i)(z_i' + w_i')] + m(\cos \alpha_{0i})^{-1} \ddot{w}_i = p_{zi}, \quad (3)$$

gdzie  $m$  – masa jednostkowa ciężna,  $\alpha_{0i}$  – kąt kierunkowy w stanie odniesienia,  $H_{0i} = N_{0i} \cos \alpha_{0i}$  – wstępny naciąg ciężna (składowa pozioma siły osiowej  $N_{0i}$ ),  $\Delta H_i = \Delta N_i \cos \alpha_{0i}$  – dynamiczny przyrost naciągu obliczony względem konfiguracji ciężna w stanie odniesienia,  $p_{xi}, p_{zi}$  – składowe rozłożonego obciążenia użytkowego,  $(\cdot) = \partial(\cdot) / \partial t$ .

## 2.2. Obciążenie użytkowe – model gondoli pasażerskiej w postaci wahadła

Obciążenie użytkowe ciężna stanowią gondole pasażerskie, które poruszają się po jego trasie w stałych odstępach  $d$  i przy założeniu stałej poziomej prędkości operacyjnej  $v$  (Rys. 1). Schemat pojedynczego wagonika pasażerskiego z wyróżnieniem jego części składowych przedstawiono na Rys. 2.



Rysunek 2: Model gondoli pasażerskiej w postaci wahadła i schemat obciążenia ciężna

W celu sformułowania dyskretnego modelu pojazdu, rozłożone masy: wózka, wieszaka wraz z pustą kabiną pasażerską oraz załadunku zostały zastąpione przez masy skupione oznaczone odpowiednio jako  $M_c$ ,  $M_{ch}$  i  $M_{ij}$ . Wykorzystując to uproszczenie, wagonik zastąpiono wahadłem fizycznym o jednym stopniu swobody  $\theta_j(t)$ , który jest kątem obrotu wagonika w płaszczyźnie  $xz$ . Indeks  $j=1\dots N$  oznacza numer wagonika (wahadła). Przemieszczenie pionowe  $W_{ij}(t)$   $j$ -tego wahadła poruszającego się wzdłuż  $i$ -tego przelotu cięzna wynika ze wstępnie zakrzywionej trasy cięzna, opisanej funkcją  $z_i(x_i)$ , oraz pionowego przemieszczenia cięzna  $w_i(x_i, t)$ . Położenie wahadła względem początku przelotu określa funkcja  $x_i = x_{ij}(t) = x_j(t) - L_{i-1}$ , gdzie  $L_{i-1} = l_1 + \dots + l_{i-1}$ . Funkcja  $x_j = a + \rho v(t - t_j)$  definiuje ruch poziomy wahadła, które w chwili  $t_j = (j - 1) d/v$  znajduje się na początku trasy. Wtedy  $W_{ij}(t) = z_{ij}(t) + w_{ij}(t)$ , gdzie  $z_{ij}(t) = z_i[x_{ij}(t), t]$  i  $w_{ij}(t) = w_i[x_{ij}(t), t]$ . Jeśli gondole startują ze stacji górnej, czyli kierunek ruchu strumienia wahadeł jest zgodny ze zwrotem osi  $x$ , to przyjmujemy  $a = 0$  i  $\rho = 1$ . W przeciwnym przypadku należy przyjąć  $a = L = l_1 + \dots + l_k$  i  $\rho = -1$ . Poziomy ruch wahadła  $x_{ij}(t)$  oraz poziome przemieszczenie cięzna  $u_i(x_i, t)$  są traktowane jako niezależne, ponieważ ruch wagonika po linii nośnej ma charakter toczny z pominięciem tarcia, zaś nachylenie trasy cięzna jest traktowane jako niewielkie.

W trakcie działania kolei linowej cięžno nośne w  $i$ -tym przelocie jest obciążone następującymi siłami: reakcją wieszaka gondoli  $R_j$ , ciężarem wózka  $M_c g$  oraz siłą bezwładności  $-M_c \ddot{W}_{ij}$ . Ponieważ każdy wieszak jest wychylony o kąt  $\theta_j$ , reakcja  $R_j$  ma dwie składowe: pionową  $R_j^z$  i poziomą  $R_j^x$  (Rys. 2). Po wprowadzeniu oznaczenia  $M_j = M_{ch} + M_{ij}$  i założeniu małego kąta wychylenia  $\theta_j$  (z uwagi na stosowane w pojazdach urządzenia tłumiące) składowe reakcji wieszaka można zdefiniować następująco:  $R_j^z = M_j(g - \ddot{w}_{ij})$ ,  $R_j^x = R_j^z tg \theta_j \cong R_j^z \theta_j = g M_j \theta_j - M_j \ddot{w}_{ij} \theta_j$ , przy czym uwzględniono, że  $\ddot{z}_{ij} = -mgv^2/H_0 \approx 0$ , ponieważ prędkość pojazdów  $v$  oraz masa cięzna  $m$  są dużo mniejsze od wstępnego naciągu cięzna  $H_0$ . Pozioma składowa reakcji wieszaka jest efektem drugiego rzędu, zatem nieliniowy składnik  $M_j \ddot{w}_{ij} \theta_j$  tej siły można pominąć. Wówczas mamy  $R_j^x = g M_j \theta_j$ . Składowe rozłożonego obciążenia cięzna w równaniach (2) i (3), zapisane z wykorzystaniem funkcji delta Diraca, są niezerowe gdy  $0 < x_{ij}(t) \leq l_i$  i wynoszą odpowiednio:  $p_{xi,j}(x_i, t) = -g M_j \theta_j \delta(x_i - x_{ij})$  oraz  $p_{zi,j}(x_i, t) = (M_j + M_c)(g - \ddot{w}_{ij}) \delta(x_i - x_{ij})$ .

Podczas startu wagonika ze stacji początkowej pojawia się dodatkowe krótkotrwałe obciążenie, które ma charakter impulsowy. Jest ono spowodowane poziomymi siłami bezwładności  $\rho M_{ch} g_0$ ,  $\rho M_{ij} g_0$  działającymi na masy  $M_{ch}$  i  $M_{ij}$  przez krótki okres czasu  $\Delta t$  w chwili  $t_j$ , kiedy wagonik opuszcza stację, zostaje wprężony do liny napędowej i zaczyna poruszać się po trasie z prędkością operacyjną  $v$ . Siły te są efektem stałego przyspieszenia o wartości  $g_0$  w punkcie startu wagonika  $t_j = (j - 1) d/v$ . Z podobną sytuacją mamy do czynienia w trakcie nagłego zatrzymania systemu operacyjnego, gdy strumień pojazdów zostaje zatrzymany w chwili  $T_p$ , w dowolnym miejscu trasy. W tym przypadku również występuje dodatkowe krótkotrwałe obciążenie wagonika siłami bezwładności, z tą różnicą, że przyspieszenie  $g_0$  ma wartość ujemną. Oba przypadki dodatkowego obciążenia impulsowego można opisać łącznie oznaczając ogólnie symbolem  $t_0$  chwilę pojawienia się krótkotrwałych sił bezwładności. Wówczas, w momencie startu wagonika należy podstawić  $t_0 = t_j$ , a w chwili zatrzymania  $t_0 = T_p$ , wtedy w miejsce  $g_0$  należy wstawić  $-g_0$ .

Równanie ruchu wahadła, wyprowadzone na podstawie warunku równowagi momentów wszystkich sił działających na wagonik, ma postać

$$-M_{ch}r_{ch}^2\ddot{\theta}_j - J_{ch}\ddot{\theta}_j - M_{lj}r_{ch}^2\ddot{\theta}_j - J_{lj}\ddot{\theta}_j - M_{ch}(g - \ddot{W}_{ij})\theta_j r_{ch} - M_{lj}(g - \ddot{W}_{ij})\theta_j r_{lj} + \rho g_0(M_{ch}r_{ch} + M_{lj}r_{lj})\Delta t \delta(t - t_0) = 0. \quad (4)$$

Wprowadzając moment bezwładności wahadła  $J_j = J_{lj} + M_{lj}r_{lj}^2 + J_{ch} + M_{ch}r_{ch}^2$  i moment statyczny  $S_j = M_{lj}r_{lj} + M_{ch}r_{ch}$ , gdzie  $r_{ch}$ ,  $r_{lj}$  są promieniami bezwładności, oraz uwzględniając reakcję tłumika  $-c_j\dot{\theta}_j$  można zapisać równanie (4) w następującej postaci  $J_j\ddot{\theta}_j + c_j\dot{\theta}_j + gS_j\theta_j = S_j\ddot{W}_{ij}\theta_j + \rho g_0S_j\Delta t\delta(t - t_0)$ . Składnik nieliniowy  $S_j\ddot{W}_{ij}\theta_j$  równania (4) pominięto w dalszych rozważaniach, ze względu na założenie dotyczące małego kąta obrotu wahadła  $\theta_j$ . Przyjęto także, korzystając z definicji funkcji impulsowej, że jeśli  $\Delta t \rightarrow 0$ , to  $\Delta t\delta(t - t_0) = I_j(t)$ , gdzie  $I_j(t) = 1$  dla  $t_0 < t < t_0 + \Delta t$  oraz  $I_j(t) = 0$  dla  $t < t_0$  lub  $t > t_0 + \Delta t$ . Ostatecznie równanie ruchu pojedynczego wahadła jest wyrażone wzorem

$$J_j\ddot{\theta}_j + c_j\dot{\theta}_j + gS_j\theta_j = \rho g_0S_jI_j. \quad (5)$$

### 2.3. Równanie ruchu ciężna pod wpływem ruchomego obciążenia w postaci strumienia wahań

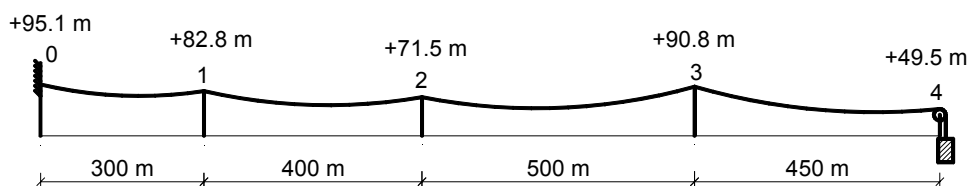
Ustrój złożony z ciężna i poruszających się po nim gondoli stanowi układ o zmiennej w czasie konfiguracji masy. Do opisu drgań układu wprowadzono dwa zbiory współrzędnych uogólnionych: wektor  $\mathbf{q}$  współrzędnych opisujących przemieszczenia ciężna oraz wektor  $\boldsymbol{\theta}$ , który stanowi zbiór współrzędnych  $\theta_j$  odpowiadających kątom wychylenia wahań. Rozważając strumień wagoników poruszających się wzdłuż wieloprzelotowej trasy ciężna nośnego można sformułować podobnie jak w pracy [3] macierzowe równanie ruchu całego układu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} + \tilde{\mathbf{B}}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{\mathbf{J}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} + \tilde{\mathbf{C}}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{\mathbf{c}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}(t) & \tilde{\mathbf{K}}_{\theta}(t) \\ \mathbf{0} & g\{\mathbf{S}\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_q \\ \mathbf{F}_{\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^N(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Bloki  $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}(t)$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}(t)$  stanowią zależne od czasu składniki macierzy bezwładności, tłumienia i sztywności, które są wynikiem zmiany konfiguracji masy układu w czasie.  $\tilde{\mathbf{K}}_{\theta}(t)$  jest macierzą sprzęgającą równania ruchu ciężna i poruszających się po nim wahań.  $\mathbf{R}^N(\mathbf{q})$  jest wektorem uogólnionych nieliniowych reakcji sprężystych,  $\mathbf{F}_q$  i  $\mathbf{F}_{\theta}$  stanowią wektory uogólnionych sił wzbudzących. Macierze diagonalne  $\{\mathbf{J}\}$ ,  $\{\mathbf{c}\}$ ,  $\{\mathbf{S}\}$  są zbiorami parametrów  $J_j$ ,  $c_j$ ,  $S_j$  poszczególnych wahań, przy czym  $j = 1 \dots N$ . Wszystkie bloki równania (6) zostały szczegółowo zdefiniowane w pracy [3], poza wektorem sił wzbudzących  $\mathbf{F}_{\theta} = \rho g_0\{\mathbf{S}\}\mathbf{I}(t)$ , który opisuje krótkotrwałe obciążenie impulsowe działające w chwili startu oraz zatrzymania wagoników,  $\mathbf{I}(t) = \text{col}(I_1(t) \dots I_N(t))$ .

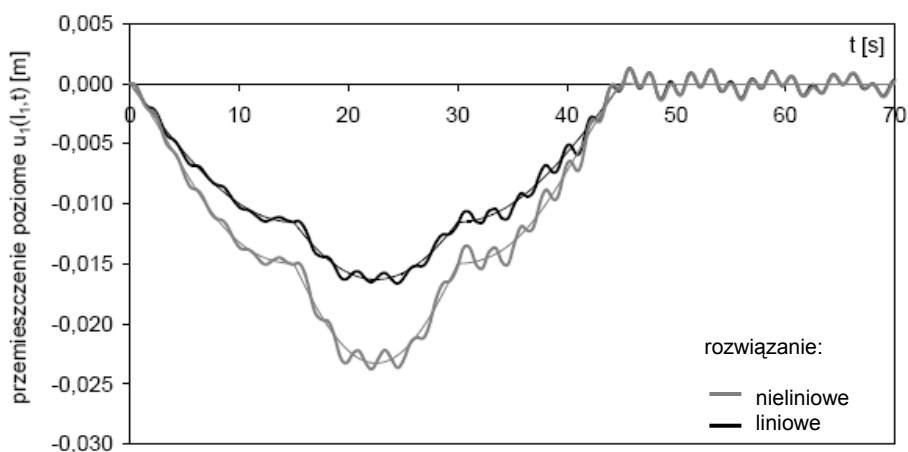
### 3. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Na podstawie zaproponowanej metody został opracowany program do analizy liniowych i nieliniowych drgań układu. Do obliczeń przyjęto przykładowy schemat kolei dwulinowej (Rys. 3), którego geometrię i parametry dobrano na podstawie pracy [1]. Jednostkowa masa ciężna wynosi  $m = 9,7 \text{ kg/m}$ , sztywność podłużna liny  $EA = 172725 \times 10^3 \text{ N}$ , całkowita masa załadowanej gondoli (bez wózka)  $M_j = 990 \text{ kg}$ , odstęp pomiędzy gondolami  $d = 150 \text{ m}$ , prędkość operacyjna  $v = 10 \text{ m/s}$ .



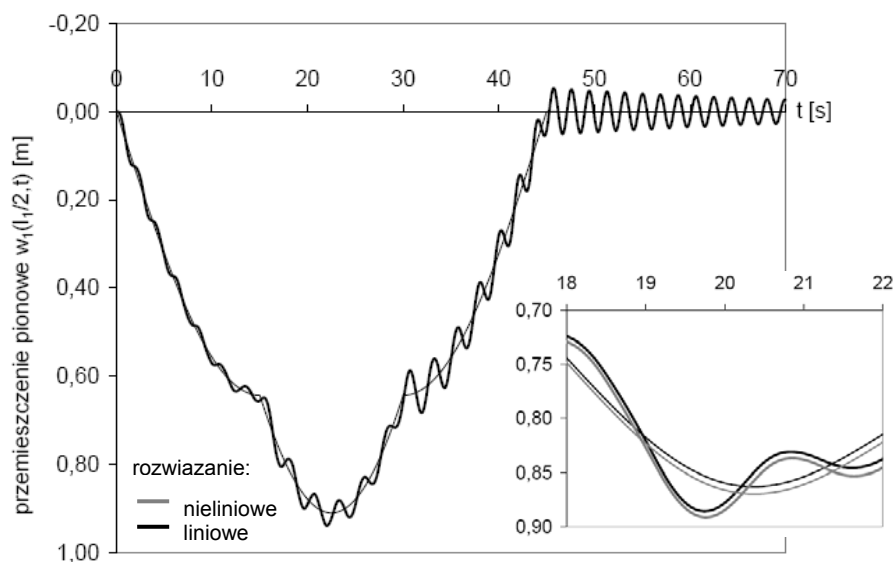
Rysunek 3: Schemat trasy ciężna

Przykłady przebiegów czasowych odpowiedzi układu na działanie obciążenia użytkowego przedstawiono na Rys. 4 – 7. Na Rys. 4 oraz Rys. 5 przedstawiono przemieszczenia poziome i pionowe ciężna w wybranych przekrojach, wywołane przejazdem dwóch wagoników. Przemieszczenia pionowe w przekroju „A” pod wpływem tego samego obciążenia, ale z uwzględnieniem dodatkowego impulsowego obciążenia działającego w trakcie startu i zatrzymania wagoników po czasie  $T_p = 35 \text{ s}$  przedstawia Rys. 6. Na Rys. 7 przedstawiono przebieg czasowy przemieszczenia poziomego pierwszego wagonika, który ilustruje działanie dodatkowego krótkotrwałego obciążenia impulsowego dla chwili startu i zatrzymania.

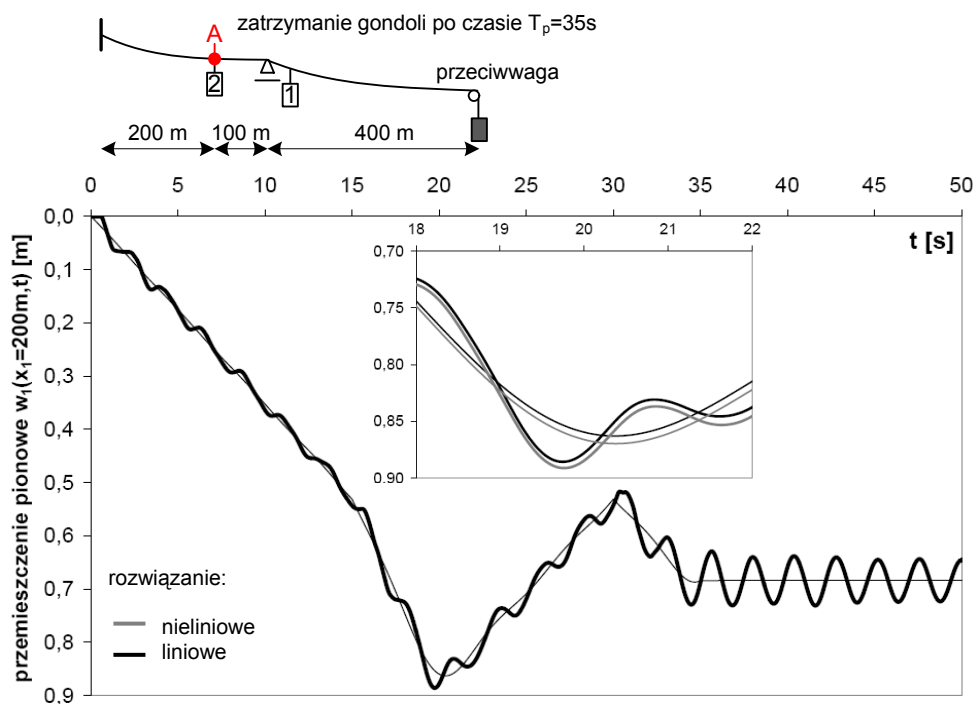


Rysunek 4: Przeszczenie poziome ciężna na pierwszej podporze pośredniej





Rysunek 5: Przeszyczenie pionowe cięna w środku rozpiętości pierwszego przelotu



Rysunek 6: Przeszyczenie pionowe cięna w przekroju A z uwzględnieniem obciążenia impulsowego



Rysunek 7: Poziome wychylenie pierwszego wagonika

#### 4. PODSUMOWANIE

Ponieważ znaczna część niniejszej pracy jest poświęcona teoretycznemu sformułowaniu rozważanego problemu, analizę numeryczną ograniczono do kilku przykładów. Na ich podstawie można jednak stwierdzić, że zaproponowana metoda jest efektywna i umożliwia analizę efektów dynamicznych związanych z działaniem ruchomego obciążenia użytkowego w dwulinowych systemach kolei linowych. Przedstawione przebiegi czasowe dotyczą ciągu wieloprzelotowego o trasie prawie poziomej i prowadzą do następujących wniosków: (a) dynamiczna odpowiedź układu jest zbliżona do quasi-statycznej między innymi ze względu na małą prędkość pojazdów, typową dla tych konstrukcji, (b) drgania mają charakter szybkozmiennych oscylacji o małej amplitudzie i okresie ok. 2 – 3 s, oscylacje ze względu na małe tłumienie zanikają powoli, (c) pionowe drgania ciągu nośnego są zdecydowanie większe od poziomych (d) nieliniowość jest znacząca tylko w przypadku poziomego ruchu ciągu, (e) dynamiczne efekty spowodowane startem i zatrzymaniem gondoli są większe niż te wywołane jazdą ustaloną, (f) zaobserwowane efekty można analizować w dalszych rozważaniach pod kątem wpływu na wytrzymałość zmęczeniową materiału liny oraz komfort jazdy pasażerów.

#### LITERATURA

- [1] J. Brownjohn, Dynamics of aerial cableway system. *Engineering Structures*, **20**, 826-836, 1998.
- [2] T. Shioneri, M. Nagai, Study on vibrational characteristics of ropeway transport system. *Proceedings of Asia-pacific Vibration Conference*, Korea, 1997.
- [3] M. Knawa, D. Bryja, Vibrations of carrying cable of ropeway system loaded by passenger carriers modeled by series of moving pendulums. *Proc. 7th European Conference on Structural Dynamics*, Southampton, United Kingdom, 2008 (in print).

## A NUMERICAL MODEL FORMULATION FOR THE UNDERGROUND RAILWAY VIBRATION PREDICTION

**Janusz P. Kogut, Henryk Ciurej**

Cracow University of Technology  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, PL  
e-mail: {jkogut, hciurej}@pk.edu.pl

---

**Abstract:** *This paper discusses a theoretical-numerical model formulation for the prediction of vibrations from underground railway traffic. The model takes into consideration transfer functions between the track lying in the underground tunnel and a free field. The rolling stock can be modeled as a multi-body vehicle chain. The dynamic axle loads due to the rails and wheels irregularities may be estimated. In the model a wheel–rail single point Hertzian contact is assumed. As for the dynamic track and tunnel compliance the transfer functions can be computed and/or measured. The entire model can be validated by means of vibration "in-situ" measurements.*

---

### 1. INTRODUCTION

A dynamic prediction of the vibration from trains running in tunnels is a very important issue nowadays. The analysis of this type of vibration is crucial since the residents in the areas surrounding existing and newly constructed underground lines are becoming more annoyed by the dynamic effects generated by the rolling stock passing the tunnels [1]. There is a need of a more accurate model formulation in the field of structural mechanics regarding the train, the tunnel and the soil.

In this paper a theoretical-numerical model for the prediction of vibrations from underground railway traffic is discussed. The model takes into consideration transfer functions between the track lying in the underground tunnel and a free field. The train can be modeled as a multi-body vehicle [4] chain containing several wagons. Every single wagon is built with a body and two bogies. Every bogie has two axles and four wheels. Between the axle and the bogie a primary suspension is located, while between the bogie and the body the secondary suspension is constructed. The rolling stock dynamic parameters as shown in [6], where the tram has been modeled are identified. Now, a subway wagon is modeled.

In the first step the identification procedure is applied. As shown in [6] the process is based on equation of motion:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sb} \\ \mathbf{C}_{bs} & \mathbf{C}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{Q}_b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_b \end{bmatrix} \quad (1)$$

where the kinematic boundary conditions  $\mathbf{x}_b(t) = \mathbf{0}$  as well as  $\dot{\mathbf{x}}_b(t) = \mathbf{0}$  and  $\ddot{\mathbf{x}}_b(t) = \mathbf{0}$ . As far as the subway wagon is concerned, the structural parameters, which built the model matrices are identified. The primary suspension of the subway wagon is constructed differently in comparison to the tram vehicle. Hence, the additional spring element modeling the Hertzian contact is added. The eq. of motion is then modified:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{bs} & \mathbf{M}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_s \\ \ddot{\mathbf{x}}_b \\ \ddot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{bs} & \mathbf{C}_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_b \\ \dot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{bs} & \mathbf{K}_{bb} + \mathbf{K}_H & -\mathbf{K}_H \\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}_H & \mathbf{K}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_s \\ \mathbf{Q}_b \\ \mathbf{Q}_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

where  $\mathbf{K}_H$  representing linearized Hertzian contact spring,  $\mathbf{x}_k$  describe vertical displacement of a contact point between the wheel and the railhead,  $\mathbf{R}_k$  is a reaction in this point. In the model a wheel–rail single point contact is assumed.

Every single wheel has its own irregularity, which can be measured and/or estimated. As far as the track is concerned, the irregularities of both railheads differ and can be measured and/or estimated, as well [7]. The dynamic axle loads due to the rail and wheel irregularities may be estimated [5]. As for the dynamic track and tunnel compliance the transfer functions can be computed and/or measured [2].

The contact forces can be the loads, which are transferred to the environment through the tunnel invert and propagate in the soil. The entire model can be validated by means of vibration "in-situ" measurements.

## 2. NUMERICAL MODEL

The equation of motion of the rolling stock can be given as follows:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} - \mathbf{R}(t) \quad (3)$$

A single wagon (Fig. 1) is consisted of a body and two bogies, each based on two axles. It seems to be important to split the degrees of freedom (DOF) on those, dedicated to the boundary i.e. contact points between the wheel and the railhead and the internal degrees of freedom, which are related to the vehicle structure. The equations of motion of such a vehicle are given [5] as following:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

for the simplicity the time relation is omitted. From eq. (4) can be noticed that index 1 is dedicated to the internal DOF and index 2 – is dedicated to the external DOF. Moreover, in both eqs. (3) and (4) the following symbols denote:

$\mathbf{x}$  – the generalized displacement vector with the dimension  $[N_P \times 1]$ ; the vehicle generalized velocity and acceleration vectors –  $\dot{\mathbf{x}}$  and  $\ddot{\mathbf{x}}$ . Vector  $\mathbf{x}_1$  has  $[N \times 1]$  and vector  $\mathbf{x}_2$  –  $[N_R \times 1]$ , and the following relation is fulfilled:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

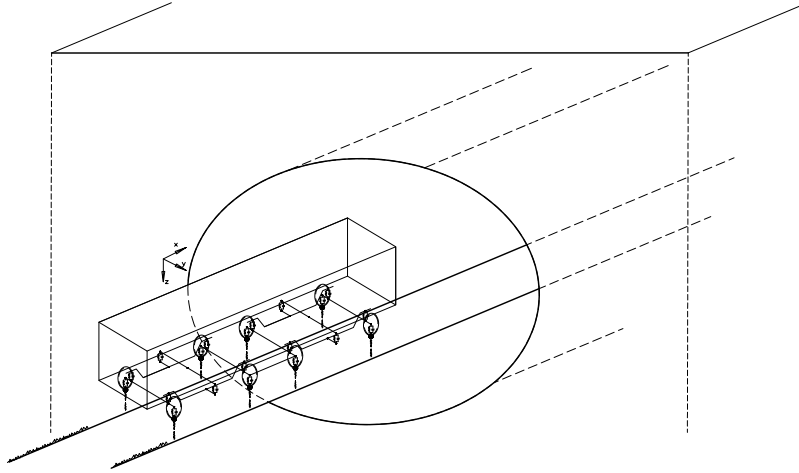


Figure 1: The wagon on the track in a tunnel.

the number of internal DOF –  $N$  is equal to  $N = N_P - N_R$ . The internal DOF vector  $\mathbf{x}_2$  shows the kinematic excitation and can be written as follows:

$$\mathbf{x}_2 = [x_{2,1(P)} \quad x_{2,1(L)} \quad \dots \quad x_{2,j(P)} \quad x_{2,j(L)} \quad \dots \quad x_{2,N_o(P)} \quad x_{2,N_o(L)}]^T \quad (6)$$

where  $N_o$  – number of axles.

$\mathbf{M}$  – the mass matrix (symmetric)  $[N_P \times N_P]$  can be:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad (7)$$

with  $\mathbf{M}_{11}$  – of dimension  $[N \times N]$ ,  $\mathbf{M}_{22}$  – of dimension  $[N_R \times N_R]$ ,  $\mathbf{M}_{12}$  – of dimension  $[N \times N_R]$ . From the symmetry  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$  and  $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}_{21}^T$ . The mass matrix  $\mathbf{M}$  can be diagonal and  $\mathbf{M}_{12} = \mathbf{0}$ . But it should be pointed out that the mass matrix  $\mathbf{M}$  consists not only of the vehicle masses but also of the additional masses (such as passengers and luggage) due to the operational tasks.

$\mathbf{C}$  – the damping matrix (symmetric), which can be written as:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Also here  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$  and  $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{C}_{21}^T$  due to the symmetry and the dimensions are the same as for the mass matrices. The damping matrix cannot be applied as a proportional one (ie.  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ ) due to the discrete elements.

$\mathbf{K}$  – the stiffness matrix (symmetric) can be written as:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$  and  $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T$  and the dimensions are the same as for the mass matrices. Matrix  $\mathbf{K}$  is singular and  $\det(\mathbf{K}) = 0$ , but  $\det(\mathbf{K}_{ii}) \neq 0$  because submatrices  $\mathbf{K}_{ii}$  complied with the boundary conditions.

$\mathbf{Q}$  – the vector of the constant static forces including the operational forces  $[N_P \times 1]$  becomes as follows:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

with  $\mathbf{Q}_1 - [N \times 1]$  and  $\mathbf{Q}_2 - [N_R \times 1]$ .

$\mathbf{R}$  – the vector of the dynamic reactions –  $[N_P \times 1]$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

where  $\mathbf{R}_2 - [N_R \times 1]$  and results in:

$$\mathbf{R}_2 = [R_{1(P)} \quad R_{1(L)} \quad \dots \quad R_{j(P)} \quad R_{j(L)} \quad \dots \quad R_{N_o(P)} \quad R_{N_o(L)}]^T \quad (12)$$

The even elements are due to the left rail ( $L$ ), while the odd follow the right rail ( $P$ ). The first axle is the rear one.

After the elaborating of eq. (4) and excluding  $\mathbf{R}_2$  the equations of motion are re-arranged as:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11}\ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{C}_{11}\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_{11}\mathbf{x}_1 = \mathbf{Q}_1 - (\mathbf{M}_{12}\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{12}\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{Q}_2 - (\mathbf{M}_{21}\ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{C}_{21}\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_{21}\mathbf{x}_1) - (\mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{22}\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{x}_2) \end{cases} \quad (13)$$

Notice that

- First eq. of (13) is stationary eq. and describes motion of the body and the bogies. Vector  $\mathbf{x}_1(t)$  contains independent DOF. The right hand side consists of static forces  $\mathbf{Q}_1$ , and kinematic force:  $-(\mathbf{M}_{22}\ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{C}_{22}\dot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{x}_2)$  – which depends on kinematic excitation shown as a vector of  $\mathbf{x}_2(t)$ .
- If the vibrations of the vehicle are performed around the equilibrium state  $\hat{\mathbf{x}}_1$  then:

$$\mathbf{x}_1(t) = \tilde{\mathbf{x}}_1(t) + \hat{\mathbf{x}}_1 \quad \text{oraz} \quad \mathbf{R}_2(t) = \tilde{\mathbf{R}}_2(t) + \hat{\mathbf{R}}_2 \quad (14)$$

where  $\tilde{\mathbf{x}}_1(t)$  is a fluctuation around  $\hat{\mathbf{x}}_1$ , and  $\tilde{\mathbf{R}}_2(t)$  is a fluctuation of the reaction force in comparison to the static force  $\hat{\mathbf{R}}_2$ . The derivatives are equal to:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) \quad \text{and} \quad \ddot{\mathbf{x}}_1(t) = \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1(t) .$$

Hence, for the static values and supposing that  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , the following expression resulting in:

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{Q}_1 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{Q}_1 \\ \hat{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{Q}_2 - \mathbf{K}_{21}\hat{\mathbf{x}}_1 \end{cases} \quad (15)$$

Using eq. (14) and (15) eqs. (13) can be written in equilibrium state as:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{C}_{11}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{K}_{11}\tilde{\mathbf{x}}_1 = -(\mathbf{M}_{12}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{C}_{12}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{K}_{12}\tilde{\mathbf{x}}_2) \\ \tilde{\mathbf{R}}_2 = -(\mathbf{M}_{21}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{C}_{21}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 + \mathbf{K}_{21}\tilde{\mathbf{x}}_1) - (\mathbf{M}_{22}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{C}_{22}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{K}_{22}\tilde{\mathbf{x}}_2) \end{cases} \quad (16)$$

Eq. (16) looks similar to eq. (13) but the static forces  $\mathbf{Q}_i$  are gone. This implies, that the vehicle vibrations are performed around the equilibrium state.

- The kinematic excitation  $\mathbf{x}_2$  consists of a railhead irregularity  $\mathbf{x}_{sz}$ , a wheel irregularity  $\mathbf{x}_w$  and a track vibration  $\mathbf{u}_{2t}$  due to the vehicle motion:

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{sz} + \mathbf{x}_w + \mathbf{u}_{2t} \quad (17)$$

where  $\mathbf{u}_{2t}$  depends on reaction  $\mathbf{R}_2$  and its history as a convolution integral, then:  $\mathbf{u}_{2t} = \mathbf{u}_{2t}(\mathbf{R}_2)$ .

- Second eq. of (13) shows the relationship between the vector of wheels' reactions  $\mathbf{R}_2$  and the kinematic excitation  $\mathbf{x}_2$ , which is a hidden function of  $\mathbf{R}_2$ .
- In eqs. (13) both eqs. are coupled not only by  $\mathbf{x}_1$  and its derivatives but also by  $\mathbf{x}_2$  and its derivatives and hence the dynamic reactions  $\mathbf{R}_2(t)$ .

In general, the stiffness matrix  $\mathbf{K}$  may be non-linear and dependent on  $\mathbf{x}$  as far as the material non-linearities are implemented but this does not matter in this formulation, where decoupling of the internal and external DOF is introduced. The last is the truth, when the model is discrete as in eq. (3). Moreover, the equations of motion (16) can be written as dynamic fluctuations around the equilibrium state, where matrix  $\mathbf{K}_{11}$  is tangential (or secant) around the point of static equilibrium, although the point can be reached in non-linear incremental way as for eq. (15), in which  $\mathbf{K}_{11}$  is non-linear.

### 3. THE KINEMATIC EXCITATION

The kinematic excitation of  $\mathbf{x}_2$  is based on the railhead and wheel irregularities. The derivatives with respect to time depend on the translational velocity of the vehicle. The distance is a function of  $v(t)$ :

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau \quad (18)$$

The irregularities are functions of the distance. As for the railhead unevenness:

$$\mathbf{x}_{sz} = \mathbf{x}_{sz}[s(t) + s_0]$$

where  $s_0$  is the initial distance of the axle to the coordinate origin. The derivatives with respect to time are:

$$\dot{\mathbf{x}}_{sz} = \frac{d\mathbf{x}_{sz}}{ds}v(t), \quad \ddot{\mathbf{x}}_{sz} = \frac{d^2\mathbf{x}_{sz}}{ds^2}v^2(t) + \frac{d\mathbf{x}_{sz}}{ds}a(t) \quad (19)$$

where  $a(t)$  is the vehicle acceleration. In the similar way the derivatives of the wheel unevenness  $\mathbf{x}_k$  with respect to time are described. Based on large databases the description of irregularities may be done using the spectral density function. For  $\Theta_n = 2\pi n_n (s - s_0) - \theta_n$ :

$$\mathbf{x}_{sz}(s) = \sqrt{2\Delta n} \sum_{n=1}^{N_i} \sqrt{G(n_n)} \cos(\Theta_n) \quad (20)$$

where  $n$  – is a wavenumber [cycle/m],  $\Delta n$  – is the value dependent on the bandwidth of the wavenumbers and  $N_i$  intervals,  $G(n)$  – is a spectral density function of a railhead unevenness [ $\text{m}^2/\text{cycle}/\text{m} = \text{m}^3/\text{cycle}$ ],  $\theta_n$  – is a random phase  $\theta_n \in [0, 2\pi]$ .

As for the wheel unevenness the function  $R(\varphi) = R_0 + \Delta R(\varphi)$  can be the radius irregularity of an angle and the relation between the distance and the wheel angle  $s(t) = \varphi(t) R_0$ ;  $R_0$  is a wheel radius, hence:

$$x_k(s(t)) = \Delta R\left(\frac{s(t)}{R_0}\right) \quad (21)$$

The function is a sum of sines:

$$\Delta R(\varphi) = \sum_{k=1}^N r_k \sin(k\varphi + \varphi_{0k}) \quad (22)$$

where  $r_k$  is an amplitude of unevenness  $k$ th degree, and  $\varphi_{0k}$  is the initial random phase. If there is no sliding  $\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_{sz} + \mathbf{x}_w$ , and the kinematic excitation is a sum of  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_N + \mathbf{u}_{2t}$ .

#### 4. THE VEHICLE–TUNNEL–SOIL INTERACTION

The dynamic response of the soil on every kind of excitation  $G$  can be a convolution:

$$u(\mathbf{x}; t) = \int_0^t \int_V h(\mathbf{x}, \xi; t - \tau) G(\xi; \tau) d\xi d\tau \quad (23)$$

where  $h(\mathbf{x}, \xi; t - \tau)$  is the fundamental solution, and  $G(\xi; \tau)$  are the dynamic forces due to the excitations. If the fundamental solutions (Green's functions in time and their time derivatives) are known in discrete points along the rail, as well as in the discrete points in the soil (or on the soil surface) as in Fig. 2, the problem is approximate in a limited number of points – nodes, due to the finite element (FEM) or other discrete method. Between the points the shape functions are placed and the approximation of the response can be done when the excitation is located between the nodes. Here, there are linear shape functions  $N_1(\eta) = -\frac{1}{l_0}\eta + 1$  and  $N_2(\eta) = \frac{1}{l_0}\eta$ , where  $l_0$  – element length, and  $\eta$  – local coordinate



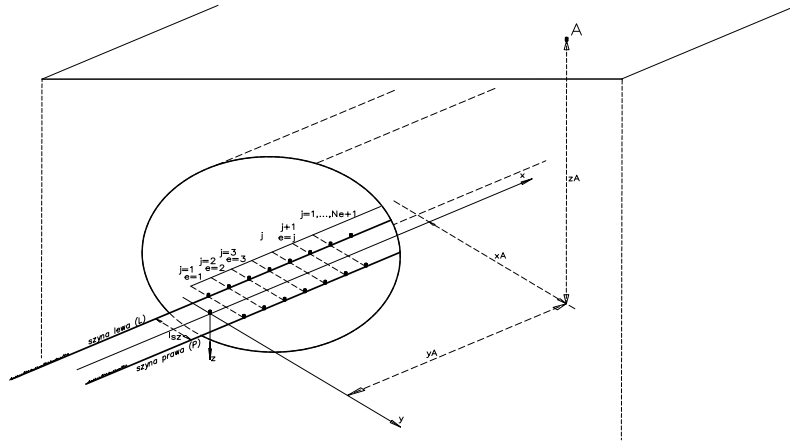


Figure 2: Discretization of the vehicle path.

of element. Finally, the vertical displacement of the nodes on the left rail  $\mathbf{u}_{(L)}(t)$  and the right rail  $\mathbf{u}_{(P)}(t)$  is the convolution:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(L)}(t) \\ \mathbf{u}_{(P)}(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_L^{(L)}(t-\tau) & \mathbf{H}_P^{(L)}(t-\tau) \\ \mathbf{H}_L^{(P)}(t-\tau) & \mathbf{H}_P^{(P)}(t-\tau) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}(t-\tau)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{(L)}(\tau) \\ \mathbf{R}_{(P)}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (24)$$

where  $\mathbf{R}_{(L)}(t)$  and  $\mathbf{R}_{(P)}(t)$  are the reaction forces in nodes along the left and right rail, and  $\mathbf{H}(t-\tau)$  is the matrix of fundamental solutions. The soil response in a surface point  $A$  is shown as a similar convolution:

$$\mathbf{u}_A(t) = \begin{bmatrix} u_{(Ax)}(t) \\ u_{(Ay)}(t) \\ u_{(Az)}(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_L^{(Ax)}(t-\tau) & \mathbf{H}_P^{(Ax)}(t-\tau) \\ \mathbf{H}_L^{(Ay)}(t-\tau) & \mathbf{H}_P^{(Ay)}(t-\tau) \\ \mathbf{H}_L^{(Az)}(t-\tau) & \mathbf{H}_P^{(Az)}(t-\tau) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^A(t-\tau)} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{(L)}(\tau) \\ \mathbf{R}_{(P)}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (25)$$

The dynamic response in every point of the soil can be reached when the forces are generated between the wheel and the rail. The snaking of the wheel sets has not influenced the vertical reactions. The excitation of the wheels takes into the consideration the interactions between the wheels in the wheel set and among the other wheels in a vehicle. The response in displacements, velocities and accelerations can be:

$$\mathbf{u}_{(A)}(t) = \int_0^t \mathbf{H}^{(A)}(t-\tau) \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix} \mathbf{R}_2(\tau) d\tau \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_{(A)}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{H}}^{(A)}(t-\tau) \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix} \mathbf{R}_2(\tau) d\tau \quad (27)$$

$$\mathbf{a}_{(A)}(t) = \int_0^t \ddot{\mathbf{H}}^{(A)}(t-\tau) \begin{bmatrix} \mathbf{Z}(\tau) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix} \mathbf{R}_2(\tau) d\tau \quad (28)$$

where  $\mathbf{T}_{(L)}$ ,  $\mathbf{T}_{(P)}$  – transformation matrices,  $\mathbf{Z}(t)$  – non-stationary matrix describing the motion of contact point along the railhead. The solution of the displacements from eq. (26) and the derivatives is performed numerically and for every step  $n$ :  $\mathbf{x}_2^{(n)} = \mathbf{x}_N^{(n)} + \mathbf{u}_{2t}^{(n)}$ , and  $\mathbf{u}_{2t}^{(n)}$  is equal to:

$$\mathbf{u}_{2t}^{(n)} = dT \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{(n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(n)} \end{bmatrix}^T \sum_{m=1}^n \mathbf{H}^{(n-m+1)} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix} \mathbf{R}_2^{(m)} \quad (29)$$

Writing:

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{(n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Y}}^{(n)} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Z}}^{(n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{Z}}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{Y}}^{(n)} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{Z}}^{(n)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddot{\mathbf{Z}}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{(L)} \\ \mathbf{T}_{(P)} \end{bmatrix}$$

the solution of  $\mathbf{u}_{2t}^{(n)}$  can be shown in every step as:

$$\mathbf{u}_{2t}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{R}_2^{(n)} \quad (30)$$

with  $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{0}$ , and  $\mathbf{A}^{(n)} = dT \mathbf{Y}^{(n)T} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbf{H}^{(n-m+1)} \mathbf{Y}^{(m)} \mathbf{R}_2^{(m)}$ ,  $n = 2, \dots, N_T$ , and  $\mathbf{B}^{(n)} = dT \mathbf{Y}^{(n)T} \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{Y}^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N_T$ . First-order derivative with respect to time:

$$\dot{\mathbf{u}}_{2t}^{(n)} = \dot{\mathbf{A}}^{(n)} + \dot{\mathbf{B}}^{(n)} \mathbf{R}_2^{(n)} \quad (31)$$

where  $\dot{\mathbf{A}}^{(1)} = \mathbf{0}$ , and  $\dot{\mathbf{A}}^{(n)} = dT \sum_{m=1}^{n-1} \left( \dot{\mathbf{Y}}^{(n)T} \mathbf{H}^{(n-m+1)} + \mathbf{Y}^{(n)T} \dot{\mathbf{H}}^{(n-m+1)} \right) \mathbf{Y}^{(m)} \mathbf{R}_2^{(m)}$ ,  $n = 2, \dots, N_T$ , and  $\dot{\mathbf{B}}^{(n)} = dT \left( \dot{\mathbf{Y}}^{(n)T} \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{Y}^{(n)T} \dot{\mathbf{H}}^{(1)} \right) \mathbf{Y}^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N_T$ . Second-order derivative with respect to time:

$$\ddot{\mathbf{u}}_{2t}^{(n)} = \ddot{\mathbf{A}}^{(n)} + \ddot{\mathbf{B}}^{(n)} \mathbf{R}_2^{(n)}; \quad (32)$$

where  $\ddot{\mathbf{A}}^{(1)} = \mathbf{0}$ , and

$$\ddot{\mathbf{A}}^{(n)} = dT \sum_{m=1}^{n-1} \left( \ddot{\mathbf{Y}}^{(n)T} \mathbf{H}^{(n-m+1)} + 2\dot{\mathbf{Y}}^{(n)T} \dot{\mathbf{H}}^{(n-m+1)} + \mathbf{Y}^{(n)T} \ddot{\mathbf{H}}^{(n-m+1)} \right) \mathbf{Y}^{(m)} \mathbf{R}_2^{(m)},$$

$$n = 2, \dots, N_T, \text{ and } \ddot{\mathbf{B}}^{(n)} = dT \left( \ddot{\mathbf{Y}}^{(n)T} \mathbf{H}^{(1)} + 2\dot{\mathbf{Y}}^{(n)T} \dot{\mathbf{H}}^{(1)} + \mathbf{Y}^{(n)T} \ddot{\mathbf{H}}^{(1)} \right) \mathbf{Y}^{(n)},$$

$n = 1, \dots, N_T$ .

Final solution for the central differences:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_0^{(n)} \ddot{\mathbf{x}}_1^{(n)} + \mathbf{C}_0^{(n)} \dot{\mathbf{x}}_1^{(n)} + \mathbf{K}_0^{(n)} \mathbf{x}_1^{(n)} = \mathbf{F}^{(n)} \\ \mathbf{R}_2^{(n)} = \mathbf{W}_{22}^{(n)-1} \left[ \mathbf{F}_{22}^{(n)} + \mathbf{C}_{21} \dot{\mathbf{x}}_1^{(n)} + \mathbf{K}_{21} \mathbf{x}_1^{(n)} \right] \end{cases} \quad (33)$$

where  $\mathbf{F}^{(n)}$  is independent of  $\mathbf{R}_2^{(n)}$ .  $\mathbf{M}_0^{(n)}$ ,  $\mathbf{C}_0^{(n)}$ ,  $\mathbf{K}_0^{(n)}$  are non-stationary matrices of the system due to the moving of inertial loading.  $\mathbf{F}^{(n)}$ ,  $\mathbf{W}_{22}^{(n)}$  are the forces and transformation of the forces matrices, respectively.

Accelerations and velocities:

$$\ddot{\mathbf{x}}_1^{(n)} = \frac{\mathbf{x}_1^{(n+1)} - 2\mathbf{x}_1^{(n)} + \mathbf{x}_1^{(n-1)}}{dT^2}, \quad n = 1, \dots, N_T \quad (34)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1^{(n)} = \frac{\mathbf{x}_1^{(n+1)} - \mathbf{x}_1^{(n-1)}}{2dT}, \quad n = 1, \dots, N_T \quad (35)$$

fulfill the initial conditions:  $\mathbf{x}_1^{(1)} = \mathbf{x}(0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\dot{\mathbf{x}}_1^{(1)} = \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}_0$ , and  $\mathbf{x}_1^{(2)} - \mathbf{x}_1^{(0)} = 2dT\mathbf{v}_0$ , as well as

$$\mathbf{x}_1^{(2)} - 2\mathbf{u}_0 + \mathbf{x}_1^{(0)} = dT^2\mathbf{M}_0^{(1)-1} \left( \mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{C}_0^{(1)}\mathbf{v}_0 - \mathbf{K}_0^{(1)}\mathbf{u}_0 \right)$$

and

$$\mathbf{x}_1^{(2)} = \mathbf{u}_0 + dT\mathbf{v}_0 + \frac{dT^2}{2}\mathbf{M}_0^{(1)-1} \left( \mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{C}_0^{(1)}\mathbf{v}_0 - \mathbf{K}_0^{(1)}\mathbf{u}_0 \right)$$

If  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$  then

$$\mathbf{x}_1^{(2)} = \mathbf{u}_0 + \frac{dT^2}{2}\mathbf{M}_0^{(1)-1} \left( \mathbf{F}^{(1)} - \mathbf{K}_0^{(1)}\mathbf{u}_0 \right) \quad (36)$$

$$\mathbf{M}_0^{(n)} \frac{\mathbf{x}_1^{(n+1)} - 2\mathbf{x}_1^{(n)} + \mathbf{x}_1^{(n-1)}}{dT^2} + \mathbf{C}_0^{(n)} \frac{\mathbf{x}_1^{(n+1)} - \mathbf{x}_1^{(n-1)}}{2dT} + \mathbf{K}_0^{(n)} \mathbf{x}_1^{(n)} = \mathbf{F}^{(n)} \quad (37)$$

for  $n = 2, \dots, N_T$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{dT}\mathbf{M}_0^{(n)} + \frac{1}{2}\mathbf{C}_0^{(n)} \right) \mathbf{x}_1^{(n+1)} = dT\mathbf{F}^{(n)} + \\ & + \left( \frac{2}{dT}\mathbf{M}_0^{(n)} - dT\mathbf{K}_0^{(n)} \right) \mathbf{x}_1^{(n)} + \left( \frac{1}{2}\mathbf{C}_0^{(n)} - \frac{1}{dT}\mathbf{M}_0^{(n)} \right) \mathbf{x}_1^{(n-1)} \end{aligned} \quad (38)$$

Applying:

$\mathbf{S}_{MC}^{(n)} = \frac{1}{dT}\mathbf{M}_0^{(n)} + \frac{1}{2}\mathbf{C}_0^{(n)}$  and  $\mathbf{S}_{MK}^{(n)} = \frac{2}{dT}\mathbf{M}_0^{(n)} - dT\mathbf{K}_0^{(n)}$  and  $\mathbf{S}_{CM}^{(n)} = \frac{1}{2}\mathbf{C}_0^{(n)} - \frac{1}{dT}\mathbf{M}_0^{(n)}$  one receives the recurrent formula:

$$\mathbf{S}_{MC}^{(n)} \mathbf{x}_1^{(n+1)} = dT\mathbf{F}^{(n)} + \mathbf{S}_{MK}^{(n)} \mathbf{x}_1^{(n)} + \mathbf{S}_{CM}^{(n)} \mathbf{x}_1^{(n-1)} \quad (39)$$

Further elaborating of eq. (16):

$$\mathbf{W}_{22}^{(n)} \mathbf{R}_2^{(n)} = \mathbf{F}_{22}^{(n)} - \left( \mathbf{M}_{21} \frac{\mathbf{x}_1^{(n+1)} - 2\mathbf{x}_1^{(n)} + \mathbf{x}_1^{(n-1)}}{dT^2} + \mathbf{C}_{21} \frac{\mathbf{x}_1^{(n+1)} - \mathbf{x}_1^{(n-1)}}{2dT} + \mathbf{K}_{21} \mathbf{x}_1^{(n)} \right) \quad (40)$$

gives the recurrent formula:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{22}^{(n)} \mathbf{R}_2^{(n)} = & \mathbf{F}_{22}^{(n)} - \frac{1}{dT} \left[ \left( \frac{1}{dT} \mathbf{M}_{21} + \frac{1}{2} \mathbf{C}_{21} \right) \mathbf{x}_1^{(n+1)} + \right. \\ & \left. + \left( dT \mathbf{K}_{21} - \frac{2}{dT} \mathbf{M}_{21} \right) \mathbf{x}_1^{(n)} + \left( \frac{1}{dT} \mathbf{M}_{21} - \frac{1}{2} \mathbf{C}_{21} \right) \mathbf{x}_1^{(n-1)} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Finally, the dynamic response for  $n$  step:

$$\mathbf{R}_2^{(n)} = \mathbf{W}_{22}^{(n)-1} \left[ \mathbf{F}_{22}^{(n)} - \frac{1}{2dT} \mathbf{C}_{21} \left( \mathbf{x}_1^{(n+1)} - \mathbf{x}_1^{(n-1)} \right) - \mathbf{K}_{21} \mathbf{x}_1^{(n)} \right] \quad (42)$$

## 5. A NUMERICAL FUNDAMENTAL SOLUTION

As a benchmark test, the numerical Green's function has been generated using FEM package Diana ver. 9.2. The data describing the tunnel and the soil is taken from Beijing tunnel [3]. The tunnel is bored with a segmented concrete lining at a depth of 13.50 m

Table 1: Dynamic soil characteristics

Soil	$C_s$ [m/s]	$\nu$ [ - ]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\beta$ [ - ]
Fill	150	0.341	1900	0.05
siCl	230	0.313	2023	0.04
Gr	320	0.223	1963	0.03

below the free surface. It has an internal radius of  $r = 2.70$  m and a wall thickness of  $t = 0.30$  m. The concrete lining has a Young's modulus  $E^t = 35$  GPa, a Poisson ratio  $\nu^t = 0.25$ , a density  $\rho^t = 2500$  kg/m<sup>3</sup>, and a hysteretic damping ratio  $\beta^t = 0.02$ . A concrete slab inside the tunnel has a Young's modulus  $E^s = 28.5$  GPa, a Poisson ratio  $\nu^s = 0.2$ , a density  $\rho^s = 2500$  kg/m<sup>3</sup>, and a hysteretic damping ratio  $\beta^s = 0.02$ .

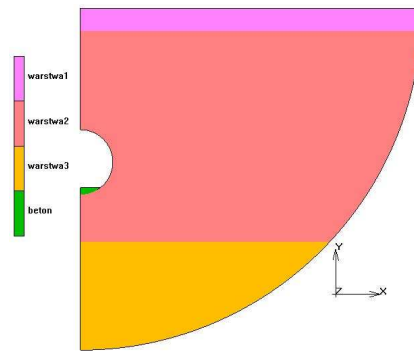


Figure 3: The soil and the tunnel invert modeled.

The tunnel is embedded in a layered halfspace consisted of  $d_1 = 2.00$  m fill material, silty clay of  $d_2 = 18.50$  m thick, and a homogeneous halfspace of gravel and pebble  $d_{+\infty}$  with

dynamic characteristics shown in Table 1. Fig. 3 presents a soil model with an implemented tunnel. For the simplicity there is a flat view shown and the kinematic boundary conditions are removed. In order to get the fundamental solution the FEM model has been generated.

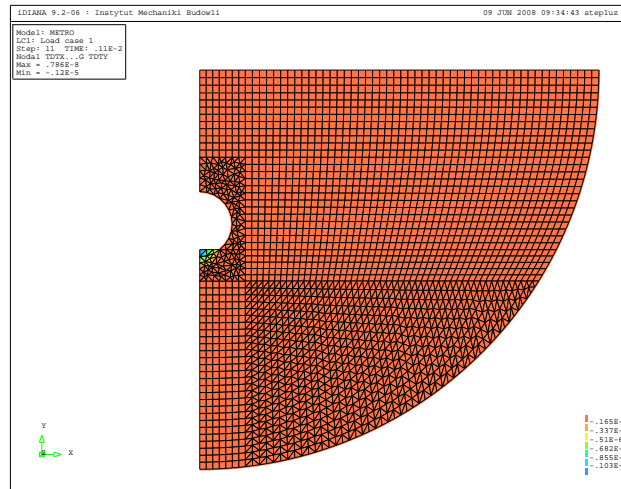


Figure 4: The displacement map for the first non-zero time step, as computed for this FEM mesh.

Fig. 4 presents the mesh and the vertical displacements as computed for the first non-zero time step of the analysis. The plain stress conditions are assumed and half of the tunnel is embedded in a quarter of cylinder of the soil with a diameter of  $R = 35$  m. Fig. 5a

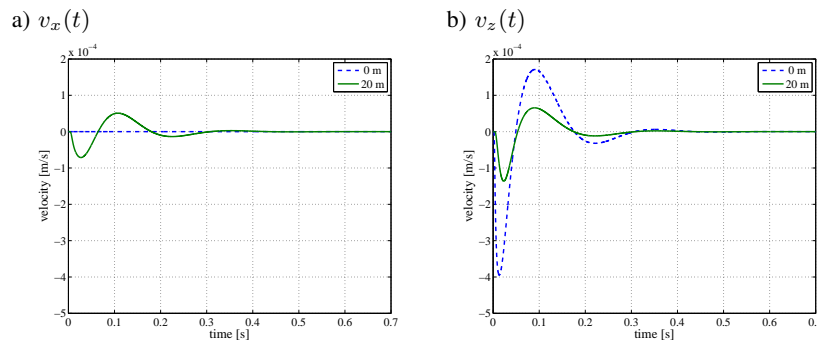


Figure 5: A horizontal and a vertical free field response at  $x = 0$  m, and at  $x = 20$  m from the slab centre, as computed for the initial impulse loading.

presents the horizontal dynamic response of the soil surface for the initial vertical impulse loading located on the slab at its centre, while Fig. 5b presents the vertical response of the soil surface. As expected for this model the vertical response of the soil surface over the tunnel is larger than 20 m away. The time offset is also noticeable. The response duration is about  $t_r = 0.5$  s for the impulse of  $t_i = 0.0002$  s, and  $\Delta t = 0.0001$  s.

## 6. FINAL REMARKS

A theoretical-numerical model for the prediction of vibrations from underground railway traffic is formulated. The model takes into consideration transfer functions between the track lying in the underground tunnel and a free field. The underground train can be modeled as a multi-body vehicle. The dynamic axle loads due to the rails and wheels irregularities may be estimated. In the model a wheel–rail single point Hertzian contact is assumed. As for the dynamic tunnel compliance the transfer functions are computed. In the future, the entire model can be validated by means of vibration "in-situ" measurements.

## REFERENCES

- [1] S.J. Cox, A. Wang, *Effect of track stiffness on vibration levels in railway tunnels*, Journal of Sound and Vibration, 267(3):565–573, 2003.
- [2] S. Gupta, M.F.M. Hussein, G. Degrande, H.E.M. Hunt, D. Clouteau, *A comparison of two numerical models for the prediction of vibrations from underground railway traffic*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 27(7):608–624, 2007.
- [3] S. Gupta, W.F. Liu, G. Degrande, G. Lombaert, W.N. Liu, *Prediction of vibration induced by underground railway traffic in Beijing*, Journal of Sound and Vibration, 310(3):608–630, 2008.
- [4] J.P. Kogut, H. Ciurej, Numerical modelling of the train-track axle forces. In L. Ziemiański, W. Lakota (eds.), *Mechanika 65*, pages 209–218, Rzeszów–Bystre, 2005. Rzeszów University of Technology.
- [5] J.P. Kogut, H. Ciurej, *The numerical study of the dynamic train axle forces induced on an uneven railway track*, Czasopismo Techniczne, 102(12–B):35–49, 2005.
- [6] J.P. Kogut, H. Ciurej, A numerical modelling and an identification of the parameters of the tramway bogie. In T. Uhl (ed.), *Wybrane zagadnienia analizy modalnej konstrukcji mechanicznych*, pages 156–164, Kraków, 2006. Wyd. Instytutu Technologii Eksploatacji – PIB.
- [7] M.J.M.M. Steenbergen, *Quantification of dynamic wheel-rail contact forces at short rail irregularities and application to measured rail welds*, Journal of Sound and Vibration, 312(4-5):606–629, 2008.

## **BADANIE DRGAŃ UKŁADU Z LISTWĄ W ZACISKU PRZY UWZGLĘDNIENIU NIELINIOWEGO MODELU TARCIA**

**Andrzej Kosior**

Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych,  
Instytut Podstaw Budowy Maszyn, 02-524 Warszawa, ul. Narbutta 84  
e-mail: akos@ipbm.simr.pw.edu.pl

---

**Abstract:** *In the work presented of physical model of the system with joint elastic strip in the rigid clamp. Nonlinear friction model contact between elastic strip and rigid clamp, taking structural friction into account is presented. During load, relieve and again load free part of the strip, displacement in a function of the longitudinal force external was determined. The obtained dependences of the displacement enable determination of the hysteresis loop describes elasto-frictional properties of the joint. The mathematical model of vibrating system with an elastic strip in a rigid clamp was built. The equation of motion for the nonlinear system were solved numerically and its damping characteristics were investigation.*

---

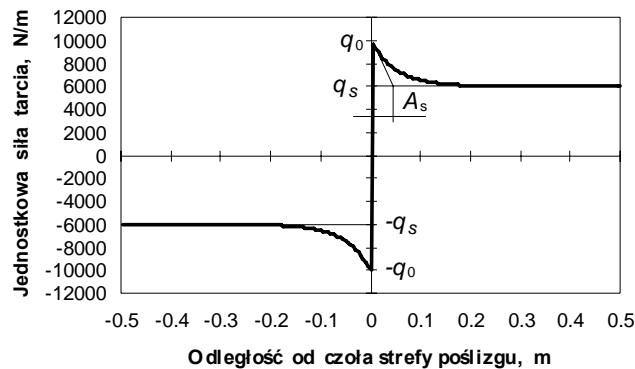
### **1. WPROWADZENIE**

W badaniach połączeń z tarcieniem konstrukcyjnym uwzględnia się odkształcenia sprężyste połączonych ze sobą elementów, ich względny poślizg na części długości połączenia oraz siły tarcia na powierzchni styku elementów w strefie poślizgu. Badania statyczne połączeń polegają na wyznaczeniu analitycznych zależności na przemieszczenie elementów połączenia w funkcji siły zewnętrznej w postaci pętli histerezy. Badania teoretyczne tarcia konstrukcyjnego połączeń elementów maszyn prowadzone są dla fizycznych modeli połączeń przy przyjęciu założeń upraszczających dotyczących modelu ciała i modelu styku. Ze względu na trudności opisu tarcia w tych połączeniach i wyznaczenia zależności między obciążeniem i przemieszczeniem w postaci pętli histerezy, do rozważań analitycznych przyjmowany jest często tarciovym model styku opisywany prawem Coulomba [1-4].

Jednym z badanych połączeń elementów maszyn jest połączenie sprężystej listwy w sztywnym zacisku poddane obciążeniu wzdłużnemu. Model ciała sprężystej listwy opisuje prawo Hooke'a. W badaniach teoretycznych stosowane są metody analityczne z wykorzystaniem wzorów liniowej teorii sprężystości. Badania połączenia sprężystej listwy w zacisku przy przyjęciu do rozważań tarciovego modelu styku przedstawiono w pracach [1-4], przy tarciovo - sprężystym modelu styku [1-5] i przy sprężysto-tarciowym modelu styku [6].

## 2. MODEL FIZYCZNY POŁĄCZENIA SPRĘŻYSTEJ LISTWY W ZACISKU

Przyjęty do rozważań model tarcia w kierunku stycznym połączenia sprężystej listwy w sztywnym zacisku, wynikający z analizy prowadzonych przez autora badań doświadczalnych [4] połączenia dwóch belek zginanych dociśniętych do siebie, przedstawiono na Rys. 1.



Rysunek 1: Nieliniowy model styku połączenia tarcioowego listwy w zacisku

Model ten opisano zależnością

$$q(\zeta) = \left[ q_s + (q_0 - q_s) e^{-\frac{|\zeta|}{A_s}} \right] \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} \quad (1)$$

gdzie:  $\zeta$  - odległość przekroju  $x$  listwy od czoła strefy poślizgu,  $q_0$  - jednostkowa siła tarcia rozwiniętego dla  $\zeta = 0$ ,  $q_s$  - jednostkowa siła tarcia dla  $\zeta = \infty$ ,  $A_s$  - podstyczna  $q(\zeta)$  dla  $\zeta = 0$ ,  $\operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} = +1$  w etapach 1 i 3, oraz  $\operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} = -1$  w etapie 2,

$$\zeta = [x - (l - a)] \quad (2)$$

$x$  - odległość badanego przekroju listwy od utwierdzenia listwy  $l$  - długość połączenia listwy w zacisku,  $a$  - długość strefy poślizgu listwy względem zacisku,

$$q_0 = 2p\mu b \quad (3)$$

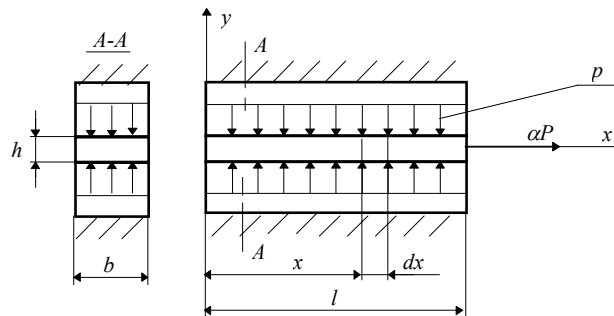
$p$  - nacisk jednostkowy między listwą i zaciskiem,  $\mu$  - współczynnik tarcia,  $b$  - szerokość listwy.

Uwzględniając w zależności (1) związek (2) między odległościami  $x$  i  $\zeta$ , otrzymamy opis jednostkowej siły tarcia w strefie poślizgu w postaci



$$q(x) = \left[ q_s + (q_0 - q_s) e^{-\frac{[x-(l-a)]}{A_s}} \right] \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} \quad (4)$$

Model fizyczny połączenia sprężystej listwy w sztywnym zacisku obciążonej siłą  $\alpha P$  ( $\alpha$  - współczynnik obciążenia) przedstawia Rys. 2.



Rysunek 2: Model fizyczny połączenia listwy w zacisku

Z warunku równowagi sił działających na element listwy o długości  $dx$  w kierunku  $x$  w otrzymamy równanie

$$\frac{dN}{dx} = q(x) \quad (5)$$

gdzie:  $N$  - siła normalna,  $q$  - jednostkowa siła tarcia rozwiniętego w przekroju  $x$  listwy.

Wydłużenie listwy związane jest z obciążeniem równaniem różniczkowym

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{k} \quad (6)$$

$$k = EF \quad (7)$$

gdzie:  $k$  - sztywność listwy rozciąganej lub ściskanej,  $E$  - moduł Younga,  $F = bh$  - przekrój poprzeczny listwy o szerokości  $b$  i grubości  $h$ .

### 3. WYZNACZENIE SIŁY NORMALNEJ W LISTWIE I PRZEMIESZCZENIA SWOBODNEGO KOŃCA LISTWY W ETAPIE 1

Z rozwiązania równania różniczkowego (5) wyznaczmy siłę normalną w przekroju  $x$  listwy w strefie poślizgu w etapie 1

$$N_1(\alpha, x) = \alpha P - q_s(l-x) - (q_0 - q_s) A_s \left[ e^{-\frac{[x-(l-a_1)]}{A_s}} - e^{-\frac{a_1}{A_s}} \right] \quad (8)$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego

$$N_1(\alpha, x = l) = \alpha P \quad (9)$$

Długość strefy poślizgu  $a_1$  w etapie 1 wyznaczmy z równania (8) w postaci

$$\alpha P - q_s a_1 - (q_0 - q_s) A_s \left( 1 - e^{-\frac{a_1}{A_s}} \right) = 0 \quad (10)$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego na granicy strefy poślizgu

$$N_1(\alpha, x = l - a_1) = 0 \quad (11)$$

Z rozwiązania równania różniczkowego (6) przemieszczenie listwy w etapie 1 wyznaczmy z zależności

$$u_1(\alpha, x) = \frac{1}{k} \left\{ \alpha P [x - (l - a_1)] + \frac{1}{2} q_s [(l - x)^2 - a_1^2] + (q_0 - q_s) A_s \left[ A_s \left( e^{-\frac{[x - (l - a_1)]}{A_s}} - 1 \right) + [x - (l - a_1)] e^{-\frac{a_1}{A_s}} \right] \right\} \quad (12)$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego na granicy strefy poślizgu

$$u_1(\alpha, x = l - a_1) = 0 \quad (13)$$

Przemieszczenie końca listwy w etapie 1 przy  $x = l$  wyznaczone z zależności (12) wynosi

$$u_1(\alpha, x = l) = \frac{1}{k} \left\{ \alpha P a_1 - \frac{1}{2} q_s a_1^2 + (q_0 - q_s) A_s \left[ e^{-\frac{a_1}{A_s}} (A_s + a_1) - A_s \right] \right\} \quad (14)$$

#### 4. WYZNACZENIE SIŁY NORMALNEJ W LISTWIE I PRZEMIESZCZENIA SWOBODNEGO KOŃCA LISTWY W ETAPIE 2

Z rozwiązania równania różniczkowego (5) wyznaczmy siłę normalną w przekroju  $x$  listwy w strefie poślizgu w etapie 2

$$N_2(\alpha, x) = \alpha P + q_s (l - x) + (q_0 - q_s) A_s \left[ e^{-\frac{[x - (l - a_2)]}{A_s}} - e^{-\frac{a_2}{A_s}} \right] \quad (15)$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego

$$N_2(\alpha, x = l) = \alpha P \quad (16)$$

Długość strefy poślizgu  $a_2$  w etapie 2 wyznaczmy z równania (15) w postaci

$$P(1-\alpha) - 2q_s a_2 - (q_0 - q_s) A_s \left[ 1 + e^{-\frac{(a_{1m} - a_2)}{A_s}} - e^{-\frac{a_{1m}}{A_s}} - e^{-\frac{a_2}{A_s}} \right] = 0 \quad (17)$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego na granicy strefy poślizgu

$$N_2(\alpha, x = l - a_2) = N_1(\alpha = 1, x = l - a_2) \quad (18)$$

Z rozwiązania równania różniczkowego (6) przemieszczenie końca listwy w etapie 2 wyznaczmy z zależności

$$u_2(\alpha, x) = \frac{1}{k} \left\{ \alpha P [x - (l - a_2)] + P(a_{1m} - a_2) - \frac{1}{2} q_s [(l - x)^2 - 2a_2^2 + a_{1m}^2] + \right. \\ \left. - (q_0 - q_s) A_s \left[ A_s e^{-\frac{[x - (l - a_2)]}{A_s}} + [x - (l - a_2)] e^{-\frac{a_2}{A_s}} - A_s e^{-\frac{(a_{1m} - a_2)}{A_s}} + (a_{1m} - a_2) e^{-\frac{a_{1m}}{A_s}} \right] \right\} \quad (19)$$

po uwzględnieniu warunku brzegowego na granicy strefy poślizgu

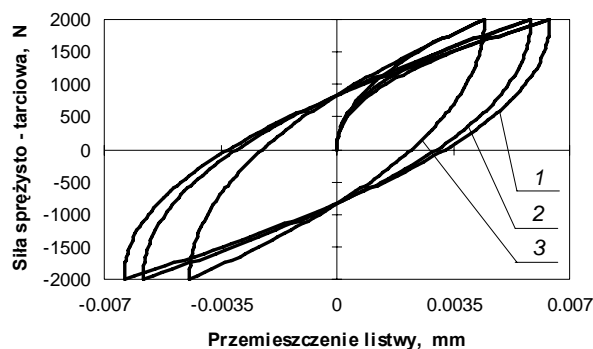
$$u_2(\alpha, x = l - a_2) = u_1(\alpha = 1, x = l - a_2) \quad (20)$$

Przemieszczenie końca listwy w etapie 2 przy  $x = l$  wyznaczmy z zależności

$$u_2(\alpha, x = l) = \frac{1}{k} \left\{ P a_{1m} - P(1-\alpha) a_2 + q_s \left( a_2^2 - \frac{1}{2} a_{1m}^2 \right) + \right. \\ \left. - (q_0 - q_s) A_s \left[ e^{-\frac{a_2}{A_s}} (A_s + a_2) - A_s e^{-\frac{(a_{1m} - a_2)}{A_s}} - (a_{1m} - a_2) e^{-\frac{a_2}{A_s}} \right] \right\} \quad (21)$$

Postępując podobnie jak w etapach 1 i 2, wyznaczono zależności na przemieszczenie i długość strefy poślizgu w etapie 3.

Na Rys. 3 przedstawiono wykresy siły sprężysto-tarciowej w funkcji przemieszczenia swobodnego końca listwy w postaci pętli histerezy, wyznaczone w etapach 1, 2 i 3, dla wybranych wartości parametrów połączenia. Pokazano wpływ wartości podstycznej  $A_s$ , na kształt pętli histerezy, przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów połączenia.



Rysunek 3: Pętle histerezy połączenia listwy w zacisku dla nieliniowego modelu tarcia przy:  $q_0 = 10000$  N/m,  $q_s = 6000$  N/m, 1) -  $A_s = 0,05$ m, 2) -  $A_s = 0,1$ m i 3) -  $A_s = 0,5$ m

Z wykresów na Rys. 3 wynika, że przy ustalonych wartościach jednostkowej siły tarcia  $q_0$  i  $q_s$  oraz zwiększaniu wartości podstycznej  $A_s$ , zmniejsza się wartość przemieszczenia swobodnego końca listwy.

## 5. BADANIE DRGAŃ SWOBODNYCH UKŁADU MECHANICZNEGO Z LISTWĄ W ZACISKU

Przemieszczenie końca listwy przy ( $x = l$ ) w etapach 1 i 2 określają zależności (14) i (21). Zależności na przemieszczenie w etapach 2 i 3, po zastąpieniu oznaczenia  $\alpha P$  na siłę w rozpatrywanym etapie ruchu poprzez  $P$ , można uogólnić do postaci

$$u = u_n + \Delta u = u_n + \frac{1}{k} \left\{ a(P - P_n) \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} - q_s a^2 + (q_0 - q_s) A_s \left[ \left( e^{\frac{a_n}{A_s}} + e^{-\frac{a}{A_s}} \right) (A_s + a) - A_s \left( 1 + e^{-\frac{(a_n - a)}{A_s}} \right) \right] \right\} \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} \quad (22)$$

Długości stref poślizgu w etapach 1 i 2 wyznaczmy z zależności (10) i (17). Wyznaczone zależności na długości stref poślizgu w etapach 2 i 3, po zastąpieniu oznaczenia  $\alpha P$  na siłę poprzez  $P$  oraz oznaczeniu poprzez  $a$  długości strefy poślizgu w rozpatrywanym etapie ruchu, można uogólnić do postaci

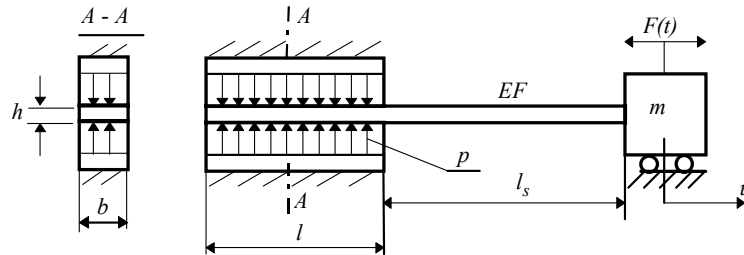
$$(P - P_n) \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} - 2q_s a - (q_0 - q_s) A_s \left[ 1 + e^{-\frac{(a_n - a)}{A_s}} - e^{-\frac{a}{A_s}} - e^{-\frac{a_n}{A_s}} \right] = 0 \quad (23)$$

W zależnościach (22) i (23) przyrosty przemieszczenia i siły w rozpatrywanym  $n+1$  etapie ruchu względem etapu  $n$  - tego oznaczono jako

$$\Delta u = u - u_n ; \quad \Delta P = P - P_n \quad (24)$$

gdzie:  $\Delta u$  - przyrost przemieszczenia w rozpatrywanym  $n+1$  etapie ruchu,  $u_n$  - przemieszczenie w końcu  $n$ -tego etapu ruchu,  $\Delta P$  - przyrost siły zewnętrznej w rozpatrywanym  $n+1$  etapie ruchu,  $P_n$  - siła w końcu  $n$ -tego etapu ruchu.

Model fizyczny mechanicznego układu drgającego zawierającego połączenie sprężystej listwy w zacisku przedstawiono na Rys. 4.



Rysunek 4: Model fizyczny mechanicznego układu drgającego z listwą w zacisku

Równanie ruchu ciała o masie  $m$  układu przedstawionego na Rys. 4 ma postać

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -P + F(t) \quad (25)$$

w którym:  $u$  - przemieszczenie swobodnego końca listwy w dowolnym  $n+1$  etapie ruchu podane zależnością (22), jest jednocześnie przemieszczeniem ciała dołączonego do listwy,  $(-P)$  - siła oddziaływania listwy na ciało o masie  $m$  przy przyjęciu nieliniowego tarcowego modelu styku,  $F(t)$  - wymuszenie siłą zewnętrzną. W równaniu (25) masa listwy została zredukowana do ciała o masie skupionej  $m$ .

W równaniu ruchu (25) występuje zależność siły w postaci  $P = P(u)$  której nie znamy, natomiast znamy postać odwrotną  $u = u(P)$  przemieszczenia ciała o masie  $m$  w funkcji siły, podaną zależnością (22). Przekształcając równanie (25) na równanie opisujące zmianę siły  $P$  w czasie, po dwukrotnym zróżniczkowaniu zależności na przemieszczenie końca listwy i podstawieniu do równania (25), otrzymamy równanie różniczkowe, w którym siła  $P$  w funkcji czasu jest poszukiwanym rozwiązaniem równania różniczkowego.

Otrzymamy po przekształceniach równanie różniczkowe w postaci

$$A_n \frac{d^2 P}{dt^2} + B_n \left( \frac{dP}{dt} \right)^2 + C_n = 0 \quad (26)$$

w której:  $A_n$ ,  $B_n$  i  $C_n$  są współczynnikami równania różniczkowego

$$A_n = \frac{A_{n1}}{A_{n2}} \quad (27)$$

$$A_{n1} = \left\{ (P - P_n) \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} + (q_0 - q_s) A_s \left[ e^{-\frac{a_n}{A_s}} + e^{-\frac{(a_n-a)}{A_s}} \left( \frac{a}{A_s} - 1 \right) \right] \right\} \quad (28)$$

$$A_{n2} = \left\{ 2q_s + (q_0 - q_s) \left[ e^{-\frac{a}{A_s}} + e^{-\frac{(a_n-a)}{A_s}} \right] \right\} \quad (29)$$

$$B_n = (B_{n1} + B_{n2} + B_{n3}) \operatorname{sgn} \frac{dP}{dt} \quad (30)$$

$$B_{n1} = \frac{1}{A_{n2}}, \quad B_{n2} = \frac{(q_0 - q_s) \frac{a}{A_s} e^{-\frac{(a_n-a)}{A_s}}}{A_{n2}^2} \quad (31)$$

$$B_{n3} = \frac{(q_0 - q_s) \frac{1}{A_s} \left[ e^{-\frac{a}{A_s}} - e^{-\frac{(a_n-a)}{A_s}} \right]}{A_{n2}^3} A_{n1} \quad (32)$$

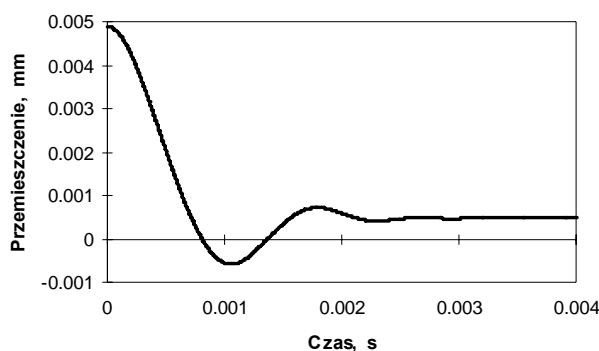
$$C_n = \frac{k}{m} [P - F(t)] \quad (33)$$

Badanie drgań swobodnych układu przedstawionego na Rys. 4 i opisanego równaniem różniczkowym (25), przeprowadzono przyjmując  $F(t) = 0$ . Równanie różniczkowe (25) rozwiązano numerycznie wykorzystując metodę Runge - Kuty IV rzędu z modyfikacją Gilla, stosując procedurę RKGS. W wyniku rozwiązania równania różniczkowego otrzymano przebieg siły  $P$  w funkcji czasu. Wykorzystując zależności (22) otrzymano przemieszczenie końca listwy w funkcji czasu, a tym samym przemieszczenie ciała o masie  $m$ .

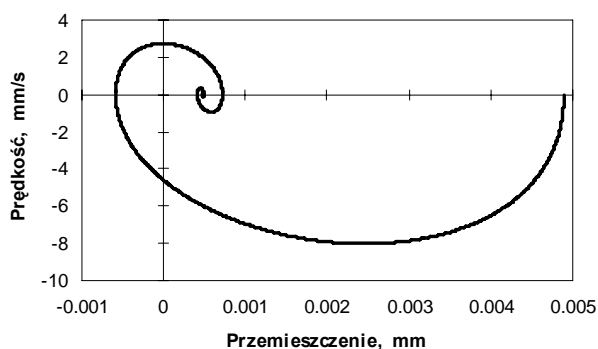
Prędkość ciała o masie  $m$  wyznaczono po zróźniczkowaniu równania (22) otrzymując zależność:

$$v_n = \frac{A_n}{k} \frac{dP}{dt} \quad (34)$$

Trajektorie fazowe drgań swobodnych ciała o masie  $m$  wyznaczono z zależności na przemieszczenie (22) i prędkość (34).



Rysunek 5: Wykres przemieszczenia ciała w funkcji czasu podczas drgań swobodnych układu z listwą w zacisku przy  $q_0 = 10000$  N/m,  $q_s = 8000$  N/m,  $A_s = 0,05$  m,  $l_s = 0,001$  m



Rysunek 6: Trajektoria fazowa drgań swobodnych układu otrzymana przy  $q_0 = 10000$  N/m,  $q_s = 8000$  N/m,  $A_s = 0,05$  m,  $l_s = 0,001$  m

Podczas badania drgań swobodnych układu metodą symulacji cyfrowej wyznaczono wykresy przemieszczenia ciała o masie  $m$  w funkcji czasu i trajektorii fazowej przedstawione na Rys. 5 i 6. Wykresy te otrzymano przy wartościach parametrów układu: masa ciała  $m = 50$  kg, wymiary listwy  $b = 0,05$  m i  $h = 0,005$  m, moduł Younga listwy  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  N/m. Pozostałe wartości parametrów podano w podpisach pod rysunkami. Wykresy wyznaczono przy tej samej wartości początkowej siły  $P = 2000$  N.

Z przedstawionych na Rys. 5 i 6 wykresów przemieszczenia w funkcji czasu i trajektorii fazowej wynika, że badany układ z listwą w zacisku dobrze tłumí drgania swobodne dla podanych wartości parametrów.

## 6. WNIOSKI

Z przedstawionych wykresów pętli histerezy na Rys. 3 oraz wykresów drgań swobodnych na Rys. 5 i 6 badanego układu zawierającego połączenie sprężystej listwy w sztywnym zacisku wynika, że:

- własności sprężysto-tarciowe połączenia sprężystej listwy w zacisku opisane zostały w postaci krzywoliniowej pętli histerezy,
- przy ustalonych wartościach jednostkowej siły tarcia  $q_0$  i  $q_s$  oraz zwiększaniu wartości podstycznej  $A_s$ , zmniejsza się wartość przemieszczenia listwy,
- badany układ z listwą w zacisku dobrze tłumí drgania swobodne dla podanych wartości parametrów.

## LITERATURA

- [1] Osiński Z. i inni: *Tłumienie drgań*. PWN, Warszawa 1997.
- [2] Giergiel J.: *Tłumienie drgań mechanicznych*. PWN, Warszawa 1990.
- [3] Giergiel J.: *Problemy tarcia konstrukcyjnego w dynamice maszyn*. Zeszyty Naukowe AGH nr 299 z. 44 Kraków 1971.
- [4] Kosior A. *Wpływ parametrów wybranych połączeń z tarciem konstrukcyjnym na właściwości sprężysto-tłumiące układów mechanicznych*. Prace Naukowe, Mechanika, z. 209, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
- [5] Kosior A. *Tłumienie drgań swobodnych układu z listwą w zacisku z tarciowo - sprężystym oddziaływaniem*. Materiały VIII Polsko-Francuskiego Seminarium Naukowego Mechaniki, 213-221, Warszawa 2001.
- [6] Kosior A.: *Investigation of the joint between a strip and foundation with regard to the elasto - frictional model contact*. Machine Dynamics Problems, Warsaw University of Technology, 16, 39-53, Warsaw 1996.



## **SYMULACJA PĘTLI HISTEREZY BETONU Z WYKORZYSTANIEM SZTUCZNYCH SIECI NEURONOWYCH I METOD BAYESOWSKICH**

**Agnieszka Krok**

Uniwersytet Jagielloński,  
Instytut Informatyki Wydziału Matematyki i Informatyki,  
ul. Nawojki 11, 30-072 Kraków,  
e-mail: iiuj@ii.uj.edu.pl

---

**Abstract:** *Feed-forward layered Artificial Neural Networks (ANN) learnt by means the evidence procedure for Bayesian technique are used for simulation and prediction of hysteresis loops. Concrete hysteresis loops obtained by cyclic loading are considered. ANN were learned and tested on the experimental data. The prediction of the stress - strain relation was made for the last part of the experiment, basing on its previous stage.*

---

### **1. Wprowadzenie**

W pracy podjęto problem symulacji oraz predykcji pętli histerezy odkształcenie - naprężenie, otrzymanych podczas testów cyklicznego ściskania lub rozciągania, różnych typów próbek betonowych. Jako realizację niejawnego modelu matematycznego, zastosowano Sztuczne Sieci Neuronowe (SSN). Prawidłowo wytrenowane SSN pozwalają uzyskać predykcję krzywej w dalszej fazie eksperymentu, na podstawie informacji o jego wcześniejszym przebiegu. Rozpatrywano Bayesowski model SSN, w którym wagi, wektor wejścia oraz wyjście SSN są przyjęte jako zmienne losowe. Parametry tak skonstruowanej SSN wyznaczano w oparciu o procedurę *evidence*, [1]. Rozpatrywany problem wymagał także doboru odpowiedniego wektora informacji wejściowej dla SSN, oraz długości uczenia sieci.

### **2. Model Bayesowski sieci neuronowej**

Sztuczna sieć neuronowa, w ujęciu Bayesowskim, oparta jest na modelu teoretycznym postaci [1]:

$$y = f(\mathbf{x}; \mathbf{w}) + \varepsilon, \quad (1)$$

gdzie  $f$  jest nieliniową funkcją, odwzorowującą wejście  $\mathbf{x}$  SSN w wyjście  $y$ , reprezentującą strukturę SSN.  $\varepsilon$  jest szumem nałożonym na wyjście SSN,  $\mathbf{w}$  wektorem wag i biasów sieci. Zarówno wejście, jak i wyjście SSN, interpretowane są jako zmienne losowe.

Jako reprezentacje wstępnej wiedzy o wartościach wag SSN, przyjmuje się rozkład *a priori* wag sieci:

$$p(\mathbf{w}). \quad (2)$$

W niniejszej pracy rozpatrywano powyższy rozkład w postaci Gaussowskiej:

$$p(\mathbf{w}) = \frac{\exp(-\alpha \|\mathbf{w}\|^2/2)}{Z_W(\alpha)}, \quad (3)$$

gdzie  $\alpha$  reprezentuje odwrotność wariancji rozkładu zmiennej losowej  $\mathbf{w}$ :

$$\alpha = 1/D^2(\mathbf{w}). \quad (4)$$

$Z_W(\alpha)$  jest stałą normalizującą postaci:  $Z_W(\alpha) = (2 * pi/\alpha)^{W/2}$  gdzie  $W$  oznacza liczbę wag i biasów SSN. Po podaniu informacji o zbiorze wzorców uczących  $D$ , wyznacza się ich rozkład *a posteriori*:

$$p(\mathbf{w}|D) = \frac{p(D|\mathbf{w})p(\mathbf{w})}{p(D)}, \quad (5)$$

gdzie  $p(D|\mathbf{w})$  jest wiarygodnością zbioru danych. Przy założeniu prawdziwości przyjętego w modelu teoretycznym rozkładu wag SSN, oraz przyjęciu rozkładu wyjścia SSN postaci Gaussowskiej o zerowej wartości oczekiwanej i stałej wariancji, otrzymuje się:

$$p(D|\mathbf{w}) = \frac{\exp(-\beta \sum_{n=1}^N \|y(x^n; \mathbf{w}) - t^n\|^2/2)}{Z_D(\beta)}, \quad (6)$$

gdzie  $\beta$  reprezentuje odwrotność wariancji zmiennej losowej  $\varepsilon$ :

$$\beta = 1/D^2(\varepsilon) \quad (7)$$

$Z_D(\alpha)$  jest stałą normalizującą powyższy rozkład, postaci:  $Z_D(\alpha) = (2 * pi/\beta)^{N/2}$  gdzie  $N$  oznacza liczbę danych w zbiorze  $D$ .

Rozkład wyjścia SSN  $y$ , dla danego wektora wejściowego  $\mathbf{x}^*$  przyjmuje się w postaci:

$$p(y|\mathbf{x}^*, D) = \int p(y|\mathbf{x}^*, \mathbf{w})p(\mathbf{w}|D)d\mathbf{w}, \quad (8)$$

natomiast

$$E(y|\mathbf{x}^*, D) = \int yp(y|\mathbf{x}^*, \mathbf{w})p(\mathbf{w}|D)d\mathbf{w} \quad (9)$$

jest jego predykowaną, najbardziej prawdopodobną wartością.

Hiperparametry  $\alpha, \beta$  przyjęto w postaci zmiennych losowych, co w konsekwencji, pozwoliło na otrzymanie rozkładu wyjścia SSN postaci, [2]:

$$p(y|\mathbf{x}^*, D) = \int p(y|\mathbf{x}^*, \mathbf{w}, \beta)p(\mathbf{w}|\alpha, \beta, D)p(\alpha, \beta|D)d\alpha d\beta, \quad (10)$$

$$p(y|\mathbf{x}^*, \mathbf{w}, \beta) = N(t|y(\mathbf{x}^*, \mathbf{w}), \beta^{-1}), \quad (11)$$

$$\ln p(\mathbf{w}|\alpha, \beta, D) = p(D|\mathbf{w}). \quad (12)$$

### 3. Procedura *evidence* dla Bayesowskich SSN

W celu kalibracji modelu teoretycznego do danych doświadczalnych, wykorzystano procedurę *evidence*, wyznaczenia wartości hiperparametrów  $\alpha, \beta$ , [1].

Metoda zakłada poszukiwanie wartości hiperparametrów w postaci ich najbardziej prawdopodobnych wartości  $\alpha_{MP}$  and  $\beta_{MP}$ , stanowiących rozwiązanie zadania maksymalizacji ich rozkładu a posteriori  $p(\alpha, \beta|D)$ , przy założeniu znajomości zbioru danych  $D$ . Po zastosowaniu twierdzenia Bayesa, [2]:

$$p(\alpha, \beta|D) = \frac{p(D|\alpha, \beta)p(\alpha, \beta)}{p(D)}. \quad (13)$$

oraz przyjęciu, iż rozkład a priori  $p(\alpha, \beta)$  hiperparametrów jest jednostajny i pominięciu go w dalszych rozważaniach, problem ten jest równoważny poszukiwaniu maksimum:

$$p(D|\alpha, \beta) = \int p(D|\mathbf{w}, \beta)p(\mathbf{w}|\alpha)d\mathbf{w}. \quad (14)$$

Po podstawieniu do powyższego równania znanych postaci rozkładów, otrzymujemy, [1]:

$$p(D|\alpha, \beta) = \frac{1}{Z_D(\beta)} \frac{1}{Z_W(\alpha)} \int \exp(-S(\mathbf{w}))d\mathbf{w}, \quad (15)$$

gdzie

$$S(\mathbf{w}) = \beta/2 \sum_{i=1}^N (y(\mathbf{x}^n; \mathbf{w}) - t^n)^2 + \alpha/2 \sum_{i=1}^W \mathbf{w}_i^2 = \beta E_D + \alpha E_W \quad (16)$$

jest funkcją niedopasowania.  $t^n, y(\mathbf{x}^n; \mathbf{w})$  to wartości docelowe (znane) dla SSN oraz wyjście z SSN, odpowiednio, dla  $n$ -tego wzorca wejściowego.

Wyznaczenie  $\log$  z (16) i pochodnej cząstkowej otrzymanej wielkości, względem  $\alpha$ , daje:

$$\alpha = (W - \sum_{i=1}^W \frac{\alpha}{\lambda_i + \alpha}) / (2E_W(w_{MP})) = \gamma / (2E_W(w_{MP})), \quad (17)$$

gdzie  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{MP}$ ,  $\lambda_i$  jest  $i$ -tą wartością własną macierzy  $H$ :

$$H = \nabla \nabla E_D, \quad (18)$$

natomiast

$$\gamma = \sum_{i=1}^W \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \alpha}. \quad (19)$$

Wielkość  $\mathbf{w}_{MP}$  oznacza najbardziej prawdopodobną wartość wektora wag SSN, którą wyznacza się w oparciu o jedną ze standardowych metod uczenia SSN, w procesie minimalizacji przyjętej funkcji błędu sieci na danym zbiorze uczącym. Powyższy związek, ze względu na  $\alpha$ , został wykorzystany podczas re-estymacji tego parametru, zgodnie ze wzorem:

$$\alpha = \gamma / (2E_D(\mathbf{w}_{MP})), \quad (20)$$

dla  $\mathbf{w} = \mathbf{w}_{MP}$ .

Wyznaczenie  $\log z$  (16) i pochodnej cząstkowej otrzymanej wielkości, względem  $\beta$ , pozwala otrzymać:

$$\beta = (N - \gamma)/(2E_D(\mathbf{w}_{MP})). \quad (21)$$

### 3.1. Algorytm poszukiwania parametrów modelu neuronowego

Hiperparametry, charakteryzujące przyjęty model SSN, wyznaczone są w oparciu o następujący algorytm:

- wybór początkowych wartości hiperparametrów  $\alpha$  i  $\beta$ , inicjalizacja wag SSN, zgodnie z rozkładem wyznaczonym przez hiperparametr  $\alpha$ ,
- trenowanie SSN z wykorzystaniem algorytmu uczenia Scaled Conjugate Gradients Algorithm, w celu zminimalizowania wartości funkcji niedopasowania:  $S(\mathbf{w})$ , gdzie  $N = L$  jest liczbą wzorców uczących, w celu znalezienia najbardziej prawdopodobnej wartości wektora wag SSN:  $\mathbf{w}_{MP}$ ,
- re-estymacja hiperparametrów:

$$\alpha(new) = \gamma/(2E_W(\mathbf{w}_{MP})) \quad (22)$$

i

$$\beta(new) = (N - \gamma)/(2E_D(\mathbf{w}_{MP})) \quad (23)$$

- ponowne wyznaczenie wielkości

$$p(D|\alpha(new), \beta(new), \gamma), \quad (24)$$

- kroki 2-4 powtarzane do uzyskania zbieżności.

Poprzez liczbę cykli w pętli wewnętrznej rozumiemy liczbę epok uczenia SSN przy pomocy algorytmu Scaled Conjugate Gradients Algorithm. Liczbę poprawek hiperparametrów  $\alpha \Rightarrow \alpha(new)$ ,  $\beta \Rightarrow \beta(new)$  przyjęto jako liczbę pętli wewnętrznych. Poprzez liczbę cykli w pętli zewnętrznej oznaczono liczbę re-estymacji wektora wag SSN  $\mathbf{w}$ , [3].

## 4. Symulacja i predykcja pętli histerezy dla próbek betonowych

### 4.1. Dane do analizy neutronowej

Rozważano dwa zbiory danych, pochodzące z eksperymentów na materiale rzeczywistym. Zbiór nr 1 stanowiło 12 próbek cylindrycznych, o wymiarach 3x6 in., poddanych obciążeniu cyklicznemu ściskania, [4]. Zbiór danych nr 2 składał się z 15 próbek prostopadłościennych, o wymiarach 150x60x50 mm, z symetrycznymi nacięciami 5x5 mm, redukującymi efektywny przekrój poprzeczny próbki do 50x50 mm. Próbki były poddane obciążeniu cyklicznemu rozciągania, [5].

Jako dane do analizy neuronowej przyjęto zbiór punktów, powstałych z dyskretyzacji krzywych histerezy:  $\sigma - \varepsilon$  (dla zbioru 1.) lub  $\sigma - \delta_c$  (dla zbioru 2.), por. Tabela 1. Jako wstępne przetwarzanie zastosowano skalowanie danych do przedziału [0.1,0.9].

Tabela 1: Charakteryzacja danych eksperymentalnych, N - liczba danych dla SSN

Numer zbioru	Eksperyment	Zakres danych	N
1	ściskanie - ściskanie	$[0, R_c]$	405
2	rozciąganie - rozciąganie	$[0.1R_r, R_r]$	1352

#### 4.2. Neuronowa symulacja i predykcja pętli histerezy

Każdy ze zbiorów danych podzielono na podzbiory uczący oraz testujący dla SSN. SSN testowano na 3 całych ostatnich pętlach histerezy w przypadku eksperymentu ściskania, oraz 2 ostatnich pętlach histerezy w przypadku rozciągania. Przyjęcie takiego podziału, w przypadku poprawnie nauczonej SSN, pozwala otrzymać symulacje wstępnej fazy rozważanych eksperymentów oraz przewidywać zachowanie się krzywej histerezy w dalszych fazach doświadczeń, tylko na podstawie informacji o formie relacji naprężenie - odkształcenie do pewnego momentu czasowego.

Liczne eksperymenty numeryczne wykazały, iż składnikami podawanego SSN wektora wejściowego powinny być, por. [6]:

- znacznik przebiegu eksperymentu w czasie, który przyjęto jako numer punktu na zdyskretyzowanej krzywej histerezy, unormowany liczebnością zbioru danych:

$$k/P,$$

gdzie  $k = 1, 2, \dots, P$ , gdzie  $P = 405$  lub  $P = 1352$ ,

- numeryczny znacznik przebiegu eksperymentu wewnątrz każdej z pętli histerezy oddzielnie, parametr *licznik* unormowany do przedziału  $[0,1]$ , numerujący wzorce SSN niezależnie dla każdej pętli postaci:

$$\text{licznik} = [1/N_1, 2/N_1, \dots, N_1/N_1, \dots, 1/N_i, 2/N_i, \dots, N_i/N_i, \dots, 1/N_9, 2/N_9, \dots, N_9/N_9] \quad (25)$$

gdzie  $N_i$  jest liczbą wzorców w  $i$ -tej pętli histerezy,

- numeryczny znacznik fazy wzrostu lub malenia obciążenia:

$$\text{licznik}_{1,i} = [1/M_i, 2/M_i, \dots, M_i/M_i, (M_i - 1)/M_i, (M_i - 2)/M_i, \dots, (M_i - N_i)/M_i] \quad (26)$$

gdzie  $M_i$  jest liczbą wzorców, odczytanych podczas fazy obciążania materiału,  $N_i$  liczbą wzorców, odczytanych podczas fazy odciążania materiału, dla  $i$ -tej pętli histerezy.

Parametr  $\text{licznik}_{2,i}$  stanowi przeskalowany do przedziału  $[0.1,0.9]$  parametr  $\text{licznik}_{1,i}$ .

- wartość  $\sigma$ , podana przez SSN podczas przetwarzania poprzedniego wzorca wejściowego, oznaczona jako:  $\sigma_{ssn}(k - 1)$ .

Zastosowano SSN jednokierunkowe o architekturze 3-6-1, z sigmoidalnymi funkcjami aktywacji neuronów, [6]. Na wyjściu SSN oczekiwano wartości  $\sigma(k)$ .

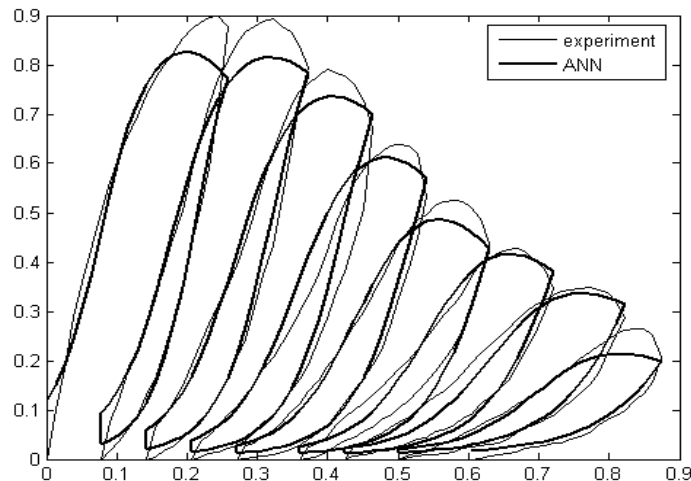
#### 4.2.1. Wyniki uczenia i testowania SSN dla eksperymentu ściskania

Dla próbek cylindrycznych ściskanych, zbiór uczący składał się z sześciu pierwszych pętli histerezy, które po dyskretyzacji dały  $L = 273$  wzorców. SSN testowano na pozostałych  $T = 132$  punktach eksperymentalnych. Podczas etapu testowania SSN sprawdzano numeryczną efektywność modelowania trzech ostatnich pętli histerezy.

Jako  $k$ -ty wzorzec wejściowy dla SSN przyjęto:

$$\mathbf{x}(k) = [\sigma_{ssn}(k-1), k/(273+132), licznik_2], \quad (27)$$

gdzie  $k = 1, \dots, 405$ . Wyniki uczenia i testowania SSN dla hiperparametrów  $\beta_{init} = 50$ , i  $\alpha_{init} = 0.01$ , przedstawiono na Rys. 1. Liczba cykli w pętli wewnętrznej dla prezentowanych wyników wynosi 500, liczba poprawek hiperparametrów  $\alpha \Rightarrow \alpha(new)$ ,  $\beta \Rightarrow \beta(new)$  wynosi 2, liczbę cykli w pętli zewnętrznej przyjęto także równa 2.



Rysunek 1: Wyniki symulacji neuronowej eksperymentu ściskania próbek betonowych cylindrycznych

#### 4.2.2. Wyniki uczenia i testowania SSN dla eksperymentu rozciągania

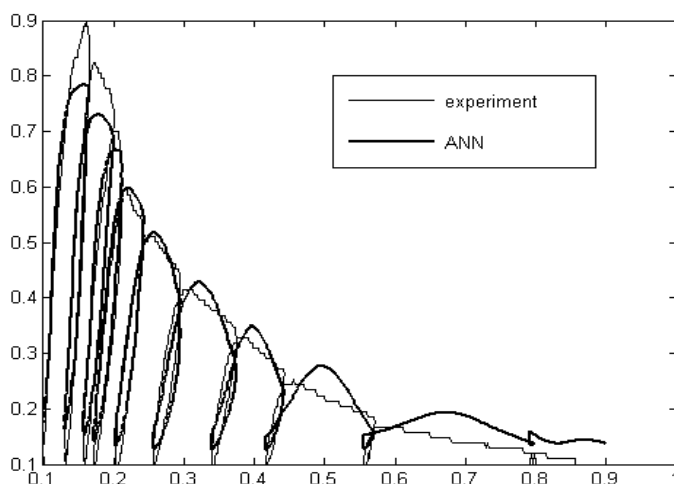
Odmienne kształt pętli histerezy, dla eksperymentu rozciągania próbek prostopadłościennych, spowodował konieczność zmiany wektora wejścia SSN. Znacznik postępu eksperymentu przyjęto w postaci malejącego ciągu wielkości  $(1 - k/1352)^2$ , pozostałe wartości podawane SSN na wejście skalując w ten sam sposób:

$$\mathbf{x} = [(1 - k/1352)^2, (1 - k/1352)^2 \sigma_{ssn}(k-1), (1 - k/1352)^2 licznik_2]. \quad (28)$$

Dla próbek prostopadłościennych rozciąganych zbiór uczący składał się z sześciu pierwszych pętli histerezy, które po dyskretyzacji dały  $L = 1168$  wzorców. SSN testowano na

pozostałych  $T = 184$  punktach eksperymentalnych. Celem predykcji neuronowej było modelowanie dwóch ostatnich pętli histerezy.

Wyniki uczenia i testowania SSN dla hiperparametrów  $\beta_{init} = 50$ , i  $\alpha_{init} = 0.01$ , przedstawiono na Rys. 2. Liczba cykli w pętli wewnętrznej dla prezentowanych wyników wynosi 300, liczba poprawek hiperparametrów  $\alpha \Rightarrow \alpha(new)$ ,  $\beta \Rightarrow \beta(new)$  wynosi 3, liczbę cykli w pętli zewnętrznej przyjęto także równa 3.



Rysunek 2: Wyniki symulacji neuronowej eksperymentu rozciągania próbek betonowych prostokątnych

#### 4.3. Porównanie efektywności zaproponowanej metody z wcześniej stosowanymi

W pracy [7] rozważano te same zbiory danych, oraz identyczny podział na zbioru uczący i testujący dla SSN. Symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem SSN o tej samej architekturze, uczonej z wykorzystaniem algorytmu Filtra Kalmana (FK).

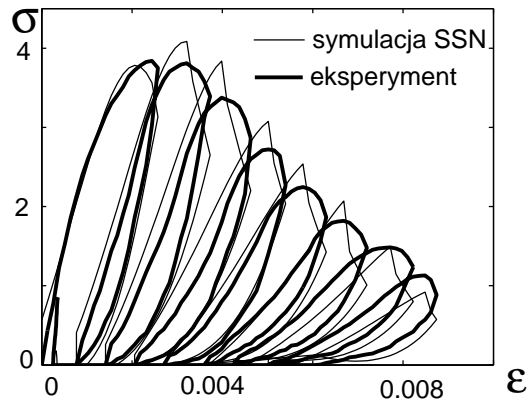
Dla eksperymentu ściskania próbek cylindrycznych, wyniki otrzymane z wykorzystaniem podejścia zaproponowanego w niniejszej pracy, charakteryzują się dużo lepszym jakościowym odwzorowaniem w zakresie przejścia z fazy obciążania do odciążania materiału, por. Rys. 3.

Dla eksperymentu rozciągania próbek prostokątnych otrzymano, w stosunku do metody opartej o FK, przeszacowanie wartości naprężeń w zbiorze testowym, por. Rys. 4.

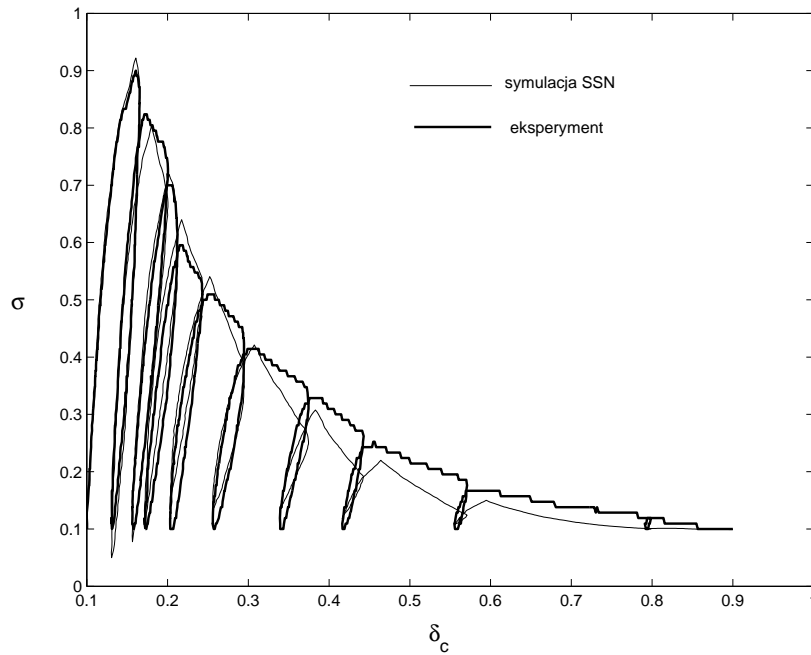
#### 5. Wnioski

Zaproponowana w pracy metoda symulacji oraz predykcji, dla testów cyklicznego ściskania lub rozciągania rozważanych próbek betonowych, pozwoliła na otrzymanie neuronowej symulacji związku odkształcenie - naprężenie dla rozważanych eksperymentów.

W przypadku obu eksperymentów otrzymano poprawny model, interpolujący krzywą



Rysunek 3: Wyniki uczenia i testowania, uczenie SSN metodą FK, za [6]

Rysunek 4: Wyniki uczenia i testowania, uczenie SSN metodą FK, za [6],  $x = (1-k/1352)^2 \cdot [1, (1 - \text{licznik}), \text{licznik}_2]$ 

histerezy w oparciu o zbiór uczący. W fazie testowania model neuronowy ekstrapolował krzywą histerezy, w zakresie dwóch ostatnich lub trzech ostatnich, pętli poprawnie, oddając charakter zachodzącego zjawiska.



Zaproponowana metoda doboru parametrów SSN wydaje się być mniej skuteczna w przypadku zbiorów testowych znacznie odbiegających charakterem od zbiorów uczących.

Konstrukcja algorytmu wymaga bowiem, dla otrzymania poprawnych związków, wyznaczających kolejne wartości hiperparametrów, przeprowadzenia fazy uczenia SSN klasyczną metodą gradientową uczenia SSN (Scaled Conjugate Gradients Algorithm), co prowadzi może do ponadprzystosowania Sieci neuronowej w tej fazie uczenia.

Zdaniem autora, w celu poprawienia uzyskanych wyników powinno się zrezygnować z tej fazy algorytmu, na rzecz zastosowania metody nie wymagającej na etapie pośrednim aż tak długiego uczenia SSN.

## LITERATURA

- [1] C.M. Bishop, *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford Univ. Press, 1995
- [2] MacKay, D. J. C. (2003). *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press.
- [3] I.T. Nabney, *Netlab, Algorithms for pattern recognition*, Springer Verlag, 2002
- [4] B.P. Sinha, K. H. Gerstle, L. G. Tulin, Stress-strain relations for concrete under cyclic loading, *Journal of American Concrete Inst.* No. 61-12, 1964
- [5] Wolinski Sz., Influence of aggregate size and loading type on the tensile softening behavior of concrete, *Delft Univ. of Tech Rapport No.* 5-86-16, 1986
- [6] A. Krok, *Analiza wybranych zagadnień mechaniki konstrukcji i materiałów za pomocą SSN i filtrów Kalmana*, 2007, praca doktorska
- [7] A. Krok, Simulation of building loops for a superconductor using neural networks with Kalman filtering, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 13:575-582, 2006



## PRZYKŁAD REDUKCJI DRGAŃ BELKI

**Izabela Krzysztofik**

Politechnika Świętokrzyska, Katedra Pojazdów i Sprzętu Mechanicznego  
Al. 1000-lecia PP 7, 25-314 Kielce  
e-mail: pssik@tu.kielce.pl

---

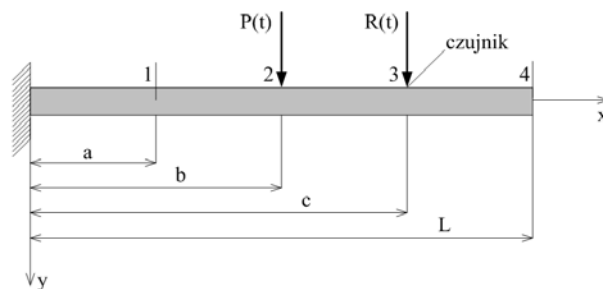
**Abstract:** *Problem of active reduction of vibrations of continuous system by means of punctual action is formulated in this paper. Model of beam with taking into consideration internal damping material of beam is considered. Forms of individual vibrations are determined by Fourier's method. Analysis of proposed way of reduction of vibrations is carried out by Galerkin's method. There are results of numerical analysis in the graphic form.*

---

### 1. WPROWADZENIE

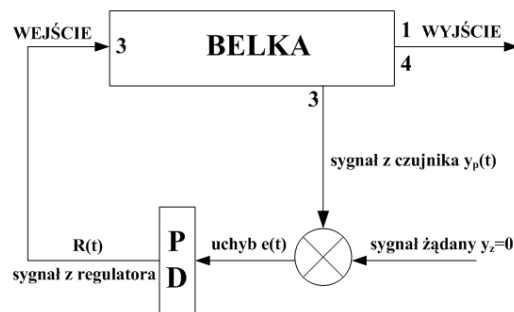
Problem tłumienia drgań układów ciągłych jest nadal aktualny. Widoczny w ostatnich latach gwałtowny rozwój elektroniki i stosunkowo niskie koszt zespołów i podzespołów sterowania przyczyniły się do zwiększenia zainteresowania metodami aktywnej redukcji drgań w obiektach mechanicznych. Najczęściej jednak analizowano tłumienie drgań w ujęciu układów dyskretnych, zarówno liniowych jak i nieliniowych.

W pracy zaproponowano metodę redukcji drgań układu ciągłego za pomocą oddziaływań punktowych. Do rozważań przyjęto model belki wspornikowej pokazany na Rys. 1. Belka obciążona jest siłą skupioną  $P(t)$  przyłożoną w punkcie 2 dla  $x = b$ .



Rysunek 1. Model belki wspornikowej

Tłumienie drgań poprzecznych belki przeprowadzono w następujący sposób. W punkcie 3 belki dla  $x = c$  umieszczono czujnik mierzący ugięcie belki  $y_p(t)$ . W tym samym punkcie umieszczono sterowany wibrator liniowy, który działa na sygnał sprzężenia zwrotnego  $e(t)$ . Skutek działania wibratora sprawdzano w punkcie 1 dla  $x = a$  i w punkcie 4 dla  $x = L$ . Schemat działania układu tłumienia drgań belki pokazano na Rys. 2.



Rysunek 2. Schemat działania układu tłumienia drgań belki

## 2. ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH BELKI JEDNORODNEJ

Równanie poprzecznych drgań własnych belki ma postać:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Rozwiązania poszukujemy metodą rozdzielenia zmiennych

$$y(x, t) = Y(x)T(t) \quad (2)$$

przy następujących warunkach brzegowych

$$y(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \Big|_{x=L}, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0 \Big|_{x=L}$$

dla równania:

$$Y^{IV}(x) - k^4 Y(x) = 0 \quad (3)$$

gdzie:  $k^4 = \frac{\rho F}{EJ} \omega^2$ ,  $\omega = k^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$ .

Rozwiązanie równania (1) poszukujemy w postaci:

$$Y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \sinh kx + C_4 \cosh kx \quad (4)$$

Równanie charakterystyczne jest następujące:

$$1 + \cos kL \cosh kL = 0 \quad (5)$$

Kilka jego pierwiastków:

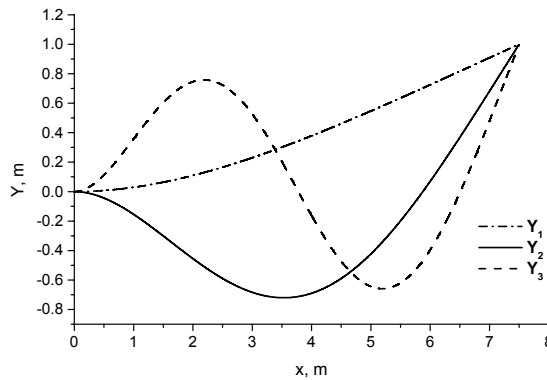
$$k_1 L = 1.875, \quad k_2 L = 4.694, \quad k_3 L = 7.855, \quad k_4 L = 10.996$$

Unormowaną postać drgań własnych przyjęto dla  $Y(L) = 1$ . Stąd  $i$ -ta postać drgań własnych:

$$Y_i(x) = \frac{\sin k_i L + \sinh k_i L}{-2 \sin k_i L \sinh k_i L} \left[ \frac{\sin k_i x - \sinh k_i x + \cos k_i L + \cosh k_i L}{\sin k_i L - \sinh k_i L} (\cos k_i x - \cosh k_i x) \right] \quad (6)$$

Na Rys. 3 przedstawiono trzy pierwsze postacie drgań własnych dla

$$k_1 = 0.25001, \quad k_2 = 0.62588, \quad k_3 = 0.104733.$$



Rysunek 3. Postacie drgań własnych

### 3. ANALIZA TLUMIENIA DRGAŃ BELKI METODĄ GALERKINA

Równanie drgań poprzecznych belki z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego i siły redukującej ma postać [1, 2]:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \eta EJ \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(t) \delta(x-b) + R(t) \delta(x-c) \quad (7)$$

gdzie:  $EJ$  – sztywność belki na zginanie,  $\rho F$  – jednostkowa masa belki,  $\eta$  – współczynnik tłumienia materiału belki według hipotezy Kelvina-Voigta,  $P(t)$  – obciążenie belki.

Siła redukująca ma postać:

$$R(t) = -k_p y(x,t) \Big|_{x=c} - k'_p \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=c} \quad (8)$$

gdzie:  $k_p, k'_p$  - współczynnik wzmocnienia części proporcjonalnej i różniczkowej regulatora.  
Przybliżone rozwiązania równania (7) poszukujemy w postaci:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_i(x) S_i(t) \quad (9)$$

gdzie  $Y_i(x)$  oznaczają wyznaczone uprzednio funkcje własne, a  $S_i(t)$  są poszukiwanymi funkcjami czasu opisującymi drgania wymuszone.

Stąd

$$\begin{aligned} EJ \sum_{i=1}^n Y_i^{IV}(x) S_i(t) + \eta EJ \sum_{i=1}^n Y_i^{IV}(x) \dot{S}_i(t) + \rho F \sum_{i=1}^n Y_i(x) \ddot{S}_i(t) = \\ = P(t) \delta(x-b) - k_p \left[ \sum_{i=1}^n Y_i(c) S_i(t) \delta(x-c) \right] - k'_p \left[ \sum_{i=1}^n Y_i(c) \dot{S}_i(t) \delta(x-c) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Wykorzystując ortogonalność drgań własnych [3] sprowadzamy równanie (7) do następującego przybliżonego układu różniczkowych równań zwyczajnych:

$$\begin{aligned} m_j \ddot{S}_j(t) + c_j \dot{S}_j(t) + k_j S_j(t) = P(t) Y_j(b) - k_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_j(c) S_i(t) - k'_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_j(c) \dot{S}_i(t) \quad (11) \\ j = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

gdzie:

$$m_j = \rho F \int_0^L (Y_j(x))^2 dx, \quad c_j = \eta EJ \int_0^L (Y_j''(x))^2 dx, \quad k_j = EJ \int_0^L (Y_j''(x))^2 dx$$

Dla przypadku uproszczonego, gdy  $j = 1$  mamy:

$$m_1 \ddot{S}_1(t) + [c_1 + k'_p Y_1^2(c)] \dot{S}_1(t) + [k_1 + k_p Y_1^2(c)] S_1(t) = P(t) Y_1(b) \quad (12)$$

Dla przypadku, gdy  $j = 3$  mamy układ trzech równań:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{S}_1(t) + c_1 \dot{S}_1(t) + k'_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_1(c) \dot{S}_i(t) + k_1 S_1(t) + k_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_1(c) S_i(t) &= P(t) Y_1(b) \\ m_2 \ddot{S}_2(t) + c_2 \dot{S}_2(t) + k'_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_2(c) \dot{S}_i(t) + k_2 S_2(t) + k_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_2(c) S_i(t) &= P(t) Y_2(b) \\ m_3 \ddot{S}_3(t) + c_3 \dot{S}_3(t) + k'_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_3(c) \dot{S}_i(t) + k_3 S_3(t) + k_p \sum_{i=1}^n Y_i(c) Y_3(c) S_i(t) &= P(t) Y_3(b) \end{aligned}$$

Rozwiązaniem powyższego układu równań jest wg [4] granica, do której zmierza ciąg rozwiązań podukładów tworzonych z równań (11).

Ugięcie belki w punktach 1 i 4 znajdujemy z zależności:

$$y(a,t) = \sum_{j=1}^n Y_j(a) S_j(t) \quad (13)$$

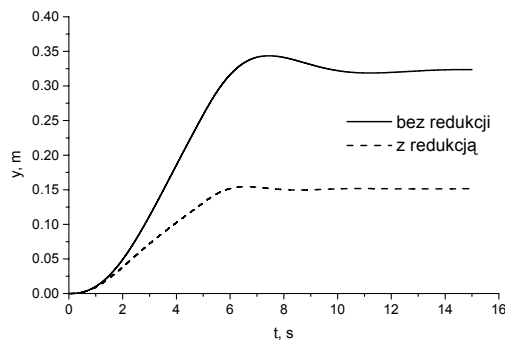
$$y(L,t) = \sum_{j=1}^n Y_j(L) S_j(t) \quad (14)$$

#### 4. ROZWIĄZANIA NUMERYCZNE

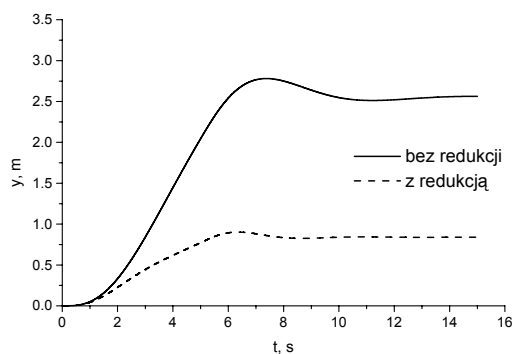
Symulacje numeryczne przeprowadzono dla następujących danych:

- długość belki:  $L = 7.5$  m
- pole przekroju poprzecznego belki  $F = 0.001$  m<sup>2</sup>,
- moment bezwładności przekroju poprzecznego belki  $J = 0.833$  cm<sup>4</sup>,
- gęstość materiału  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>,
- moduł Younga  $E = 2.06 \cdot 10^{11}$  N/m
- siła obciążająca  $P(t) = \begin{cases} P_0 t / \tau & \text{dla } t \leq \tau \\ P_0 & \text{dla } t > \tau \end{cases}$  gdzie  $P_0 = 100$  N ,  $\tau = 5$  s
- współczynniki wzmocnień  $k_p = 50$  ,  $k_p' = 10$

Na Rys. 4 i 5 przedstawiono ugięcie belki w punktach 1 i 4 bez działania redukcji i z redukcją drgań.



Rysunek 4. Ugięcie belki w punkcie 1.



Rysunek 5. Ugięcie belki w punkcie 4.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono pewien sposób redukcji drgań układu ciągłego, jakim jest belka. Jak widać z wykresów 4 i 5 powoduje on skuteczne wytlumienie drgań, przy stosunkowo niedużych współczynnikach wzmocnienia regulatora PD. Sposób ten sprawdza się doskonale dla różnych warunków obciążenia belki.

Zapewne proponowana metoda nie spowoduje całkowitego wytlumienia drgań, ale może spowodować ich redukcję do wystarczającej dla praktyki wartości. W dalszych badaniach należy sprawdzić jej przydatność dla innych układów ciągłych jak np. ciągien.

## LITERATURA

- [1] А.П. Филипов, *Колебания деформируемых систем*. Машиностроение, Москва 1970.
- [2] S. Kaliski (red), *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa, 1966.
- [3] Z. Koruba, J.W. Osiecki, *Elementy mechaniki zaawansowanej*, podręcznik akademicki, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2007.
- [4] С.Г. Михлин, *Прямые методы в математической физике*, Гос.Издат.Тех.-Теор.Лит., Москва 1957.



## **PROGNOZOWANIE INTERAKCJI DYNAMICZNEJ GRUNT-BUDYNEK W PRZYPADKU DRGAŃ WZBUDZANYCH WSTRZĄSAMI GÓRNICZYMI**

**Krystyna Kuźniar<sup>1</sup>, Łukasz Chudyba<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Akademia Pedagogiczna w Krakowie  
30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2  
e-mail: kkuzniar@ap.krakow.pl

<sup>2</sup> Studia Doktoranckie WIL Politechniki Krakowskiej  
31-155 Kraków, ul. Warszawska 24  
e-mail: chudyjoy@poczta.onet.pl

---

**Abstract:** *The paper deals with the analysis of the soil-structure interaction in case of the transmission of ground vibrations from mining tremors to medium-height building foundation. The one of parameters used in scales of mine-induced dynamic influences (GSI-2004) to evaluate the harmfulness of ground vibrations to surface structures – maximal values (amplitudes) of resultant acceleration of horizontal vibrations were applied. The influence of mining tremors parameters as mining tremor energy and epicentral distance on the soil-structure effect is also discussed. Neural networks were used.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Eksploracji rud miedzi w Legnicko-Głogowskim Okręgu Miedziowym (LGOM) towarzyszą wstrząsy górnicze, przy czym intensywność najsilniejszych tego typu zjawisk zbliżona jest do słabych trzęsień ziemi. Na skutek losowo występującego (podobnie jak przy trzęsieniach ziemi) pękania skał w górotworze, fale wstrząsowe propagują się do powierzchni i oddziałują na zabudowę.

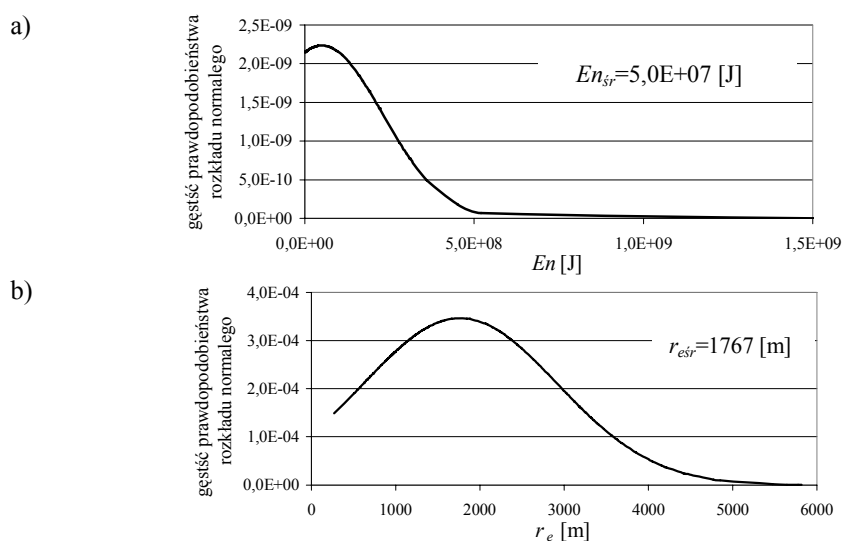
W trakcie przekazywania drgań z gruntu na obiekt występuje zjawisko wzajemnego oddziaływania (współpracy) układu konstrukcja-podłoże, nazywane interakcją dynamiczną. Jest to zagadnienie bardzo ważne z praktycznego, inżynierskiego punktu widzenia. Istotne jest zarówno prognozowanie wpływu drgań na budynek, jak również ocena sposobu przekazywania drgań na ten obiekt. Analiza wielu jednocześnie rejestrowanych przebiegów drgań fundamentów budynków i gruntu w ich pobliżu wskazuje na istotne różnice (por. np. [1-3]). Tymczasem dokładniejsza ocena szkodliwości drgań dla budynków jest możliwa na podstawie drgań ich fundamentów. Zatem wtedy, gdy pomiarów drgań dokonuje się tylko na gruncie (co jest częstym przypadkiem w praktyce), potrzebne jest na ich podstawie prognozowanie drgań fundamentów budynków.

W pracy omówiono wyniki badań przekazywania drgań, których źródłem były wstrząsy górnicze w LGOM, z gruntu na fundamenty pięciokondygnacyjnego budynku mieszkalnego. W przypadku każdego ze wstrząsów porównywano maksymalne wartości wypadkowych przyspieszeń drgań poziomych gruntu i fundamentu budynku. Wartości te wyznaczano na podstawie zarejestrowanych w tym samym czasie przebiegów drgań gruntu i fundamentu. Wypadkowa przyspieszeń drgań poziomych gruntu jest jednym z parametrów używanych w Górniczej Skali Intensywności (GSI-2004) [4] do oceny i przewidywania oddziaływań drgań pochodzenia górniczego na obiekty powierzchniowe w obszarze kopalń rud miedzi w LGOM.

Do prognozowania przekazywania drgań z gruntu na fundament budynku, zaproponowano wykorzystanie sztucznych sieci neuronowych (SSN).

## 2. ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH

Eksperymentalnej analizie przekazywania drgań od wstrząsów górniczych z podłoża na budynek dokonano w odniesieniu do mieszkalnego ścianowego budynku prefabrykowanego pięciokondygnacyjnego (o średniej wysokości) z poprzeczno-podłużnym układem ścian nośnych. Źródłem drgań były wstrząsy górnicze w LGOM o energiach z przedziału  $En=7.4E3-2E9$  J i odległościach epicentralnych z przedziału  $r_e=270-5815$  m. Na Rys. 1 pokazano gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego odpowiednio energii i odległości epicentralnych rozważanych wstrząsów oraz podano wartości średnie.



Rysunek 1: Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego energii (a) i odległości epicentralnych (b) rozważanych wstrząsów górniczych w LGOM

Do pomiarów przyspieszeń drgań zarówno gruntu jak i budynku stosowano aparaturę „czuwającą”. Czujniki pomiarowe na gruncie umieszczone są w odległości kilku metrów od budynku. Czujniki w budynku ustawione są na fundamentach. Analizowano przebiegi drgań zarejestrowane równocześnie na gruncie i w budynku od wielu wstrząsów górniczych. Mie-

rzono przyspieszenia drgań gruntu i fundamentu w kierunkach równoległych odpowiednio do poprzecznej ( $x$ ) i podłużnej ( $y$ ) osi budynku [1-3].

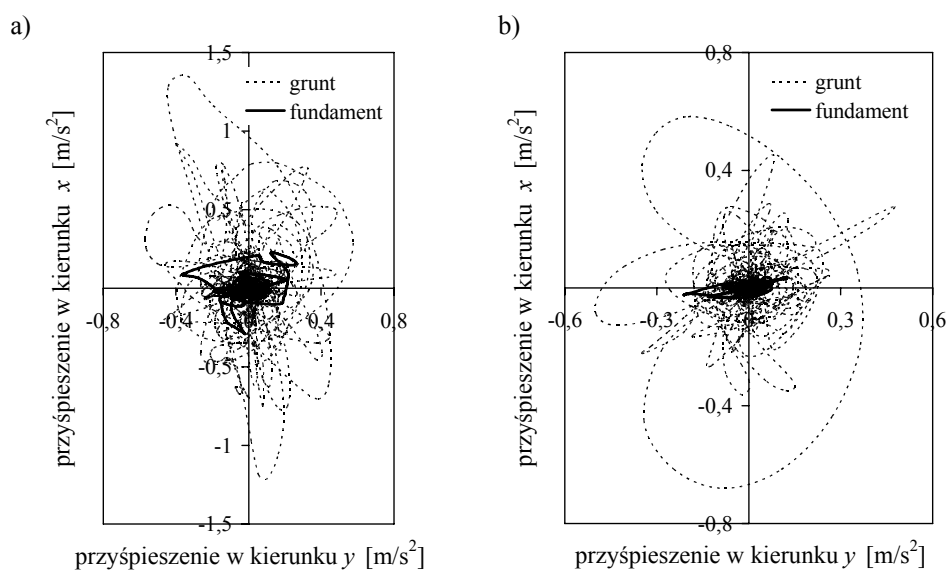
Na podstawie pomierzonych składowych przebiegów przyspieszeń drgań w kierunkach  $x$  i  $y$ , w przypadku każdego wstrząsu wyliczono maksymalne wartości wypadkowego przyspieszenia drgań poziomych  $PGA$  i  $PFA$ , odpowiednio na gruncie i na fundamencie budynku:

$$PGA = \max_t \left( \sqrt{a_{gx}^2(t) + a_{gy}^2(t)} \right), \quad (1a)$$

$$PFA = \max_t \left( \sqrt{a_{fx}^2(t) + a_{fy}^2(t)} \right), \quad (1b)$$

gdzie:  $a_{gx}(t)$ ,  $a_{gy}(t)$  oraz  $a_{fx}(t)$ ,  $a_{fy}(t)$  – odpowiednio przyspieszenia drgań na gruncie oraz fundamencie w kierunkach  $x$  i  $y$  w kolejnych chwilach czasu.

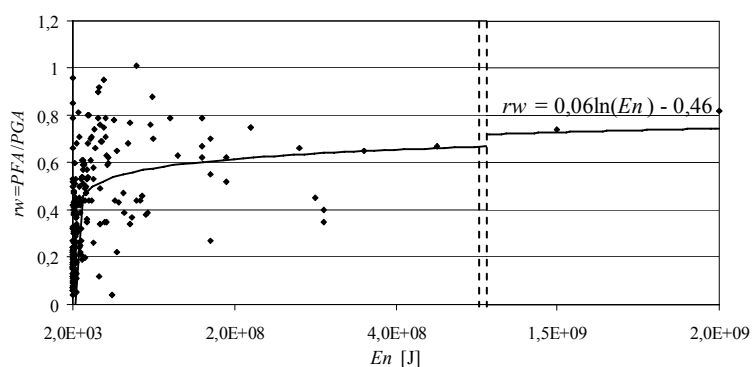
Na Rys. 2 pokazano przykładowe trajektorie końca wypadkowego wektora przyspieszeń drgań jednocześnie zarejestrowanych na gruncie i na fundamencie rozważanego budynku. Widać, że różnice w drganiach gruntu i fundamentu odbywających się w tym samym czasie są znaczące.



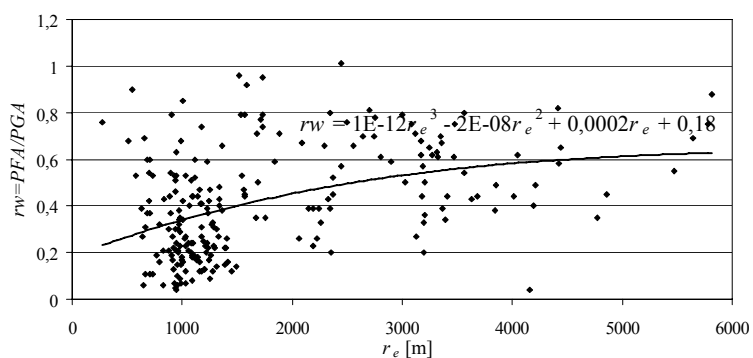
Rysunek 2: Trajektorie końca wypadkowego wektora przyspieszeń drgań jednocześnie zarejestrowanych na gruncie i na fundamencie rozważanego budynku od wstrząsu górniczego: a)  $En=1.7E8J$ ,  $r_e=912m$ ; b)  $En=5.5E6J$ ,  $r_e=1291m$

Oceny przekazywania drgań z gruntu na fundament dokonano poprzez porównanie maksymalnych amplitud wypadkowych przyspieszeń drgań jednocześnie zarejestrowanych na fundamencie budynku i gruncie obok budynku. W tym celu wyliczono ułamek  $r_w = PFA/PGA$ . Kolejno na Rys. 3 do 5 pokazano zależność  $r_w$  odpowiednio od energii wstrzą-

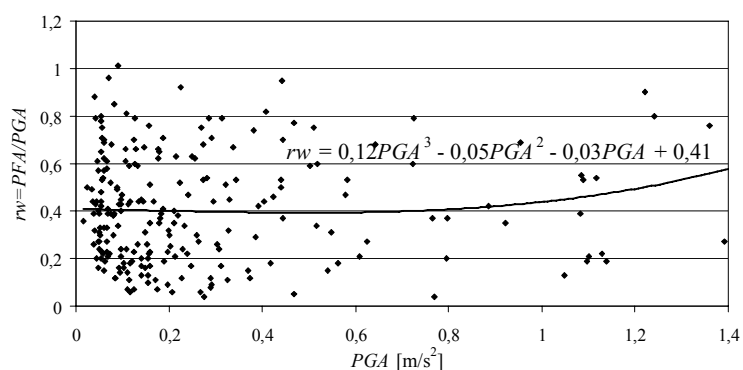
sów górniczych ( $En$ ), odległości epicentralnych ( $r_e$ ) i maksymalnych amplitud poziomych drgań wypadkowych gruntu ( $PGA$ ) wszystkich badanych wstrząsów.



Rysunek 3: Zależność  $rw = PFA/PGA$  od energii wstrząsów górniczych ( $En$ )

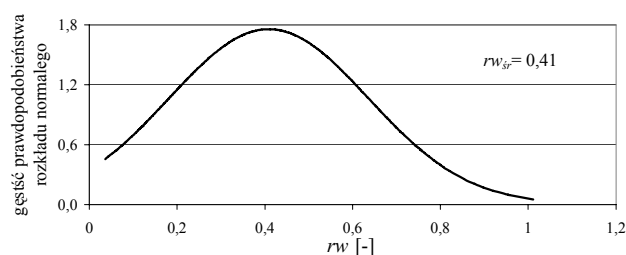


Rysunek 4: Zależność  $rw = PFA/PGA$  od odległości epicentralnych ( $r_e$ )



Rysunek 5: Zależność  $rw = PFA/PGA$  od maksymalnej amplitudy poziomych drgań wypadkowych gruntu ( $PGA$ )

Dodatkowo na Rys. 6 przedstawiono gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego wartości ułamka  $r_w$ .



Rysunek 6: Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu normalnego wartości ułamka  $r_w$

Stwierdzono, że określenie precyzyjnej zależności ułamka  $r_w$  od parametrów charakteryzujących wstrząsy górnicze jest bardzo trudne, a wręcz niemożliwe ze względu na duży rozrzut wartości  $r_w$ . Można jedynie zauważyć, że generalnie drgania gruntu przekazywane są lepiej na fundament budynku w przypadku bardzo silnych wstrząsów górniczych, jak również wtedy, gdy odległości epicentralne są duże.

W Tabeli 1 zamieszczono średnie wartości  $r_w$  w poszczególnych przedziałach wartości energii wstrząsu  $En$  (wiersz 1), odległości epicentralnej  $r_e$  (wiersz 2) oraz maksymalnego wypadkowego przyśpieszenia na gruncie  $PGA$  (wiersz 3). Tendencje w wartościach średnich w zasadzie potwierdzają kształty linii trendów z Rys. 3 do 5.

Tabela 1: Zależność wartości średniej  $r_w$  od parametrów wstrząsów i drgań

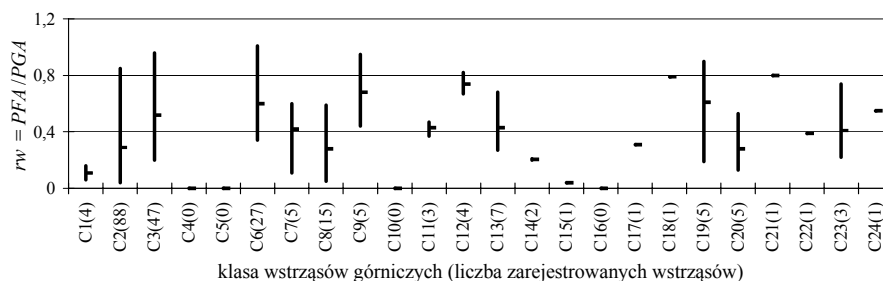
Lp.	Parametry wstrząsów i drgań		$r_w = PFA/PGA$
1	$En$ [J]	$\leq 5E7$	0,37
		$> 5E7$	0,59
2	$r_e$ [m]	$r_e \leq 800$	0,41
		$800 < r_e \leq 1500$	0,30
		$r_e > 1500$	0,56
3	$PGA$ [ $m/s^2$ ]	$\leq 300$	0,40
		0,301 – 0,600	0,43
		0,601 – 0,900	0,39
		$> 0,900$	0,47

W celu dokładniejszego określenia wartości ułamka  $r_w$ , zdecydowano się na podział wszystkich analizowanych wstrząsów na klasy. Wstrząs górniczy zaliczano do danej klasy na podstawie wielkości parametrów:  $En$ ,  $r_e$  i  $PGA$ , przy czym granice przedziałów poszczególnych parametrów ustalono jak w Tabeli 1. Uzyskano zatem 24 klasy wstrząsów. Ich zestawienie podano w Tabeli 2.

Tabela 2: Zestawienie klas wstrząsów górniczych

Klasa wstrząsów górnicych	Parametry wstrząsów górniczych		
	$En$ [J]	$r_e$ [m]	$PGA$ [ $m/s^2$ ]
C1	$\leq 5E7$	<800	$\leq 0,300$
C2	$\leq 5E7$	800-1500	$\leq 0,300$
C3	$\leq 5E7$	>1500	$\leq 0,300$
C4	$> 5E7$	<800	$\leq 0,300$
C5	$> 5E7$	800-1500	$\leq 0,300$
C6	$> 5E7$	>1500	$\leq 0,300$
C7	$\leq 5E7$	<800	0,301-0,600
C8	$\leq 5E7$	800-1500	0,301-0,600
C9	$\leq 5E7$	>1500	0,301-0,600
C10	$> 5E7$	<800	0,301-0,600
C11	$> 5E7$	800-1500	0,301-0,600
C12	$> 5E7$	>1500	0,301-0,600
C13	$\leq 5E7$	<800	0,601-0,900
C14	$\leq 5E7$	800-1500	0,601-0,900
C15	$\leq 5E7$	>1500	0,601-0,900
C16	$> 5E7$	<800	0,601-0,900
C17	$> 5E7$	800-1500	0,601-0,900
C18	$> 5E7$	>1500	0,601-0,900
C19	$\leq 5E7$	<800	$> 0,900$
C20	$\leq 5E7$	800-1500	$> 0,900$
C21	$\leq 5E7$	>1500	$> 0,900$
C22	$> 5E7$	<800	$> 0,900$
C23	$> 5E7$	800-1500	$> 0,900$
C24	$> 5E7$	>1500	$> 0,900$

Z kolei na Rys. 7 zamieszczono informację o przedziałach (zakresie) wartości ułamka  $r_w$  w poszczególnych klasach wstrząsów górniczych. Zaznaczono również wartości średnie i podano liczbę zarejestrowanych wstrząsów z danej klasy.

Rysunek 7: Wartości ułamka  $r_w$  w poszczególnych klasach wstrząsów górniczych

Widać, że nawet w przypadku wstrząsów górniczych zaliczanych do tej samej, bardzo wąskiej klasy, obserwuje się duży rozrzut wartości  $r_w$ . Taki znaczący problem w przewidywaniu wartości ułamka  $r_w$  pojawia się np. w klasie **C2, C3, C6, C19**.

### 3. WYKORZYSTANIE SIECI NEURONOWYCH DO PROGNOZOWANIA PRZEKAZYWANIA DRGAŃ Z PODŁOŻA NA BUDYNEK

Z analizy rezultatów badań doświadczalnych wynika, że ocena, a więc i przewidywanie przekazywania drgań od wstrząsów górniczych z gruntu na budynek pięciokondygnacyjny sprawiają wiele trudności ze względu na pojawiające się niejednoznaczności. Zaproponowano zatem wykorzystanie zgromadzonych wyników badań eksperymentalnych w połączeniu z techniką neuronową do prognozowania wartości ułamka  $r_w = PFA/PGA$  na podstawie parametrów wstrząsów górniczych i drgań gruntu.

Wektor wejścia sieci neuronowej przyjęto w postaci:

$$\mathbf{x}_{(3 \times 1)} = \{En, r_e, PGA\} \quad (2)$$

gdzie:  $En$  - energia wstrząsu górniczego;  $r_e$  - odległość epicentralna;  $PGA$  - maksymalna wartość (amplituda) wypadkowej drgań poziomych gruntu.

Na wyjściu z sieci wyliczano odpowiednią wartość ułamka  $r_w$ :

$$\mathbf{y}_{(1 \times 1)} = \{r_w\}. \quad (3)$$

Rozważono ponadto drugi wariant wektora wejścia, wzbogacając informację wejściową poprzez dodanie parametru określającego klasę, do której zaliczono wstrząs:

$$\mathbf{x}_{(4 \times 1)} = \{En, r_e, PGA, c\} \quad (4)$$

gdzie:  $En, r_e, PGA$  – jak w relacji (2);  $c$  – parametr określający klasę, do której zaliczono wstrząs górniczy.

Oczywiście informacja o przynależności wstrząsu górniczego do danej klasy jest już zawarta w trzech pierwszych składowych wektora wejścia. Poprzez dołączenie parametru  $c$ , tylko ją dodatkowo „wzmocniono”.

Analizowano sieci neuronowe typu wstecznej propagacji błędu (WPB) z algorytmem uczenia Resilient back-propagation (Rprop) i sigmoidalną unipolarną (logistyczną) funkcją aktywacji. Wykorzystano symulator neuronowy SNNS, wersja 4.2 [5].

Wyniki badań doświadczalnych umożliwiły przygotowanie po  $P = 226$  wzorców w przypadku każdego wariantu wektora wejścia. W obu przypadkach do uczenia sieci wybrano losowo  $L = 113$  z tych wzorców, do walidacji wykorzystano  $V = 56$ , a pozostałych  $T = 57$  wzorców użyto do testowania.

Dokładność obliczeń z użyciem sieci neuronowych oceniano poprzez błąd średniokwadratowy (*Mean Square Error*)  $MSE$  oraz błędy względne  $ep$ :

$$MSE(Q) = \frac{1}{Q} \sum_{p=1}^V (z_p - y_p)^2, \quad (5)$$

$$ep = \left| 1 - y_p / z_p \right| \cdot 100\%, \quad (6)$$

gdzie:  $Q = L, V, T$  – liczba wzorców z zbiorze uczącym ( $L$ ), walidującym ( $V$ ) i testującym ( $T$ );  $z_p$  i  $y_p$  – wartość stosunku  $r_w$  wyznaczona na podstawie zarejestrowanych przebiegów drgań oraz wyliczona neuronowo dla  $p$ -tego wzorca.

Do oceny dokładności przeprowadzonych obliczeń wykorzystano również tzw. procent sukcesu (*Success Ratio*)  $SR$  [%] w zależności od błędu względnego  $ep$  [%].  $SR$  określa, jaki procent wzorców uzyskano z predykcji neuronowej z błędem nie większym niż  $ep$ .

Błędy aproksymacji neuronowej dla sieci 3-6-5-1 z wektorem wejścia (2) oraz dla sieci z taką samą warstwą ukrytą i wektorem wejścia (4) (sieć: 4-6-5-1) zamieszczono w Tabeli 3, odpowiednio w wierszu 1 (sieć nr 1) i wierszu 2 (sieć nr 2).

Jak widać z Rys. 1, a zwłaszcza z danych dotyczących zarejestrowanych wstrząsów w poszczególnych klasach wstrząsów górniczych (Rys. 7), liczba wstrząsów zaliczonych do każdej klasy jest znacząco różna. Przykładowo, najczęściej rejestrowano wstrząsy o parametrach z klasy **C2**. Tak „niezrównoważona” struktura danych może potencjalnie wywoływać „tendencyjność” w uczeniu neuronowym. W celu zniwelowania tego efektu, zaproponowano „rozmnóżenie” danych uczących. Do  $L = 113$  wzorców uczących uzyskanych z pomiarów dodano kopie losowo wybranych wzorców uczących z klas **C1, C3-C24** tak, aby liczba wzorców uczących z tych klas była równa liczbie wzorców uczących z najliczniejszej klasy **C2**. W ten sposób osiągnięto  $L = 600$  wzorców uczących. Zbiór walidujący i testujący pozostawiono bez zmian. Obliczenia przeprowadzono dla sieci neuronowej o takiej samej strukturze 3-6-5-1 jak sieci nr 1. Błędy aproksymacji neuronowej zamieszczono w wierszu 3 (sieć nr 3) tabeli 3.

„Rozmnóżonego” zbioru uczącego użyto także do uczenia kolejnej sieci (sieć nr 4) z warstwą ukrytą jak w przypadku sieci nr 1, nr 2 i nr 3. W wektorze wejścia tej sieci przyjęto pięć parametrów:

$$\mathbf{x}_{(4 \times 1)} = \{En, r_e, PGA, c, Pr\} \quad (7)$$

gdzie:  $En, r_e, PGA, c$  – jak w relacji (4);  $Pr$  – parametr określający prawdopodobieństwo wystąpienia wstrząsu z klasy  $c$ .

Błędy aproksymacji neuronowej zamieszczono w wierszu 4 (sieć nr 4) Tabeli 3.

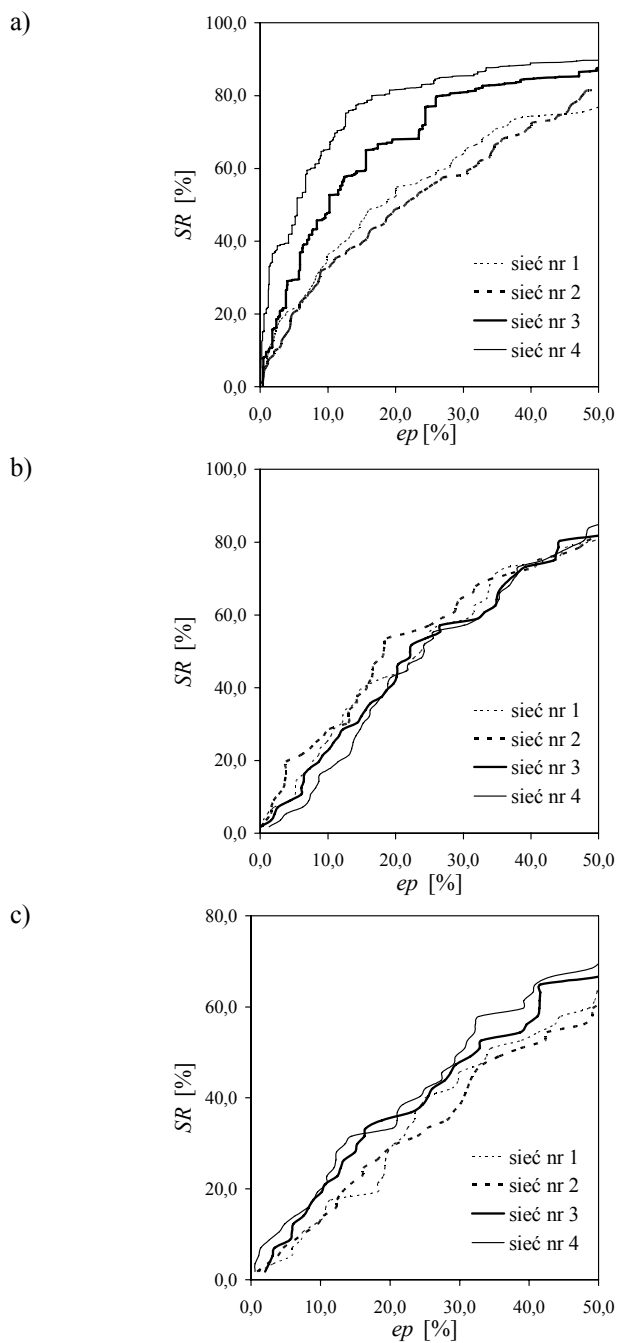
Tabela 3: Błędy uczenia, walidacji i testowania sieci

Nr sieci	Parametry wejścia	Struktura sieci	$L$	Błąd średniokwadratowy		
				$MSE(L)$	$MSE(V)$	$MSE(T)$
1	$En, r_e, PGA$	3-6-5-1	113	0,01434	0,01887	0,03437
2	$En, r_e, PGA, c$	4-6-5-1	113	0,01537	0,01734	0,02503
3	$En, r_e, PGA$	3-6-5-1	600	0,00819	0,01635	0,02154
4	$En, r_e, PGA, c, Pr$	5-6-5-1	600	0,00599	0,01880	0,01866

Na Rys. 8 porównano procent sukcesu  $SR$  neuronowej prognozy przekazywania drgań z gruntu na fundament z wykorzystaniem rozważanych sieci neuronowych.

Z analiz rezultatów obliczeń przeprowadzonych z wykorzystaniem sieci nr 1 i sieci nr 2 wynika, że wzbogacenie informacji wejściowej poprzez dodanie parametru  $c$  określającego klasę, do której zaliczono wstrząs, niewiele wpływa na dokładność aproksymacji, czego należało się spodziewać.





Rysunek 8: Procent sukcesu  $SR$  neuronowej prognozy przekazywania drgań z gruntu na fundament budynku wyznaczony dla: a) uczenia; b) walidacji; c) testowania

Wprowadzie błąd testowania  $MSE(T)$  jest w przypadku sieci nr 2 (a więc z parametrem  $c$  na wejściu sieci) znacznie mniejszy niż dla sieci nr 1, ale procent sukcesu  $SR$  uczenia, walidacji i testowania praktycznie nie ulega zmianie.

Natomiast zaproponowany sposób „rozmnożenia” wzorców uczących pozwolił na zdecydowane zwiększenie dokładności prognozowania ułamka  $r_w$ . Sieć nr 3, do której uczenia użyto  $L = 600$  wzorców, a która ma taką samą strukturę i wektor wejścia jak sieć nr 1 pozwoliła na znaczące zmniejszenie błędów uczenia i testowania w stosunku do sieci nr 1 (por. Tabela 3). Również krzywe procentu sukcesu  $SR$  (rys. 8) potwierdzają to spostrzeżenie.

Sieć nr 4, do uczenia której użyto także „rozmnożonego” zbioru uczącego, a w jej wektorze wejścia informacja została rozwinięta poprzez przyjęcie pięciu parametrów:  $En$ ,  $r_e$ ,  $PGA$ ,  $c$ ,  $Pr$ , pozwala na dalsze zwiększenie dokładności obliczeń.

#### 4. WNIOSKI

Określenie sposobu przekazywania drgań z gruntu na fundament budynku pięciokondygnacyjnego w zakresie redukcji maksymalnych wypadkowych przyspieszeń drgań poziomych stwarza wiele trudności z uwagi na jego niejednoznaczność. Na podstawie analiz wyników badań doświadczalnych nie jest możliwe wyznaczenie dokładnej zależności między  $PGA$  i  $PGF$ , choć można dopatrywać się wpływu energii wstrząsu, odległości epicentralnej i wartości  $PGA$  na tę relację.

Na podstawie przeprowadzonych prób wydaje się, że sieć neuronowa nauczona i przetestowana na wzorcach utworzonych na bazie danych eksperymentalnych może być przydatna do prognozowania różnic w jednocześnie występujących poziomych drganiach wypadkowych gruntu i fundamentu budynku.

Zaproponowany sposób zwiększenia liczby wzorców uczących sieci neuronowej pozwala na skuteczne zwiększenie dokładności obliczeń.

#### LITERATURA

- [1] K. Kuźniar, E. Maciąg, Zastosowanie SSN w wyznaczaniu wpływu parametrów wstrząsów górniczych na interakcję dynamiczną grunt-budynek, *Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Budownictwo*, z. 28, tom 2, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, 187-196, 2006.
- [2] K. Kuźniar, E. Maciąg, T. Tatar, Acceleration response spectra from mining tremors, First European Conference on Earthquake Engineering and Seismology (ECEES), Geneva 2006, Switzerland, Abstract Book, 466-467 (full paper on CD), 2006.
- [3] K. Kuźniar, *Analiza drgań budynków ścianowych o średniej wysokości podlegających wstrząsom górniczym z wykorzystaniem sieci neuronowych*, Monografia 310, seria: Inżynieria Łądowa, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004.
- [4] Instrukcja prowadzenia powierzchniowych pomiarów sejsmometrycznych, interpretacji wyników oraz oceny i prognozowania drgań sejsmicznych wywołanych wstrząsami górniczymi na powierzchni LGOM w oparciu o skalę GSI-2004, 2004.
- [5] A. Zell, editor, *SNNS – Stuttgart Neural Network Simulator, User’s Manual*, Version 4.2, Univ. Stuttgart, 1998.

## **ZASTOSOWANIE METODY APROKSYMACJI POŁĄCZONYCH DO WYZNACZANIA CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH ŚCIAN KONSTRUKCYJNYCH BUDYNKÓW PO MODERNIZACJI**

**Krystyna Kuźniar, Maciej Zajac**

Akademia Pedagogiczna w Krakowie  
30-084 Kraków, ul. Podchorążych 2  
e-mail: {kkuzniar, mjzajac}@ap.krakow.pl

---

**Abstract:** *The paper deals with the evaluation of the natural frequencies of vibrations of the modified typical medium-height load-bearing walls modeled as the reinforced concrete thin plates. The small and the large changes of the wall stiffness and mass resulted from the new door-ways size and position were discussed. The Combined Approximations (CA) hybrid method was used as an effective reanalysis approach. Some procedures with using the concepts of shifts and Gram-Schmidt orthogonalizations were introduced to improve the accuracy of the results.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

W ostatnich latach w Polsce pojawiło się wiele nowych, różnorodnych technologii wznoszenia budynków mieszkalnych. W dalszym ciągu jednak wśród już istniejących obiektów dominują ścianowe budynki prefabrykowane (wielkopłytowe i wielkoblokowe), w tym klasa budynków o średniej wysokości – pięciokondygnacyjnych. Takie budynki powstawały w latach 60, 70 i 80 XX wieku. Stosowane wówczas rozwiązania coraz bardziej nie przystają do współczesnych oczekiwań mieszkaniowych. W wyniku zmian cywilizacyjnych w naszym kraju i dążeniu do podniesienia komfortu życia mieszkańców istniejących budynków wielkopłytowych, pojawił się problem nadania tym obiektom „ludzkiej twarzy”, a więc ich modernizacji. Jedną z form takich działań modernizacyjnych są zmiany w ścianach konstrukcyjnych polegające na przebijaniu nowych otworów lub poszerzeniu otworów już istniejących [1].

Każda zmiana w geometrii ściany, a tym samym w jej sztywności i masie, powoduje zmianę właściwości dynamicznych, w tym częstotliwości drgań własnych. Wyznaczenie ich metodą elementów skończonych (MES) dla „nowej”, zmodyfikowanej ściany wymaga ponownego rozwiązania zagadnienia własnego z „nowymi” macierzami sztywności i mas, a więc konieczna jest reanaliza zagadnienia. Przy analizie wielu różnych wariantów układów o wielu stopniach swobody wiąże się to ze znacznym czasem obliczeń.

W celu zwiększenia efektywności działań (zredukowania „wielkości” zagadnienia), w niniejszej pracy do wyznaczania częstotliwości drgań własnych ścian po modernizacji zaproponowano wykorzystanie aproksymacji połączonych, z *j. ang.* Combined Approximations (CA) [2-4]. Obliczenia przeprowadzono w odniesieniu do ścian konstrukcyjnych o różnych szerokościach, typowych dla 5-cio kondygnacyjnych budynków prefabrykowanych. Analizowano przypadki, gdy modernizacja polega na pojawieniu się pojedynczych nowych otworów, jak również serii otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach. Rozważono zatem małe oraz duże zmiany w sztywnościach i masach modyfikowanych ścian.

## 2. ALGORYTM CA

Metoda CA [2, 3] jest metodą przybliżoną, umożliwiającą w szybki sposób reanalizę dużego problemu własnego, a więc wyznaczenie poszukiwanych częstotliwości drgań własnych modernizowanych ścian poprzez redukcję liczby równań. Wykorzystuje się tu wektory bazowe (aproksymacja globalna) otrzymane z rozwinięcia w szereg pewnego dwumianu (aproksymacja lokalna).

W wyniku modernizacji konstrukcji, zmianie ulegają jej macierze sztywności i mas:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_M &= \mathbf{K} + \Delta\mathbf{K} \\ \mathbf{M}_M &= \mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}\end{aligned}\quad (1)$$

gdzie:  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_M$  - macierze sztywności,  $\mathbf{M}, \mathbf{M}_M$  - macierze mas odpowiednio przed i po modyfikacji konstrukcji;  $\Delta\mathbf{K}, \Delta\mathbf{M}$  - odpowiednio zmiana w macierzy sztywności i mas.

Równania (2) i (3) przedstawiają problem własny, odpowiednio dla konstrukcji po modyfikacji oraz przed:

$$\mathbf{K}_M \Phi_{Mi} = \lambda_{Mi} \mathbf{M}_M \Phi_{Mi}, \quad i = 1, \dots, p \quad (2)$$

$$\mathbf{K} \Phi_i = \lambda_i \mathbf{M} \Phi_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (3)$$

gdzie: macierze  $\mathbf{K}, \mathbf{K}_M, \mathbf{M}, \mathbf{M}_M$  jak w (1);  $\Phi_i, \Phi_{Mi}$  - wektory własne,  $\lambda_i, \lambda_{Mi}$  - wartości własne ( $\lambda_i = \omega_i^2, \lambda_{Mi} = \omega_{Mi}^2, \omega_i = 2\pi f_i, \omega_{Mi} = 2\pi f_{Mi}$ ),  $f_i, f_{Mi}$  - częstotliwości drgań własnych odpowiednio przed i po modyfikacji konstrukcji;  $p$  - liczba rozważanych postaci drgań.

Po wygenerowaniu macierzy sztywności i mas konstrukcji pierwotnej i z modyfikacjami, potrzebne w dalszej analizie macierze zmian  $\Delta\mathbf{K}$  i  $\Delta\mathbf{M}$  wylicza się z równania (1) i podstawia do (2) uzyskując do rozwiązania układ równań (4) dla  $p$  par wartości i wektorów własnych:

$$(\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}) \Phi_{Mi} = \lambda_{Mi} (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) \Phi_{Mi}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (4)$$

Kolejnym krokiem jest wyliczenie macierzy wektorów bazowych  $\mathbf{r}_B$ , których wybór ma bezpośredni wpływ na stabilność i dokładność obliczeń numerycznych:

$$\mathbf{r}_B = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s], \quad (5)$$

gdzie:  $\mathbf{r}_B$  – macierz wektorów bazowych;  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s$  – wektory bazowe,  $s$  – liczba wektorów bazowych (znacznie mniejsza od liczby stopni swobody układu).

Po przemnożeniu równania (4) przez  $\mathbf{K}^{-1}$  otrzymuje się kolejno:

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{K} \quad (6)$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{K}^{-1} \lambda_{Mi} \mathbf{M}_M \Phi_{Mi} \quad (7)$$

$$(\mathbf{I} + \mathbf{B}) \Phi_{Mi} = \mathbf{r}_0 \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  – macierz identyczności.

Mnożąc równanie (8) przez  $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}$  i następnie rozwijając  $(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}$  w szereg, otrzymuje się:

$$\Phi_{Mi} = (\mathbf{I} - \mathbf{B} + \mathbf{B}^2 - \dots) \mathbf{r}_0 \quad (9)$$

Wektor  $\mathbf{r}_0$ , jak również  $\lambda_{Mi}$ ,  $\Phi_{Mi}$  nie są znane, stąd proponuje się [2] ich zastąpienie w (7) odpowiednio poprzez  $\lambda_i$ ,  $\Phi_i$  otrzymane z rozwiązania problemu dla konstrukcji pierwotnej (bez modyfikacji):

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{K}^{-1} \lambda_{Mi} \mathbf{M}_M \Phi_{Mi} \approx \mathbf{K}^{-1} \lambda_i \mathbf{M}_M \Phi_i. \quad (10)$$

Równanie (11) definiuje pierwszy wektor bazowy:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}_M \Phi_i. \quad (11)$$

Pominięto w nim mnożnik  $\lambda_i$  gdyż nie ma on wpływu na rozwiązanie. Kolejne wektory bazowe oblicza się z zależności (12), gdzie  $s$  to liczba wektorów (wymiar zredukowanego zadania) dużo mniejsza od liczby stopni swobody zadania pełnego:

$$\mathbf{r}_k = -\mathbf{B} \mathbf{r}_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, s. \quad (12)$$

Po wyznaczeniu macierzy wektorów bazowych, oblicza się zgodnie z (13) zredukowane macierze sztywności  $\mathbf{K}_R$  i mas  $\mathbf{M}_R$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_R &= \mathbf{r}_B^T \mathbf{K}_M \mathbf{r}_B \\ \mathbf{M}_R &= \mathbf{r}_B^T \mathbf{M}_M \mathbf{r}_B \end{aligned} \quad (13)$$

Następnie analizuje się zredukowany problem własny dla pierwszej (najniższej) wartości własnej wg (14):

$$\mathbf{K}_R \mathbf{y}_1 = \lambda_1 \mathbf{M}_R \mathbf{y}_1, \quad (14)$$

gdzie:  $\mathbf{y}_1$  – wektor szukanych współczynników,  $\mathbf{y}_1^T = \{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ .

Poszukiwany wektor własny otrzymuje się w wyniku przemnożenia wektora współczynników  $\mathbf{y}_1$  przez macierz wektorów bazowych  $\mathbf{r}_B$ :

$$\Phi_{Mi} = y_1 \mathbf{r}_1 + y_2 \mathbf{r}_2 + \dots + y_s \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_B \mathbf{y}_1. \quad (15)$$

Przy wyznaczaniu wyższych wartości własnych układu zredukowanego zastosowano przesunięcie widma wartości własnych o  $\mu$ . Powoduje to modyfikację zredukowanej macierzy sztywności do postaci  $\widehat{\mathbf{K}}_R$  wg (16) i prowadzi do nowego problemu własnego (17):

$$\widehat{\mathbf{K}}_R = \mathbf{K}_R - \mu \mathbf{M}_R, \quad (16)$$

$$\widehat{\mathbf{K}}_R \mathbf{y} = \widehat{\lambda}_R \mathbf{M}_R \mathbf{y}, \quad (17)$$

gdzie:  $\mu$  - przesunięcie widma wartości własnych,  $\widehat{\lambda}_R = \lambda - \mu$ .

W celu poprawy stabilności metody, w niniejszej pracy zastosowano również normalizację i ortogonalizację metodą Grama- Schmidta [2].

### 3. METODA CA W REANALIZIE CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH ŚCIAN PO MODERNIZACJI

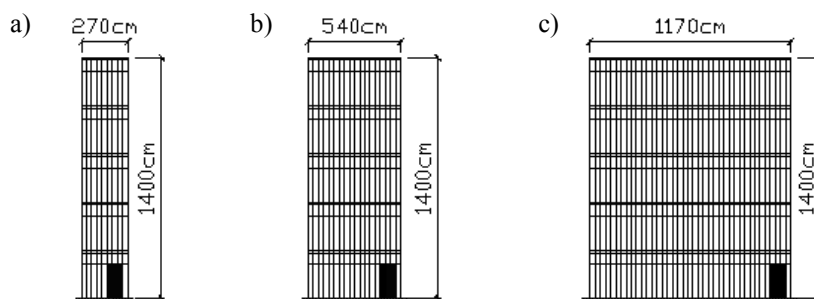
Analizie poddano typowe ściany konstrukcyjne 5-cio kondygnacyjnych budynków prefabrykowanych o szerokościach: 2.7m, 5.4m i 11.7m. Przyjęto grubość ścian 14cm oraz wysokość kondygnacji 2.8m (wysokość ściany:  $5 \times 2.8\text{m} = 14\text{m}$ ) jako typowe w rzeczywistych budynkach rozważanego rodzaju. Modelując rzeczywiste ściany, przyjęto ich zamocowanie w poziomie stropu piwnicy ze względu na dużo większą sztywność ścian piwnicy w stosunku do sztywności kondygnacji nadziemnych [5]. Są to ściany żelbetowe o gęstości  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ , module Younga  $E = 29\text{GPa}$  i współczynnika Poissona  $\nu = 0.17$ . W poziomach stropów uwzględniono dodatkowo masę stropu z pasa o szerokości 3 metrów oraz masę wynikającą z 40% obciążenia zmiennego, a w poziomie stropu ostatniej kondygnacji – również od stropodachu (płyty panwiowe).

Przyjęto tarczowy model ściany pełnej (bez otworów). Problemy własne trzech rozważanych ścian bez otworów rozwiązywano z użyciem metody elementów skończonych (MES) w programie Ansys [6]. Wykorzystano 4-węzłowy element tarczowy „plate 42” o dwóch stopniach swobody w węźle oraz konsyistentne macierze sztywności i mas.

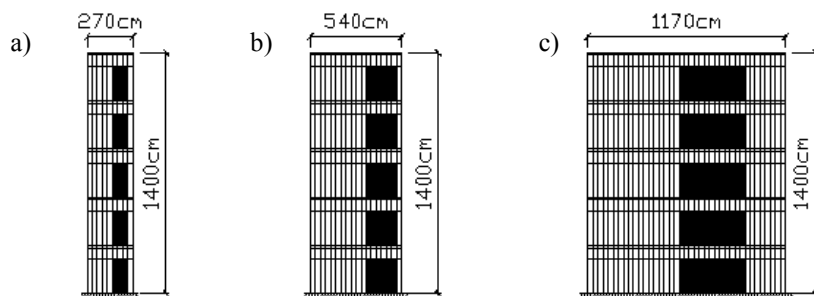
Następnie analizowano drgania własne ścian po modernizacji. W pierwszym przypadku zmiana polega na pojawieniu się w każdej z rozważanych ścian pojedynczego nowego otworu drzwiowego o wymiarach 90cm x 200cm na najniższej kondygnacji w odległości 30cm od krawędzi ściany (Rys. 1).

Kolejna zmiana geometrii ścian jaką analizowano, polega na pojawieniu się serii nowych otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach. Położenie i szerokości otworów w tak zmodyfikowanych ścianach pokazano na Rys. 2.

Podobnie jak w przypadku ścian bez otworów, częstotliwości i postaci drgań własnych oraz macierze sztywności i mas analizowanych ścian z otworami otrzymano z wykorzystaniem programu Ansys [6]. Sztywność elementów w miejscach otworów przyjęto bliską zeru.

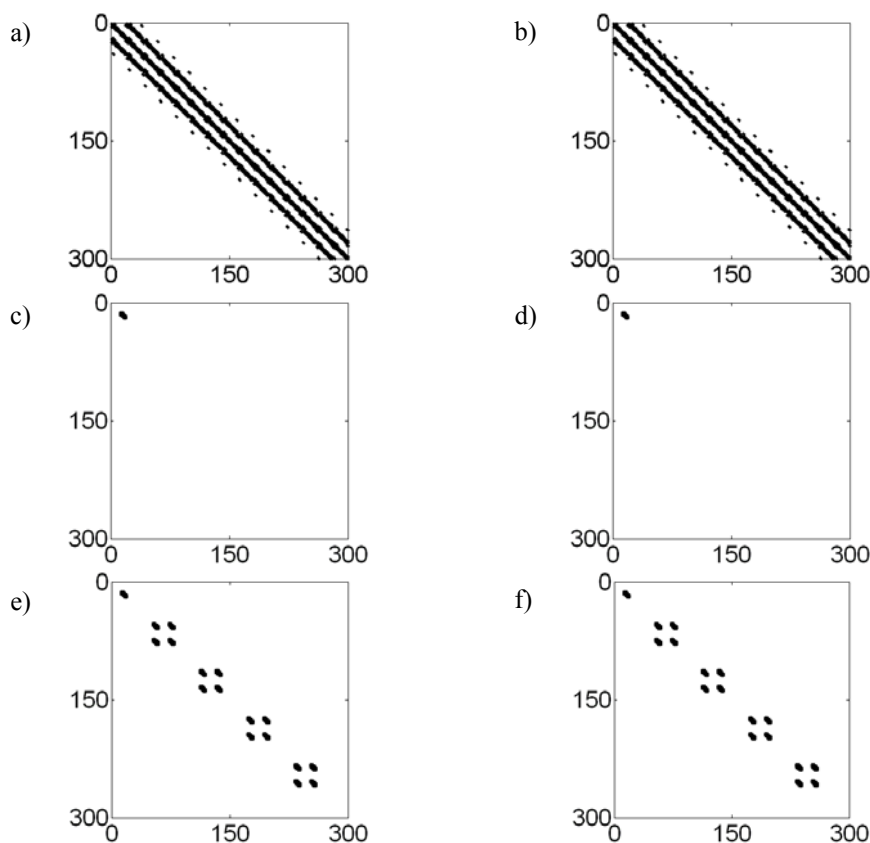


Rysunek 1: Modernizacja poprzez nowy pojedynczy otwór drzwiowy (90 x 200 cm) na najniższej kondygnacji w odległości 30cm od krawędzi ściany o szerokości: a) 2.7 m; b) 5.4 m; c) 11.7 m



Rysunek 2: Geometria analizowanych ścian 2.7 m (a), 5.4 m (b), 11.7 m (c) z serią nowych otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach o szerokości otworów i odległości od krawędzi ściany odpowiednio: a) 90 cm, 30 cm, b) 180 cm, 90 cm, c) 390 cm, 240 cm

Nowy pojedynczy otwór (90 x 200 cm) w ścianie powoduje małe zmiany w odpowiednich macierzach sztywności i mas. Zajmuje on w ścianach 2.7 m, 5.4 m, 11.7 m odpowiednio 4.8%, 2.4%, 1% ich powierzchni. Z kolei wprowadzenie serii otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach (Rys. 2) skutkuje dużymi zmianami w macierzach sztywności i mas modyfikowanych ścian z uwagi na ubytek ok. 24% całkowitej powierzchni. Przykładowo na Rys. 3a graficznie pokazano położenie elementów niezerowych konsystentnej macierzy sztywności, a na Rys. 3b – konsystentnej macierzy mas ściany 2.7 m (300 stopni swobody) bez otworów. Rys. 3c i 3e przedstawiają zmiany w macierzy sztywności  $\Delta \mathbf{K}$ , a Rys. 3d i Rys. 3f zmiany w macierzy mas  $\Delta \mathbf{M}$  wywołane wprowadzeniem do tej ściany odpowiednio pojedynczego otworu oraz serii otworów.



Rysunek 3: Graficzne przedstawienie położenia elementów niezerowych macierzy sztywności (a) i macierzy mas (b) ściany 2.7 m bez otworów oraz zmian w macierzy sztywności  $\Delta \mathbf{K}$  (c,e), oraz zmian w macierzy mas  $\Delta \mathbf{M}$  (d,f) wywołanych wprowadzeniem do tej ściany odpowiednio pojedynczego otworu (c,d) oraz serii otworów (e,f)

Każda zmiana w geometrii ściany, a tym samym w jej sztywności i masie, powoduje zmianę właściwości dynamicznych, w tym częstotliwości drgań własnych. Wyznaczenie ich metodą elementów skończonych (MES) w przypadku „nowej”, zmodyfikowanej ściany wymaga ponownego rozwiązania zagadnienia własnego z „nowymi” macierzami sztywności i mas, a więc konieczna jest reanaliza zagadnienia. Przy analizie pełnych układów o wielu stopniach swobody wiąże się to ze znacznym czasem obliczeń. Stąd propozycja zredukowania „wysiłku numerycznego” poprzez zastosowanie aproksymacji połączonych CA. Wykorzystując algorytm CA [2, 3], opracowano własny program w środowisku Matlab [7] do wyliczania częstotliwości drgań własnych modernizowanych ścian – tarcz. Częstotliwości drgań własnych i wektory własne układu zredukowanego wyznaczano metodą odwrotnej iteracji wektorowej [8]. Dokładność uzyskiwanych rezultatów oceniano zgodnie z (18) poprzez porównywanie wartości częstotliwości wyznaczonych metodą CA ( $f_{iCA}$ ) z odpowiednimi wartościami dokładnymi ( $f_{iE}$ ), tzn. otrzymanymi w wyniku rozwiązania pełnego



zagadnienia własnego, a więc z pełnymi macierzami mas  $\mathbf{M}_M$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}_M$  zmodyfikowanej ściany (wylizanie ułamka  $r_i$ ):

$$r_i = \frac{f_{iCA}}{f_{iE}}, \quad (18)$$

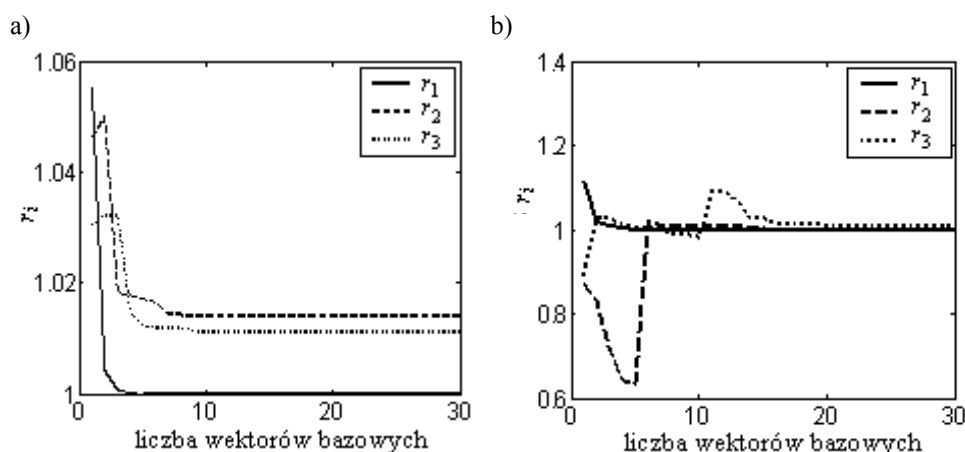
gdzie:  $f_{iCA}$  – wartość  $i$ -tej częstotliwości drgań wyliczona metodą CA,  $f_{iE}$  – wartość  $i$ -tej częstotliwości drgań wyliczona z użyciem pełnej macierzy mas  $\mathbf{M}_M$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}_M$  zmodyfikowanej ściany (traktowana jako wyznaczona dokładnie).

Dodatkowo, według wzoru (19) określano błąd względny rozwiązania CA:

$$\text{Err}f_i = \frac{|f_{iE} - f_{iCA}|}{f_{iE}} \cdot 100\%, \quad (19)$$

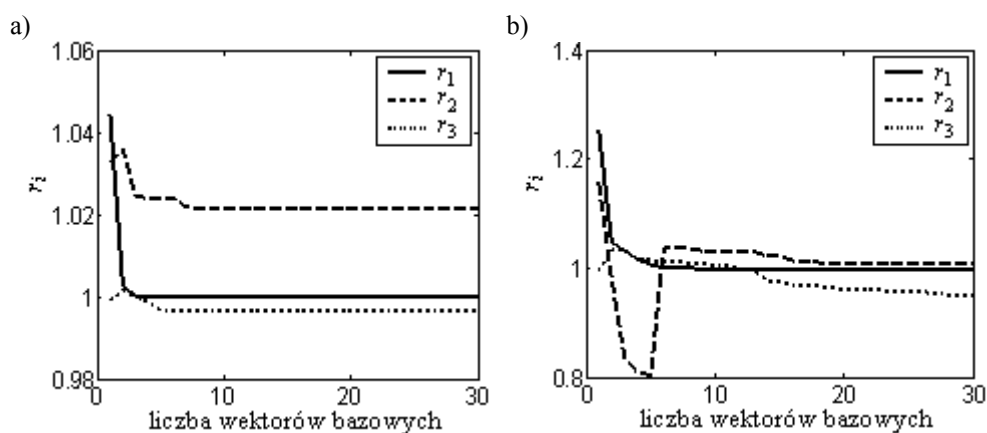
gdzie:  $\text{Err}f_i$  – błąd względny wartości  $i$ -tej częstotliwości drgań własnych ściany wyznaczonej za pomocą CA;  $f_{iCA}, f_{iE}$  – jak we wzorze (18).

Na rys. 4 przedstawiono zależność wartości ułamka  $r_i$  (a więc stosunku częstotliwości drgań własnych obliczonych metodą CA do odpowiednich częstotliwości drgań własnych otrzymanych z rozwiązania pełnego układu, por. wzór (18)) od liczby wektorów bazowych dla trzech pierwszych ( $i = 1, 2, 3$ ) częstotliwości drgań własnych ściany o szerokości 2.7 m (300 stopni swobody). Rys. 4a dotyczy ściany z pojedynczym otworem drzwiowym (ściana z Rys. 1a), natomiast Rys. 4b – ściany z serią otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach (ściana z Rys. 2a). W analizie skupiono się tylko na trzech pierwszych częstotliwościach drgań własnych (dwie kolejne dla drgań poziomych i jedna dla drgań pionowych) ze względu na to, że praktycznie takie drgania występują w rzeczywistych budynkach z rozważanymi ścianami [9].

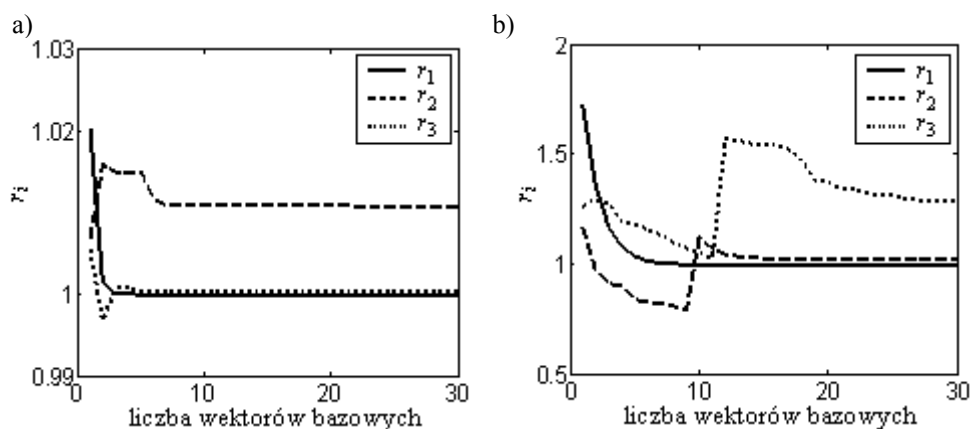


Rysunek 4: Zależność stosunku  $r_i$  od liczby wektorów bazowych dla trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych ściany 2.7 m: a) z pojedynczym otworem drzwiowym; b) z serią otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach

Rys. 5 i 6 przedstawiają analogiczne zależności odpowiednio w przypadku ścian o szerokościach 5.4 m (570 stopni swobody) i 11.7 m (1200 stopni swobody).



Rysunek 5: Zależność stosunku  $r_i$  od liczby wektorów bazowych dla trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych ściany 5.4 m: a) z pojedynczym otworem drzwiowym (z Rys. 1b); b) z serią otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach (z Rys. 2b)



Rysunek 6: Zależność stosunku  $r_i$  od liczby wektorów bazowych dla trzech pierwszych częstotliwości drgań własnych ściany 11.7 m: a) z pojedynczym otworem drzwiowym (z Rys. 1c); b) z serią otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach (z Rys. 2c)

Przykładowo w Tabeli 1 zestawiono wartości  $r_i$  oraz  $\text{Err}f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) wyliczone w zależności od liczby wektorów bazowych ( $\mathbf{r}_B$ ) uwzględnionych w metodzie CA w przypadku ściany o szerokości 11.7 m z pojedynczym otworem drzwiowym.

Tabela 1: Wartości  $r_i$  oraz  $\text{Err}f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) wyliczone w przypadku ściany 11.7m z pojedynczym otworem

Liczba wektorów bazowych	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\text{Err}f_1$ [%]	$\text{Err}f_2$ [%]	$\text{Err}f_3$ [%]
1	1,0203	1,0068	1,0055	2,0336	0,6752	0,5472
2	1,0015	1,0158	0,9968	0,1461	1,5827	0,3182
3	1,0001	1,0149	1,0008	0,0140	1,4930	0,0845
4	1,0001	1,0149	1,0008	0,0052	1,4915	0,0841
5	1,0000	1,0149	1,0004	0,0035	1,4913	0,0368
10	1,0000	1,0109	1,0004	0,0032	1,0949	0,0352
15	1,0000	1,0149	1,0004	0,0032	1,0935	0,0351
20	1,0000	1,0149	1,0003	0,0032	1,0865	0,0348

Z przeprowadzonych analiz wynika, że metoda połączonych aproksymacji CA daje bardzo dobre wyniki zarówno w przypadku małych, jak i dużych zmian w reanalizowanych układach. Na uwagę zasługuje przede wszystkim dokładność i dobra zbieżność obliczeń pierwszej częstotliwości drgań własnych, która dominuje w budynkach z rozpatrywanymi ścianami [9]. We wszystkich rozważanych przypadkach ścian już zastosowanie tylko dwóch wektorów bazowych pozwala na otrzymanie wartości pierwszej częstotliwości z błędem  $\text{Err}f_1$  mniejszym niż 3%. Zaś użycie pięciu wektorów bazowych powoduje, że błąd  $\text{Err}f_1$  jest mniejszy od 0,01%.

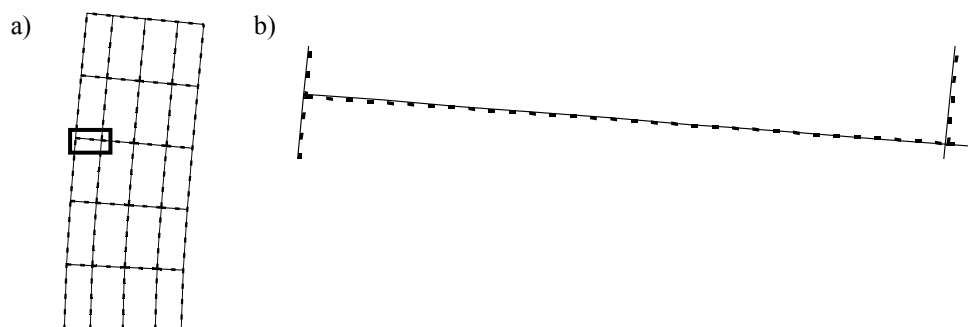
W przypadku pojedynczego otworu (mała zmiana sztywności) obserwuje się nieco lepszą zbieżność trzeciej częstotliwości drgań własnych niż drugiej. Przy 10-ciu wektorach bazowych  $\text{Err}f_3$  wynosi w przypadku ściany 2.7 m – 1.135%, ściany 5.4 m – 0.330% i ściany 11.7 m – 0.035%, podczas gdy  $\text{Err}f_2$  w przypadku ściany 2.7 m – 1.425%, ściany 5.4 m – 2.161%, ściany 11.7 m – 1.09%.

Przy serii nowych otworów usytuowanych jeden nad drugim na wszystkich kondygnacjach (duża zmiana sztywności) potrzeba większej liczby wektorów bazowych, aby osiągnąć wartości ułamka  $r_2$  i  $r_3$  bliskie jeden. Tutaj nieco lepsze wyniki otrzymuje się w przypadku drugiej częstotliwości drgań.

Generalnie, błędy z jakimi metodą CA wyznacza się wartości drugiej i trzeciej częstotliwości drgań własnych modernizowanych ścian również są bardzo małe.

Dokładność wyznaczania postaci drgań własnych z użyciem metody CA ilustruje przykładowo Rys. 7. Na Rys. 7a pokazano pierwszą postać drgań własnych ściany 5.4 m z pojedynczym otworem drzwiowym. Przerywaną linią narysowano postać drgań otrzymaną z analizy pełnego układu (dla czytelności rysunku uwzględniono tylko niektóre linie siatki MES). Na tę postać drgań „nałożono” rezultat uzyskany drogą połączonych aproksymacji CA z użyciem pięciu wektorów bazowych (linia ciągła). Postacie drgań wyznaczone na te dwa sposoby praktycznie idealnie się pokrywają, co dodatkowo potwierdza Rys. 7b, na którym zamieszczono w powiększeniu fragment postaci drgań z Rys. 7a.

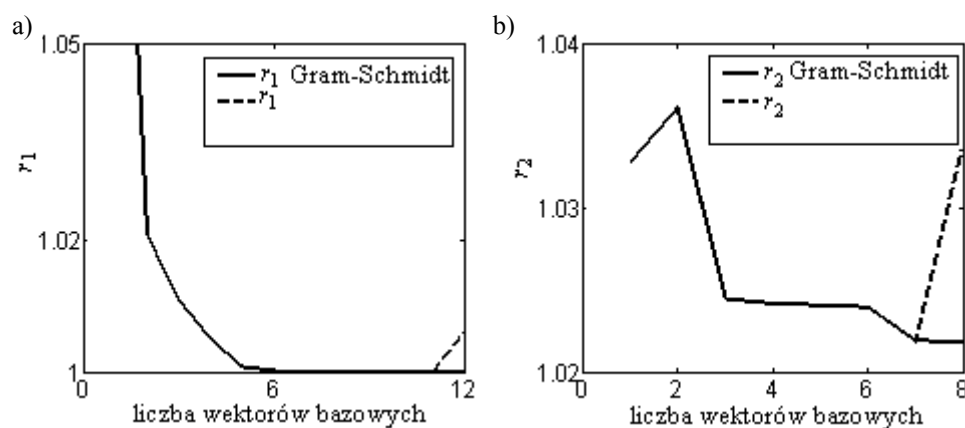
W przeprowadzonych analizach numerycznych w celu poprawy stabilności rozwiązania, podstawowy algorytm połączonych aproksymacji CA wzbogacono o normalizację i ortogonalizację Grama-Schmidta wektorów bazowych, a przy wyznaczaniu wyższych częstotliwości drgań własnych – o przesunięcie widma wartości własnych [2].



Rysunek 7: a) Porównanie pierwszej postaci drgań własnych ściany o szerokości 5.4 m z pojedynczym otworem drzwiowym wyliczonej z użyciem pełnych macierzy sztywności i mas (- - -) oraz metodą CA z pięcioma wektorami bazowymi (—), b) Zaznaczony fragment z Rys. 7a w powiększeniu

Zastosowana normalizacja i ortogonalizacja Grama-Schmidta wektorów bazowych miała za zadanie wyeliminowanie zależności liniowej tych wektorów, powodującej złe uwarunkowanie zredukowanych macierzy sztywności  $\mathbf{K}_R$  i mas  $\mathbf{M}_R$ , a tym samym niestabilność układu równań problemu własnego i duże błędy numeryczne.

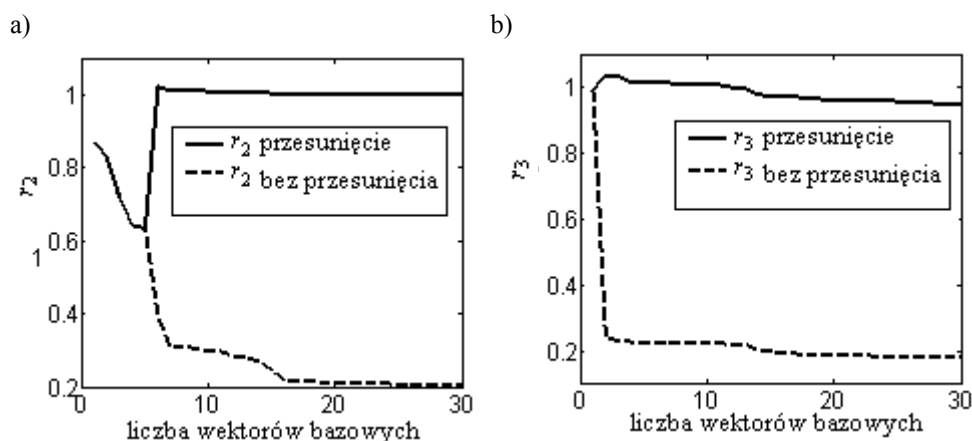
Na potwierdzenie tego, na Rys. 8 przedstawiono przykładowe wyniki obliczeń z zastosowaną w opracowanym programie normalizacją i ortogonalizacją Grama-Schmidta oraz gdyby ją pominięto. Stwierdzono, że gdyby zrezygnowano z normalizacji i ortogonalizacji, to od pewnej liczby wektorów bazowych (np. 12-tu dla przypadku z Rys. 8a i 8-miu dla przypadku z Rys. 8b) następuje pogorszenie dokładności wyników, a przy dalszym zwiększaniu liczby wektorów bazowych – niestabilność układu uniemożliwia uzyskanie rozwiązania.



Rysunek 8: Wpływ normalizacji i ortogonalizacji Grama-Schmidta wektorów bazowych na dokładność obliczeń: a) pierwszej częstotliwości drgań własnych dla ściany 2.7m z serią otworów; b) drugiej częstotliwości drgań własnych ściany 5.4 m z pojedynczym otworem

Jak wspomniano, przy wyznaczaniu wyższych wartości własnych układu zredukowanego zastosowano przesunięcie widma wartości własnych wg (17). Powoduje to zbieżność odwrotnej iteracji wektorowej do wartości najbliższej przesunięciu (przesunięcie zera na osi wartości własnych). Wartość przesunięcia nie jest znana *a priori*, gdyż nie znane są wartości własne. Można ją jednak oszacować wykorzystując np. ciąg Sturma [8]. W niniejszej pracy wystartowano z  $\mu = 0$ . Następnie w kolejnej iteracji przyjmowano przesunięcie równe odpowiedniej częstotliwości drgań otrzymanej w poprzednim kroku. We wszystkich dalszych iteracjach ustalono jako przesunięcie wartości częstotliwości obliczonej przy dwóch wektorach bazowych.

Na Rys. 9 przedstawiono przykładowe wyniki przeprowadzonych obliczeń z uwzględnieniem przesunięcia i dla porównania odpowiednie rezultaty uzyskane gdyby tego przesunięcia nie dokonano.



Rysunek 9: Wpływ zastosowania przesunięcia widma wartości własnych na dokładność wyznaczania: a) pierwszej częstotliwości drgań własnych ściany 2.7m z serią otworów; b) drugiej częstotliwości drgań własnych ściany 5.4m z serią otworów

#### 4. WNIOSKI

Zastosowanie metody połączonych aproksymacji CA do reanalizy zagadnienia własnego modernizowanych ścian budynków pozwala na znaczną redukcję wielkości zagadnienia. Główną zaletą tego podejścia jest zatem znaczne skrócenie czasu obliczeń, co ma szczególne znaczenie w przypadku problemów z dużą liczbą stopni swobody, wtedy gdy analizuje się różne warianty zmian. Zmniejszenie „wysiłku numerycznego” i zwiększenie szybkości wyznaczania właściwości dynamicznych ścian (częstotliwości i postaci drgań własnych) nie powoduje zmniejszenia dokładności uzyskiwanych wyników. Błędy aproksymacji CA można uznać za pomijalnie małe.

**LITERATURA**

- [1] A. Cholewicki, T. Chyży, J. Szulc, *Nowe otwory w ścianach konstrukcyjnych budynków wielkopłytowych*, Instrukcja 385/2003, ITB, Warszawa 2003.
- [2] U. Kirsch, M. Bogomolni, I. Sheinman, Efficient Dynamic Reanalysis of Structures. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **133**, 3, 440–448, 2007.
- [3] U. Kirsch, P. Y. Papalambros, Exact and Accurate Reanalysis of Structures for Geometrical Changes, *Engineering with Computers*, **17**, 363-372, 2001.
- [4] S. H. Chen, X. W. Yang, H. D. Lian, Comparison of several eigenvalue reanalysis methods for modified structures, *Structural Multidisciplinary Optimization*, **20**, 4, 253–259, 2000.
- [5] Bobola K., Tataro T., Drgania budynków prefabrykowanych podlegających działaniu parasejsmicznym, *Inżynieria i Budownictwo*, **5**, 1983, 198-202.
- [6] Release 11.0 Documentation for Ansys, 2007.
- [7] Manual Matlab 7.6.0.324, 2008
- [8] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej 2006.
- [9] Ciesielski R., Kuźniar K., Maciąg E., Tataro T., Empirical formulae for fundamental natural periods of buildings with load bearing walls, *Archives of Civil Engineering*, **38**, 4, 1992, 291-299.

*Obliczenia wykonano programem Ansys na komputerze Jowisz, nr grantu: MNISW/HP\_I\_SD/AP/007/208 oraz Matlab na komputerze Saturn, nr grantu: MNISW/S\_F\_6800/AP/007/208 w ACK CYFRONET AGH.*

## **IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW LEPKOSPREŻYSTEGO TŁUMIKA DRGAŃ**

**Roman Lewandowski, Bartosz Chorążyczewski**

Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych  
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań  
e-mail: roman.lewandowski@put.poznan.pl, bartosz.chorazyczewski@ikb.poznan.pl

---

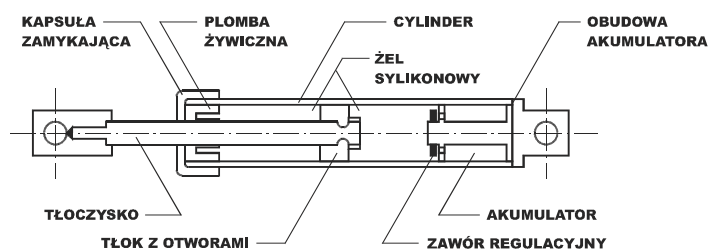
**Abstract:** *In the paper a new method of parameters identification of the three parameters fractional, rheological Kelvin model is presented. The parameters are estimated using results obtained from dynamical tests. The proposed method is simple and effective. Results of example calculation are presented and briefly discussed.*

---

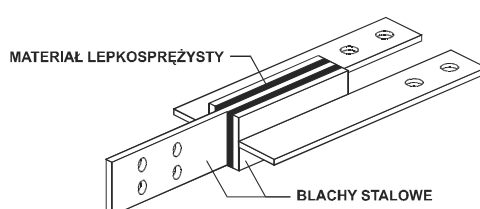
### **1. WPROWADZENIE**

We współczesnym budownictwie obserwuje się stałe dążenie do projektowania i budowania konstrukcji coraz większych, budowanych z materiałów lekkich o podwyższonych parametrach wytrzymałościowych. Konstrukcje te są lekkie, wiotkie, mają mniejsze możliwości tłumienia. Wszystko to sprawia, że są bardziej wrażliwe na obciążenia dynamiczne. W wielu wypadkach zachodzi potrzeba redukcji przyspieszeń lub/i przemieszczeń dynamicznych tego typu konstrukcji. Jeden ze sposobów redukcji drgań polega na wbudowaniu w konstrukcję pasywnych tłumików drgań. Rolą pasywnych tłumików drgań jest rozpraszanie (najczęściej przez zamianę na ciepło) części energii przekazywanej konstrukcji przez działające na nią obciążenie zewnętrzne. Obszerne omówienie możliwych do zastosowania tłumików drgań można znaleźć w pracach [1, 2].

Do najczęściej stosowanych tłumików drgań zalicza się tłumiki lepkosprężyste. Tłumiki tego rodzaju dzieli się na lepkosprężyste tłumiki cieczowe i lepkosprężyste tłumiki wykonane z materiałów stałych. Przykładowy tłumik cieczowy pokazano na schematycznie Rys. 1, a na Rys. 2 pokazano schematycznie tłumik lepkosprężysty wykonany z materiałów stałych. Cylinder tłumika cieczowego jest wypełniony żelem silikonowym – cieczą o bardzo dużej lepkości. Typowy tłumik lepkosprężysty składa się z dwóch warstw materiału (o właściwościach lepkosprężystych) przymocowanych do płyt stalowych w sposób pokazany na Rys. 2. Warstwy lepkosprężyste są wykonane z kopolimerów (najczęściej akrylowych) lub z substancji szklanych. Materiały lepkosprężyste rozpraszają energię w trakcie odkształceń postaciowych powodowanych ruchem płyt stalowych względem siebie. Mają dobre właściwości tłumiące, mogą rozpraszać energię także wtedy, gdy częstota siły wymuszającej jest mała. Istotną cechą materiałów lepkosprężystych stosowanych



Rysunek 1: Schemat tłumika cieczowego



Rysunek 2: Schemat tłumika wykonanego z materiału lepkosprężystego

do budowy omawianych tłumików jest zależność ich właściwości lepkosprężystych od temperatury i częstości wymuszenia.

Analiza konstrukcji z wbudowanymi lepkosprężystymi tłumikami drgań wymaga dobrej znajomości właściwości dynamicznych tłumików. Właściwości te zależą w głównej mierze od właściwości reologicznych materiału lepkosprężystego, z którego tłumik jest zbudowany oraz od konstrukcji tłumika w przypadku tłumika cieczowego.

Mechaniczny model tłumika jest modelem reologicznym i składa się ze zbioru odpowiednio połączonych sprężyn i tłumików (patrz prace [3, 4]). W tym ujęciu do poprawnego opisu zachowania pojedynczego tłumika używa się układu równań różniczkowych [4]. W istotny sposób zwiększa to wymiar zadania dynamicznego. Ponadto procedura wyznaczania parametrów takiego modelu tłumika jest bardzo kłopotliwa (patrz [5, 6]).

Ostatnio do opisu właściwości tłumików lub materiałów lepkosprężystych zaczęto używać tzw. ułamkowych modeli reologicznych (the fractional rheological models) oraz ułamkowego rachunku różniczkowego (the fractional calculus). Ułamkowe modele reologiczne rozważa się, między innymi, w pracach [7-10]. Istotną zaletą ułamkowych modeli reologicznych jest możliwość opisu dynamicznego zachowania tłumika za pomocą jednego równania zawierającego małą liczbę parametrów.

Ważnym problemem związanym z zastosowaniem ułamkowych modeli reologicznych jest identyfikacja parametrów modelu na podstawie danych doświadczalnych. Proces identyfikacji parametrów modelu jest tzw. problemem odwrotnym, który niekiedy może być źle uwarunkowany. Procedury identyfikacji parametrów ułamkowych modeli reologicznych omawiane są w pracach [7, 8, 10-12].

W niniejszej pracy przedstawia się nową metodę identyfikacji parametrów trójparametrowego, ułamkowego modelu reologicznego, który może być użyty do opisu dynamicznego zachowania tłumika lepkosprężystego. Zakłada się, że dysponuje się wynikami badań dynamicznych tłumika poddanego działaniu obciążeń harmonicznie zmiennych.



W pracy używa się trzech symboli do opisu siły w tłumiku. Symbol  $u_e(t)$  oznacza wyniki pomiarów eksperymentalnych,  $\tilde{u}(t)$  funkcję analityczną aproksymującą wyniki eksperymentalne, a symbol  $u(t)$  rozwiązanie analityczne równania ewolucji ułamkowego modelu reologicznego. Podobne należy rozumieć oznaczenia  $q_e(t)$ ,  $\tilde{q}(t)$  i  $q(t)$ , które będą stosowane do opisu względnych przemieszczeń tłumika.

## 2. OPIS UŁAMKOWEGO MODELU REOLOGICZNEGO

W pracy rozpatruje się ułamkowy model reologiczny pokazany na Rys. 3. Pod względem budowy model różni się od modelu klasycznego tym, że zamiast elementu tłumiącego mamy element typu springpot. Zachowanie elementu *springpot* opisuje równanie:

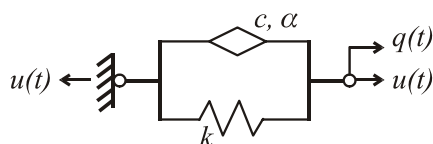
$$u(t) = \tilde{c}^\alpha D_t^\alpha q(t) = c D_t^\alpha q(t) , \quad (1)$$

gdzie  $c = \tilde{c}^\alpha$  oraz  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , to parametry elementu, a symbol  $D_t^\alpha q(t)$  oznacza pochodną ułamkową rzędu  $\alpha$  ze względu na czas  $t$ . Szersze omówienie podstaw rachunku pochodnych ułamkowych można znaleźć w pracy [13]. Istnieje kilka definicji pochodnych ułamkowych. Tutaj symbol  $D_t^\alpha q(t)$  oznacza pochodną ułamkową Riemanna-Liouville'a z dolną granicą w  $-\infty$  (patrz [13]). Omawiany element może być rozumiany jako element o właściwościach pośrednich między elementem sprężystym, który otrzymamy podstawiając  $\alpha = 0$  w (1), a elementem tłumiącym, który otrzymamy podstawiając  $\alpha = 1$ .

Zachowanie modelu pokazanego na Rys. 3 opisują zależności:

$$u(t) = kq(t) + k\tau^\alpha D_t^\alpha q(t) , \quad (2)$$

gdzie  $\tau^\alpha = c/k$  a symbolami  $k$  i  $c$  oznaczono odpowiednio współczynnik sztywności i współczynnik tłumienia.



Rysunek 3: Model reologiczny rozpatrywanego tłumika drgań

## 3. ROZWIĄZANIE USTALONE RÓWNANIA EWOLUCJI ORAZ WARUNKI TERMODYNAMICZNEJ ZGODNOŚCI UŁAMKOWEGO MODELU REOLOGICZNEGO

Dynamiczne badania tłumików drgań przeprowadza się w ten sposób, że tłumik poddawany jest obciążeniu harmonicznemu, a po wytlumieniu drgań przejściowych mierzy się odpowiedź dynamiczną tłumika w stanie ustalonym drgań. Badania te przeprowadza się dla różnych częstości wymuszenia  $\lambda$ .

Biorąc pod uwagę powyższe stwierdzenia zakłada się, że w stanie ustalonym drgań zachowanie tłumika opisują funkcje:

$$u(t) = u_c \cos \lambda t + u_s \sin \lambda t, \quad q(t) = q_c \cos \lambda t + q_s \sin \lambda t. \quad (3)$$

Po podstawieniu zależności (3) do równania ewolucji (2) i uwzględnieniu, że (patrz [13])

$$D_t^\alpha (\cos \lambda t) = \cos(\lambda t + \alpha\pi/2), \quad D_t^\alpha (\sin \lambda t) = \sin(\lambda t + \alpha\pi/2), \quad (4)$$

dochodzi się do następujących zależności:

$$u_c = \varphi_1 q_c + \varphi_2 q_s, \quad u_s = -\varphi_2 q_c + \varphi_1 q_s, \quad (5)$$

$$\varphi_1 = k \left[ 1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right], \dots, \varphi_2 = k(\tau\lambda)^\alpha \sin(\alpha\pi/2). \quad (6)$$

W pracy [14] podano warunki jakie muszą być spełnione aby ułamkowy model reologiczny spełniał wymagania wynikające z drugiego prawa termodynamiki. Warunki te sprowadzają się do wymagania, aby zależne od częstości wymuszenia moduł sprężystości  $K'(\lambda)$  (ang. storage modulus) i moduł dyssypacji  $K''(\lambda)$  (ang. loss modulus) miały wartości dodatnie dla wszystkich możliwych częstości wymuszenia.

Wielkości te są opisane zależnościami:

$$K' = k \left[ 1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right], \quad K'' = k(\tau\lambda)^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}, \quad (7)$$

Łatwo zauważyć, że  $K'(\lambda) \geq 0$  i  $K''(\lambda) \geq 0$  dla wszystkich  $\lambda$  o ile  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Wobec tego rozpatrywany model reologiczny spełniają warunki wynikające z drugiego prawa termodynamiki.

#### 4. RÓWNANIA PĘTLI HISTEREZY

Właściwości tłumiące tłumika są często charakteryzowane za pomocą pętli histerezy. Równanie pętli histerezy rozpatrywanego modelu tłumika wyprowadzimy zakładając, że:

$$q(t) = q_0 \sin \lambda t. \quad (8)$$

Biorąc pod uwagę, że (patrz [13], str. 311)

$$D_t^\alpha q(t) = \lambda^\alpha q_0 \sin[\lambda t + (\alpha\pi/2)], \quad (9)$$

oraz podstawiając (8) i (9) do równania (2) otrzymuje się

$$u(t) = k \left[ 1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right] q_0 \sin \lambda t + k(\tau\lambda)^\alpha q_0 \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \lambda t, \quad (10)$$

które po uwzględnieniu (8) i tożsamości

$$\sin^2(\alpha\pi/2) + \cos^2(\alpha\pi/2) = 1, \quad (11)$$

można przepisać w postaci:

$$\left\{ \frac{u(t) - k \left[ 1 + (\tau\lambda)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) \right] q(t)}{k (\tau\lambda)^\alpha q_0 \sin(\alpha\pi/2)} \right\}^2 + \left[ \frac{q(t)}{q_0} \right]^2 = 1 . \quad (12)$$

Zależność (12) jest poszukiwanym równaniem pętli histerezy ułamkowego modelu Kelvinina.

Możliwe jest zapisanie równania pętli histerezy w innej postaci. Teraz zakłada się, że przemieszczenia tłumika są opisane funkcją:

$$q(t) = q_0 \sin[\lambda t - (\alpha\pi/2)] , \quad (13)$$

co oznacza, że

$$D_t^\alpha q(t) = \lambda^\alpha q_0 \sin \lambda t . \quad (14)$$

Po podstawieniu zależności (14) do równania (2) można napisać:

$$u(t) - k \tau^\alpha D_t^\alpha q(t) = k q_0 [\sin \lambda t \cos(\alpha\pi/2) - \cos \lambda t \sin(\alpha\pi/2)] . \quad (15)$$

Po uwzględnieniu (11) i (14) można napisać drugą wersję równania pętli histerezy w postaci:

$$\left\{ \frac{u(t) - \frac{k}{\lambda^\alpha} [(\tau\lambda)^\alpha + \cos(\alpha\pi/2)] D_t^\alpha q(t)}{k q_0 \sin(\alpha\pi/2)} \right\}^2 + \left[ \frac{D_t^\alpha q(t)}{\lambda^\alpha q_0} \right]^2 = 1 . \quad (16)$$

Na Rys. 4 pokazano, dla różnych wartości parametru  $\alpha$ , wykresy pętli histerezy. Obliczenia wykonano przyjmując następujące dane:  $k = 100.0 \text{ kN/m}$ ,  $c = 100000.0 \text{ Ns/m}$ ,  $\lambda = 10,0 \text{ Hz}$ . Widać, że właściwości tłumiące tłumika zmniejszają się wraz ze zmniejszaniem się wartości parametru  $\alpha$ .

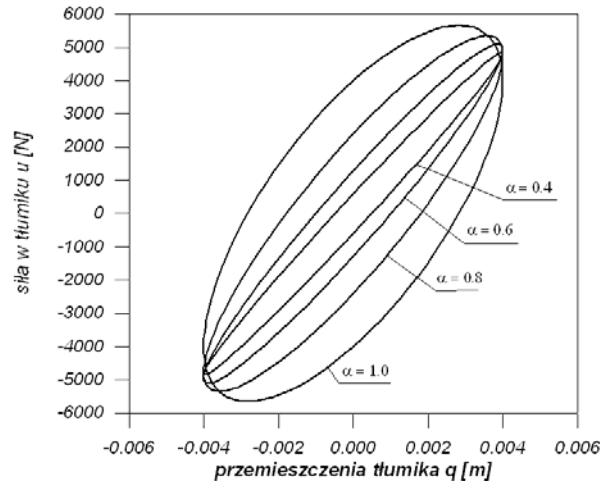
## 5. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW UŁAMKOWEGO MODELU REOLOGICZNEGO

Załóżmy, że po przeprowadzeniu badań dynamicznych tłumika lepkosprężystego dysponujemy przebiegami dynamicznymi sił  $u_{ei}(t)$  i przemieszczeń tłumika  $q_{ei}(t)$  otrzymanymi dla pewnego zbioru częstości wymuszenia  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Proponowana metoda identyfikacji składa się z dwóch zasadniczych części. W pierwszej części procedury dokonuje się aproksymacji wyników doświadczalnych funkcjami trygonometrycznymi opisującymi rozwiązanie ustalone równania ewolucji (3). W drugiej części procedury identyfikacyjnej wyznaczone zostaną parametry omawianego modelu tłumika drgań.

Dla częstości wymuszenia  $\lambda_i$  wyniki eksperymentalne są aproksymowane funkcjami:

$$\tilde{u}_i(t) = \tilde{u}_{ci} \cos \lambda_i t + \tilde{u}_{si} \sin \lambda_i t , \quad \tilde{q}(t) = \tilde{q}_{ci} \cos \lambda_i t + \tilde{q}_{si} \sin \lambda_i t . \quad (17)$$

Rysunek 4: Wykresy pętli histerezy dla różnych wartości parametru  $\alpha$ 

Sposób wyznaczania nieznanymi współczynników  $\tilde{u}_{ci}$ ,  $\tilde{u}_{si}$ ,  $\tilde{q}_{ci}$  oraz  $\tilde{q}_{si}$  zostanie omówiony na przykładzie funkcji aproksymującej pomierzone zmiany siły w tłumiku. Do wyznaczenia wspomnianych współczynników stosuje się metodę najmniejszych kwadratów.

Funkcjonał błędu przyjęto o postaci:

$$J_{ui}(\tilde{u}_{ci}, \tilde{u}_{si}) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{u}_i(t) - u_{ei}(t))^2 dt . \quad (18)$$

W funkcjonale (18) symbole  $t_1$  i  $t_2$  oznaczają odpowiednio początek i koniec przedziału czasu, w którym wykonano pomiar siły w tłumiku.

Z warunku stacjonarności funkcjonału (18) otrzymuje się następujący układ równań:

$$I_{cc}\tilde{u}_{ci} + I_{sc}\tilde{u}_{si} = I_{cu} , \dots , I_{sc}\tilde{u}_{ci} + I_{ss}\tilde{u}_{si} = I_{su} , \quad (19)$$

gdzie

$$I_{cc} = \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 \lambda_i t dt , \quad I_{ss} = \int_{t_1}^{t_2} \sin^2 \lambda_i t dt , \quad I_{cs} = I_{sc} = \int_{t_1}^{t_2} \sin \lambda_i t \cos \lambda_i t dt , \quad (20)$$

$$I_{cu} = \int_{t_1}^{t_2} u_{ei}(t) \cos \lambda_i t dt , \quad I_{su} = \int_{t_1}^{t_2} u_{ei}(t) \sin \lambda_i t dt . \quad (21)$$

Z układu równań (21) wyznacza się poszukiwane współczynniki  $\tilde{u}_{ci}$  i  $\tilde{u}_{si}$ . Współczynniki  $\tilde{q}_{ci}$  oraz  $\tilde{q}_{si}$  wyznacza się w analogiczny sposób.

W drugiej części omawianej procedury identyfikacyjnej wyznacza się parametry rozpatrywanego tłumika drgań. Opracowano dwa sposoby identyfikacji parametrów. Pierwszy sposób wykorzystuje wyprowadzone powyżej równanie pętli histerezy (12).

Jeżeli dla zadanej częstości wymuszenia  $\lambda_i$  w chwili  $t = t_1$   $q(t_1) = q_{0i} > 0$  i  $u(t_1) = u_{1i} > 0$  to z (12) otrzymuje następującą zależność:

$$k \left[ 1 + (\tau \lambda_i)^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} \right] = k + c \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} = \frac{u_{1i}}{q_{0i}} . \quad (22)$$

Ponadto, jeżeli w chwili  $t = t_2$   $q(t_2) = 0$  i  $u(t_2) = u_{2i} > 0$  to z (12) otrzymuje się:

$$k (\tau \lambda_i)^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} = c \lambda_i^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} = \frac{u_{2i}}{q_{0i}} . \quad (23)$$

Dla zadanej częstości wymuszenia  $\lambda_i$  równania (22) i (23) tworzą nieliniowy układ dwóch równań z trzema niewiadomymi:  $k, c, \alpha$  lub  $k, \tau, \alpha$ . Zauważmy, że dla zadanej wartości  $\alpha$  układ ten staje się układem liniowym ze względu na  $k$  i  $c$ .

W trakcie badań tłumik jest wielokrotnie obciążany siłowo lub kinematycznie z różnymi częstościami, które to częstości oznaczają będziemy symbolem  $\lambda_i$ , przy czym  $i = 1, 2, \dots, n$ . W trakcie badań mierzy się przemieszczenia tłumika  $q_{ei}(t)$  i siły w tłumiku  $u_{ei}(t)$ . Ponadto po wykonaniu pierwszego etapu identyfikacji łatwo można ustalić, wynikające z badań eksperymentalnych, wartości  $u_{1i} = \tilde{u}_{1i}$ ,  $u_{2i} = \tilde{u}_{2i}$  oraz  $q_{0i} = \tilde{q}_{0i}$ . Teraz zakłada się, że wynikające z doświadczeń wartości  $\tilde{u}_{1i}$ ,  $\tilde{u}_{2i}$  oraz  $\tilde{q}_{0i}$  w przybliżeniu spełniają równania (22) i (23). Dla każdej częstości wymuszenia  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) można wobec tego napisać:

$$r_i = k + c \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{\tilde{u}_{1i}}{\tilde{q}_{0i}} \neq 0, \quad s_i = c \lambda_i^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \frac{\tilde{u}_{2i}}{\tilde{q}_{0i}} \neq 0 . \quad (24)$$

W powyższych równaniach symbolami  $r_i$  i  $s_i$  oznaczono reszty jakie otrzymuje się po podstawieniu danych eksperymentalnych do równań (22) i (23). Dla  $i = 1, 2, \dots, n$  z (24) wynika nadokreślony układ nieliniowych równań algebraicznych ze względu na parametry tłumika  $k, c$  i  $\alpha$ .

Pseudo-rozwiązaniem tego układu równań jest taki zbiór wartości  $k, c$  i  $\alpha$  który minimalizuje funkcjonal błędów o postaci:

$$J(k, c, \alpha) = \sum_{i=1}^n (r_i^2 + s_i^2) . \quad (25)$$

Załóżmy, że wartość parametru  $\alpha$  jest zadana. Z warunków stacjonarności funkcjonalu (26) ze względu na parametry  $k$  i  $c$  otrzymuje się następujący układ równań:

$$k n + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{u}_{1i}}{\tilde{q}_{0i}},$$

$$k \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2\alpha} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \left( \frac{\tilde{u}_{1i}}{\tilde{q}_{0i}} \cos \frac{\alpha \pi}{2} + \frac{\tilde{u}_{2i}}{\tilde{q}_{0i}} \sin \frac{\alpha \pi}{2} \right). \quad (26)$$

Optymalną wartość parametru  $\alpha$  wyznacza się metodą systematycznego przeszukiwania zbioru wartości dopuszczalnych. Wybiera się zbiór wartości  $\alpha$  oznaczonych symbolami  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), gdzie  $\alpha_j = \alpha_{j-1} + \Delta\alpha$ . Dla każdej wartości  $\alpha_j$  z układu równań (26) wyznacza się odpowiadające jej wartości  $k_j$  i  $c_j$  dwóch pozostałych parametrów. Te wartości  $\alpha_j$ ,  $k_j$  i  $c_j$  dla których funkcjonal (25) ma wartość minimalną są poszukiwanym rozwiązaniem układu równań (24) i rozwiązaniem omawianego problemu identyfikacji.

Punktem wyjścia do opisu drugiego sposobu identyfikacji parametrów tłumika drgań są równania (5). Przyjmijmy, że w równaniach tych niewiadomymi są wielkości oznaczone symbolami  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Po rozwiązaniu tego układu równań otrzymuje się:

$$\varphi_1 = \frac{q_c u_c + q_s u_s}{q_c^2 + q_s^2}, \quad \varphi_2 = \frac{q_s u_c - q_c u_s}{q_c^2 + q_s^2}. \quad (27)$$

Posługując się rezultatami pierwszego etapu procedury identyfikacyjnej można, dla każdej częstości wymuszenia  $\lambda_i$ , obliczyć  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Można wobec tego napisać:

$$\tilde{\varphi}_{1i} = \frac{\tilde{q}_{ci} \tilde{u}_{ci} + \tilde{q}_{si} \tilde{u}_{si}}{\tilde{q}_{ci}^2 + \tilde{q}_{si}^2}, \quad \tilde{\varphi}_{2i} = \frac{\tilde{q}_{si} \tilde{u}_{ci} - \tilde{q}_{ci} \tilde{u}_{si}}{\tilde{q}_{ci}^2 + \tilde{q}_{si}^2}, \quad (28)$$

gdzie symbolami  $\tilde{q}_{ci}$ ,  $\tilde{q}_{si}$ ,  $\tilde{u}_{ci}$  i  $\tilde{u}_{si}$  oznaczono wielkości uzyskane w trakcie pierwszego etapu identyfikacji.

Z drugiej strony wielkości  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  dane są wzorami (6). Teraz zakłada się, że  $\varphi_{1i} \approx \tilde{\varphi}_{1i}$  a  $\varphi_{2i} \approx \tilde{\varphi}_{2i}$ . Ponieważ omawiane równości będą spełnione tylko z pewnym przybliżeniem to można napisać (dla każdej częstości wymuszenia) następujące równania:

$$r_i = k + c \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} - \tilde{\varphi}_{1i} = 0, \quad s_i = c \lambda_i^\alpha \sin \frac{\alpha \pi}{2} - \tilde{\varphi}_{2i} = 0. \quad (29)$$

Podobnie jak poprzednio równania (29) to nieliniowy, nadokreślony układ równań algebraicznych ze względu na parametry  $k$ ,  $c$  i  $\alpha$ . Pseudo-rozwiązanie tego układu ma być określone w ten sposób aby funkcjonal błędu (26) osiągał wartość minimalną.

Jeżeli wartość parametru  $\alpha$  będzie zadana to z warunków stacjonarności funkcjonala (26) ze względu na parametry  $k$  i  $c$  wynika następujący układ równań:

$$k n + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} = \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_{1i} ,$$

$$k \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \cos \frac{\alpha \pi}{2} + c \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2\alpha} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \left( \tilde{\varphi}_{1i} \cos \frac{\alpha \pi}{2} + \tilde{\varphi}_{2i} \sin \frac{\alpha \pi}{2} \right) . \quad (30)$$

Optymalną wartość parametru  $\alpha$  określa się stosując opisaną wcześniej procedurę systematycznego przeszukiwania zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Oczywiście można zastosować w tym celu również inne procedury optymalizacyjne.

## 6. WYNIKI PRZYKŁADOWEJ IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW MODELU

Przeprowadzono procedurę identyfikacyjną posługując się sztucznie wygenerowanymi danymi doświadczalnymi. Dla zbioru 9 częstości wymuszenia wyznaczono, posługując się wzorami (5) i (6), wartości  $u_{ci}$ ,  $u_{si}$ ,  $q_{ci}$  oraz  $q_{si}$ . Tak otrzymane wartości omawianych współczynników zostały losowo zaburzone przy użyciu generatora liczb losowych. Zaburzone wartości  $\tilde{u}_{ci}$ ,  $\tilde{u}_{si}$ ,  $\tilde{q}_{ci}$  i  $\tilde{q}_{si}$  współczynników wyznaczano ze wzorów:

$$\tilde{u}_{ci} = u_{ci}(1 + \varepsilon\gamma), \quad \tilde{u}_{si} = u_{si}(1 + \varepsilon\gamma), \quad \tilde{q}_{ci} = q_{ci}(1 + \varepsilon\gamma), \quad \tilde{q}_{si} = q_{si}(1 + \varepsilon\gamma) . \quad (31)$$

gdzie symbolami  $\gamma$  i  $\varepsilon$  oznaczono odpowiednio liczbę losową o rozkładzie równomiernym wziętą z przedziału  $\langle -1, +1 \rangle$  i poziom szumów.

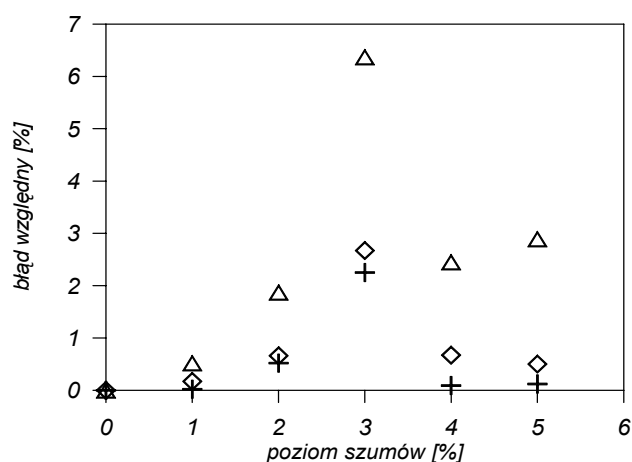
Następujące dane:  $n = 9$ ,  $\lambda_1 = 0,5 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_2 = 1,0 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_3 = 2,0 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_4 = 4,0 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_5 = 6,0 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_6 = 8,0 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_7 = 10,0 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_8 = 12,5 \text{ Hz}$ ,  $\lambda_9 = 15,0 \text{ Hz}$ ,  $\alpha = 0.6$ ,  $k = 290,0 \text{ kN/m}$ ,  $c = 68,0 \text{ kNs/m}$ ,  $u_c = 0,0 \text{ kN}$ ,  $u_s = 0,30 \text{ kN}$  posłużyły do wyznaczania sztucznych danych doświadczalnych.

Po zastosowaniu pierwszego sposobu identyfikacji otrzymano następujące wyniki:  $\alpha = 0.601$ ,  $k = 290,469 \text{ kN/m}$ ,  $c = 67,7862 \text{ kNs/m}$ . Po zastosowaniu drugiego sposobu identyfikacji i wprowadzeniu szumów o intensywności  $\varepsilon = 0,03$  otrzymano:  $\alpha = 0.609$ ,  $k = 292,115 \text{ kN/m}$  i  $c = 64,984 \text{ kNs/m}$ . Rezultaty uzyskane za pomocą obu procedur identyfikacyjnych pozostają w dobrej zgodności z wynikami dokładnymi.

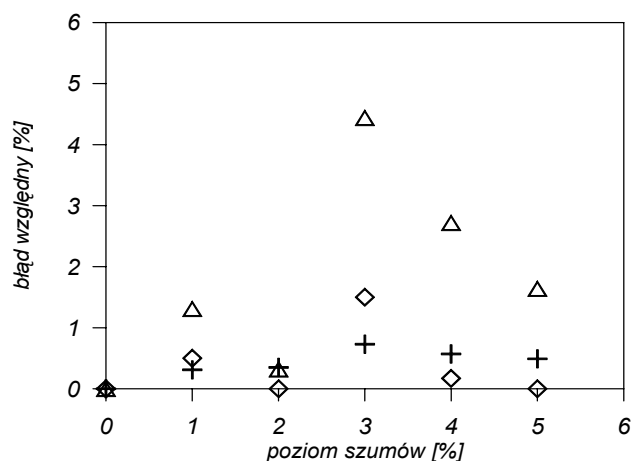
Wykonano również obliczenia dla różnych poziomów szumu wziętych z przedziału  $0 - 0,05$ . Wyniki obliczeń przedstawiono na Rys. 5 i 6. Widać, że błędy wyznaczenia parametrów modelu są tego samego rzędu co poziom szumów reprezentujących błędy pomiarowe. Na Rys. 7 pokazano wykres funkcjonału błędu w zależności od wartości parametru  $\alpha$ . Widać, że ma on jedno maksimum.

Wykonano również obliczenia posługując się danymi doświadczalnymi dla tłumika zbudowanego z użyciem materiału VHB 4959 firmy 3M. Tłumik złożony z dwóch warstw materiału lepkosprężystego, każda o grubości 3 mm zaprojektowano tak, aby pracował wyłącznie na ścinanie. Testy przeprowadzono na stanowisku MTS 810. W doświadczeniu wykorzystano następujące czujniki: przetwornik siły S9, przetwornik przemieszczeń WA100 oraz przetwornik przyspieszeń B12 (wszystkie produkcji Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH). Dane zbierano i przetwarzano za pomocą pakietu CATMAN firmy HBM. Parametry modelu

ułamkowego obliczono posługując się 2 metodą identyfikacji. Otrzymano następujące wartości parametrów:  $\alpha = 0,3755$ ,  $k = 2603,1 \text{ N/m}$  i  $c = 30333,9 \text{ Ns/m}$ . Rezultaty obliczeń przedstawiono również na Rys. 8a i 8b, na których porównano ustalone w trakcie pierwszego etapu identyfikacji wartości modułów  $K'(\lambda)$  i  $K''(\lambda)$  z wartościami wyznaczonymi ze wzorów (7). Na wspomnianych rysunkach rezultaty 1 etapu identyfikacji oznaczono rombami, a wartości wynikające ze wzorów (7) małymi kwadratami. Otrzymane rezultaty upoważniają do stwierdzenia, że zaproponowany model nadaje się do opisu dynamicznego zachowania tłumików lepkosprężystych.

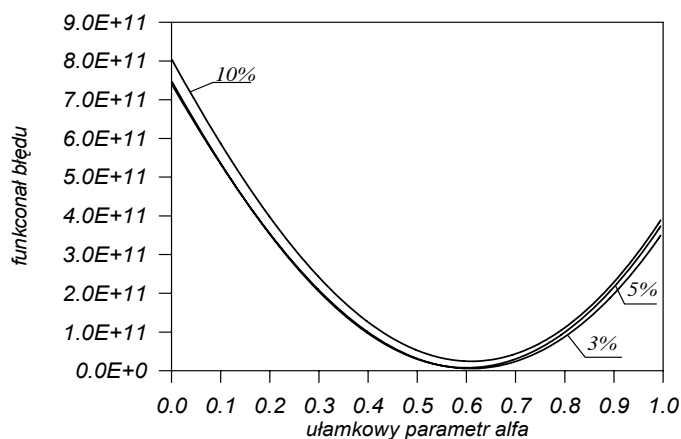
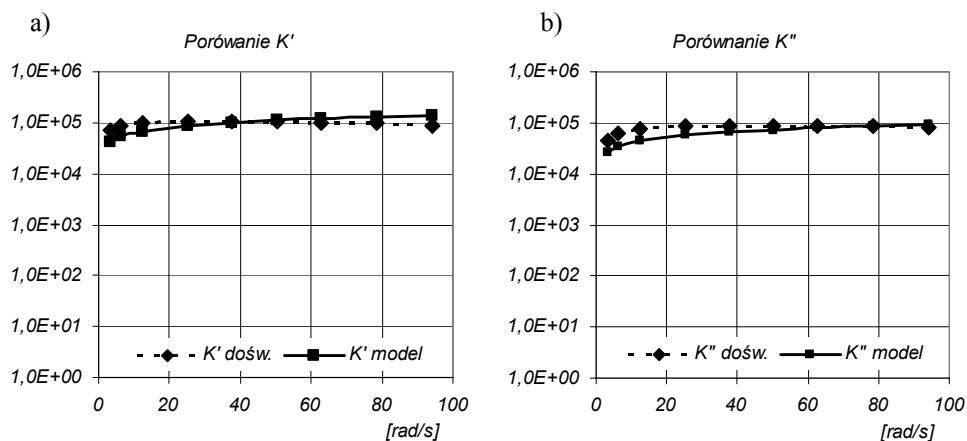


Rysunek 5: Względne błędy parametru  $\alpha$  (romb), parametru  $k$  (krzyżyk) i parametru  $c$  (trójkąt) w zależności od poziomu szumów – pierwsza metoda identyfikacji parametrów



Rysunek 6: Względne błędy parametru  $\alpha$  (romb), parametru  $k$  (krzyżyk) i parametru  $c$  (trójkąt) w zależności od poziomu szumów – druga metoda identyfikacji



Rysunek 7: Zależność funkcjonatu błędu od parametru  $\alpha$ Rysunek 8: Porównanie wartości modułu: a)  $K'(\lambda)$ , b)  $K''(\lambda)$ .

## 7. UWAGI KOŃCOWE

W pracy omówiono metodę wyznaczania parametrów ułamkowego, trójparametrowego modelu Kelvina, który może być wykorzystany jako model obliczeniowy tłumika lepkosprężystego. Opisana metoda identyfikacji parametrów modelu jest stosunkowo prosta i efektywna pod względem numerycznym. Przedstawione wyniki identyfikacji parametrów wybranego materiału lepkosprężystego upoważniają do stwierdzenia, że zaproponowany model nadaje się do opisu dynamicznego zachowania tłumików lepkosprężystych.

## Podziękowania

Praca powstała w ramach tematu DS 11-018/08.

**LITERATURA**

- [1] C. Christopoulos, A. Filiatrault, *Principles of passive supplemental damping and seismic isolation*, IUSS Press, Pavia, Italy, 2006.
- [2] R. Lewandowski, *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006.
- [3] S. W. Park, Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control, *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**, 8065 – 8092.
- [4] A. Palmeri, F. Ricciardelli, A. De Luca, G. Muscolino, State space formulation for linear viscoelastic dynamic systems with memory, *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, **129**, 715 – 724.
- [5] S. Gerlach, A. Matzenmiller, Comparison of numerical methods for identification of viscoelastic line spectra from static test data, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **63**, 428 – 454.
- [6] S.M.F.D Syed Mustapha, T. N. Philips, A dynamic nonlinear regression method for the determination of the discrete relaxation spectrum, *Journal of Physics D*, 2000, **33**, 1219 – 1229.
- [7] A. Aprile, J. A. Inaudi, J. M. Kelly, Evolutionary Model of Viscoelastic Dampers for Structural Applications, *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 551-560.
- [8] N. Makris, M. C. Constantinou, Fractional-derivative Maxwell model for viscous dampers, *Journal of Structural Engineering*, 1991, **117**, 2708 – 2724.
- [9] R. L. Bagley, P. J. Torvik, Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, *AIAA J.*, 1989, **27**, 1412 – 1417.
- [10] A. Schmidt, L. Gaul, Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives, *Journal of Nonlinear Dynamics*, 2002, **29**, 37 – 55.
- [11] T. Pritz, Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials, *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **195**, 103-115.
- [12] T. Pritz, Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, **265**, 935 – 952
- [13] I. Podlubny, *Fractional Differential equations*, Academic Press, 1999.
- [14] A. Lion, Thermomechanically consistent formulations of the standard linear solid using fractional derivatives, *Arch. Mech.*, 2001, **53**, 253 – 273.

## **OPTYMALNY ROZKŁAD TŁUMIENIA W AKTYWNYM PAŚMIE W LINACH PODDANYCH RUCHOWI FAL BIEGNĄCYCH**

**Waldemar Latas**

Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Krakowska  
Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków  
e-mail: latas@mech.pk.edu.pl

---

**Abstract:** *Cables used in overhead transmission lines and cable-stayed bridges are subjected to large vibrations causing fatigue damages of the cable and assemblies. Wave motion and vibration occur mainly due to vortex shedding, rivulet formation, galloping and buffeting. In the paper the problem of optimal choice of the distributed damping force suppressing the waves traveling along the cable is considered. Parametric optimization of the damping coefficient function for the given objective function – dissipation efficiency – was performed.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Przewody w liniach transmisyjnych oraz liny w mostach wiszących narażone są na drgania o dużych amplitudach będące przyczyną zniszczenia zmęczeniowego oraz uszkodzeń elementów konstrukcji. Przyczyną tych drgań są między innymi gwałtowne podmuchy wiatru, schodzenie wirów, galloping.

W celu obniżenia poziomu drgań modyfikuje się powierzchnię oraz zwiększa tłumienie wewnętrzne lin obniżając ich wrażliwość na siły aerodynamiczne spowodowane opływem powietrza. Stosowane są także specjalne tłumiki, odstępniki, pętle tłumiące [1-3].

W niniejszej pracy zajęto się zagadnieniem redukcji fal biegnących wzdłuż lin aktywnym pasmem tłumiącym, dla którego zaproponowano algorytm sterowania obciążeniem rozłożonym. Celem jest taki dobór parametrów sterowania aby maksymalnie rozproszyć energię fali padającej.

Można wykazać, że dla modelu struny idealnej istnieje dokładne rozwiązanie powyższego zagadnienia optymalizacyjnego dla skupionej siły tłumiącej. Optymalna siła działa przeciwnie do składnika wektora prędkości liny pochodzącego od fali padającej, wartość siły jest proporcjonalna do tego składnika prędkości, stała proporcjonalności jest równa stosunkowi naciągu liny do prędkości fali. Maksymalna wartość energii rozproszonej przez siłę skupioną jest równa połowie energii fali padającej. Opierając się na tym wyniku w pracy [4] zaproponowano algorytm tłumienia dla siły rozłożonej działającej wzdłuż ograniczonego pasma. Przyjęto obciążenie działające przeciwnie do składnika wektora prędkości liny pochodzącego od fali padającej, ze stałym współczynnikiem proporcjonalności wzdłuż pasma. Wykazano

poprawę skuteczności tłumienia. Dla odpowiedniej długości pasma tłumiącego można tak dobrać współczynnik tłumienia (zależny od długości fali padającej), aby rozproszeniu uległo ponad 95% energii fali padającej.

W pracy [5] pokazano, że współczynnik ten można tak dobrać, aby aktywny tłumik pasmowy działał skutecznie dla szerokiego zakresu długości fal padających.

W niniejszej pracy zajęto się zagadnieniem parametrycznej optymalizacji współczynnika tłumienia w paśmie. Jeśli dla zadanej długości pasma zmienny współczynnik tłumienia zapewni znacznie efektywniejsze tłumienie w porównaniu ze stałym współczynnikiem tłumienia wzdłuż pasma, to będzie to oznaczało, że zadaną skuteczność będzie można uzyskać na paśmie o mniejszej długości, co ma znaczenie z praktycznego punktu widzenia.

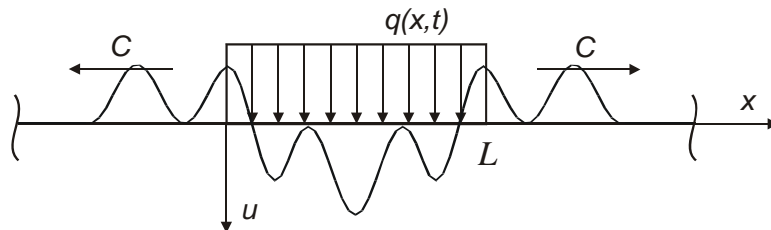
## 2. FALE WYWOŁANE OBCIĄŻENIEM ROZŁOŻONYM

Przyjmując model struny idealnej równanie ruchu liny poddanej obciążeniu rozłożonemu wzdłuż pasma (Rys. 1) ma postać:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tilde{q}(x, t) \quad (1)$$

gdzie  $\mu$  oznacza gęstość liniową,  $T$  jest siłą naciągu liny oraz

$$\tilde{q}(x, t) = \begin{cases} q(x, t) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x < 0, x > L \end{cases} \quad (2)$$



Rysunek 1: Obciążenie rozłożone jako źródło fal biegnących

Rozwiązanie równania (1) bez składników zależnych od warunków początkowych ma postać [6]:

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\mu} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} \tilde{q}(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3)$$

gdzie  $c$  oznacza prędkość fal biegnących równą  $\sqrt{T/\mu}$ .

Z rozwiązania (3) można uzyskać wyrażenie

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\mu} \int_0^t [\tilde{q}(x-c(t-\tau), \tau) + \tilde{q}(x+c(t-\tau), \tau)] d\tau \quad (4)$$

wygodne do obliczeń energii fal biegnących.

### 3. OPTIMALIZACJA FUNKCJI OPISUJĄCEJ TLUMIENIE W PAŚMIE

Pasmo tłumiące wywiera siłę rozłożoną będącą źródłem dwóch fal wtórnych: fali odbitej poruszającej się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu fali padającej oraz fali tworzącej wraz z falą padającą falę przepuszczoną przez pasmo.

Siłę rozłożoną działającą w paśmie przyjęto w postaci:

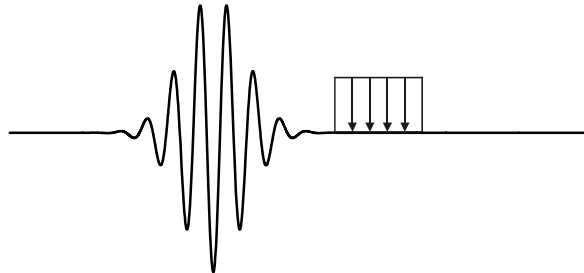
$$q(x,t) = -\alpha(x) \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} \quad (5)$$

W obliczeniach numerycznych przyjęto falę padającą w postaci paczki falowej

$$u_0(x,t) = \Psi_0 \sin(k_0(x-ct+4\sigma)) \exp\left(-\frac{(x-ct+4\sigma)^2}{4\sigma^2}\right) \quad (6)$$

gdzie:  $k_0$  – liczba falowa,  $\sigma$  – parametr opisujący szerokość paczki falowej.

Ten typ fali z modulacją amplitudy jest wygodny w modelowaniu wielu rodzajów zaburzeń obserwowanych w linach. Na Rys. 2 przedstawioną falę padającą tuż przed osiągnięciem aktywnego pasma tłumiącego.



Rysunek 2: Fala padająca przed osiągnięciem aktywnego pasma tłumiącego

Aby wyznaczyć energię rozproszoną  $E_R$  w aktywnym paśmie tłumiącym wykorzystano bilans energii

$$E_R = E_P - (E_O + E_T) \quad (7)$$

gdzie oznaczono:

$$E_P = \int_0^{\frac{8\sigma}{c}} \sqrt{T\mu} \left( \frac{\partial u_0(0,t)}{\partial t} \right)^2 dt - \text{energia fali padającej,}$$

$$E_O = \int_0^{\frac{8\sigma+2L}{c}} \sqrt{T\mu} \left( \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} \right)^2 dt - \text{energia fali odbitej,}$$

$$E_T = \int_{\frac{L}{c}}^{\frac{8\sigma+L}{c}} \sqrt{T\mu} \left( \frac{\partial u(L,t)}{\partial t} + \frac{\partial u_0(L,t)}{\partial t} \right)^2 dt - \text{energia fali przepuszczonej.}$$

Stosunek energii rozproszonej w paśmie do energii fali padającej nazwano efektywnością tłumienia

$$\eta = \frac{E_R}{E_P} \quad (8)$$

Tabela 1 przedstawia optymalne wartości stałego tłumienia  $\tilde{\alpha}_{OPT}$  [1/s] oraz maksymalną efektywność tłumienia  $\eta_{MAX}$  dla różnych wartości parametrów  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\lambda}$  opisujących falę padającą, gdzie wprowadzono oznaczenia:  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu}$ ,  $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{L}$ ,  $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{L}$ .

Tabela 1: Optymalna wartość współczynnika tłumienia  $\tilde{\alpha}_{OPT}$  [1/s] oraz maksymalna efektywność tłumienia  $\eta_{MAX}$  dla stałego tłumienia w paśmie

	$\bar{\lambda} = 1$		$\bar{\lambda} = 3$		$\bar{\lambda} = 6$	
$\bar{\sigma} = 1$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 80$	$\eta_{MAX} = 0.995$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 71$	$\eta_{MAX} = 0.876$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 55$	$\eta_{MAX} = 0.676$
$\bar{\sigma} = 3$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 80$	$\eta_{MAX} = 0.999$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 69$	$\eta_{MAX} = 0.856$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 48$	$\eta_{MAX} = 0.604$
$\bar{\sigma} = 6$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 80$	$\eta_{MAX} = 0.999$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 68$	$\eta_{MAX} = 0.854$	$\tilde{\alpha}_{OPT} = 47$	$\eta_{MAX} = 0.596$

Z wyników przedstawionych w Tabeli 1 można wywnioskować, że dla danej długości pasma tłumiącego maksymalna efektywność tłumienia maleje wraz ze wzrostem długości fali, zmieniając się od wartości 1.0 ( $\bar{\lambda} \rightarrow 0$ ; odpowiada to dla zadanej długości fali nieskończenie długiemu pasmu tłumiącemu) do wartości 0.5 ( $\bar{\lambda} \rightarrow \infty$ ; odpowiada to dla zadanej długości fali tłumieniem siłą skupioną).

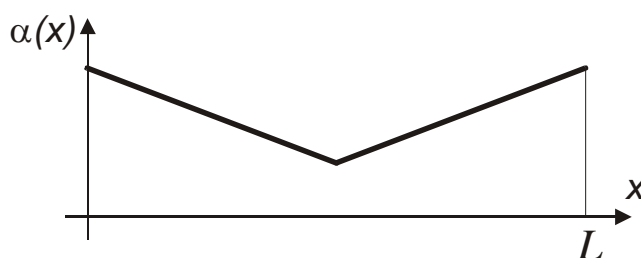
Oczywiste jest, że szerokość pasma tłumiącego jest ograniczona ze względów technicznych i powinno ono być możliwie wąskie. Celem jest taki dobór funkcji  $\alpha(x)$ , aby zwiększyć efektywność tłumienia w porównaniu z przypadkiem  $\alpha(x) = const$ .

### 3.1. Optymalizacja parametryczna funkcji tłumienia

W obliczeniach numerycznych uwzględniono tłumienie w paśmie opisane funkcją liniową oraz szczególnego typu funkcją odcinkami liniową. Okazuje się, że funkcje monotoniczne nie poprawiają maksymalnej efektywności tłumienia w porównaniu ze stałym tłumieniem.

Wyniki symulacji numerycznych zasugerowały przyjęcie tłumienia w postaci funkcji pokazanej na Rys. 3, opisanej związkami:

$$\alpha(x) = \begin{cases} A+Bx & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ (A+BL)-Bx & \frac{L}{2} < x \leq L \end{cases} \quad (9)$$



Rysunek 3: Postać funkcji opisującej zmienny współczynnik tłumienia w paśmie

Przeprowadzono optymalizację efektywności tłumienia ze względu na wartości parametrów A i B.

### 3.2. Wyniki obliczeń numerycznych

Tabela 2 przedstawia optymalne wartości parametrów  $\tilde{A}_{OPT}$  [1/s] oraz  $\tilde{B}_{OPT}$  [1/ms] opisujących funkcję tłumienia w paśmie oraz uzyskaną maksymalną efektywność tłumienia  $\eta_{MAX}$  dla różnych wartości parametrów  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\lambda}$  opisujących falę padającą, gdzie wprowadzono oznaczenia:  $\tilde{A} = \frac{A}{\mu}$ ,  $\tilde{B} = \frac{B}{\mu L}$ .

Tabela 2: Optymalne wartości parametrów funkcji tłumienia  $\tilde{A}_{OPT}$  [1/s],  $\tilde{B}_{OPT}$  [1/ms] oraz maksymalna efektywność tłumienia  $\eta_{MAX}$  dla zmiennego tłumienia w paśmie

	$\bar{\lambda} = 3$			$\bar{\lambda} = 6$		
$\bar{\sigma} = 1$	$\tilde{A}_{OPT} = 150$	$\tilde{B}_{OPT} = -300$	$\eta_{MAX} = 0.934$	$\tilde{A}_{OPT} = 270$	$\tilde{B}_{OPT} = -810$	$\eta_{MAX} = 0.844$
$\bar{\sigma} = 3$	$\tilde{A}_{OPT} = 186$	$\tilde{B}_{OPT} = -428$	$\eta_{MAX} = 0.987$	$\tilde{A}_{OPT} = 596$	$\tilde{B}_{OPT} = -2086$	$\eta_{MAX} = 0.931$
$\bar{\sigma} = 6$	$\tilde{A}_{OPT} = 212$	$\tilde{B}_{OPT} = -530$	$\eta_{MAX} = 0.995$	$\tilde{A}_{OPT} = 784$	$\tilde{B}_{OPT} = -2822$	$\eta_{MAX} = 0.980$

## 4. WNIOSKI

Porównując wyniki umieszczone w Tabeli 1 oraz Tabeli 2 można zauważyć znaczący wzrost maksymalnej efektywności tłumienia dla funkcji tłumienia danej związkami (9) w porównaniu z maksymalną efektywnością uzyskaną dla stałego współczynnika tłumienia w paśmie. W porównywanym przedziale zmienności wielkości  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\lambda}$  wzrost efektywności wyniósł od 6% do 64%, jednakże największy wzrost wystąpił – co jest ważne z przyczyn

praktycznych – dla węższego pasma tłumiącego, dla którego algorytm tłumienia ze stałym współczynnikiem jest mniej efektywny.

Okazało się także, że stosując algorytm ze zmiennym współczynnikiem tłumienia (zgodnie z przyjętym schematem) można uzyskać porównywalną lub większą efektywność tłumienia na dwukrotnie krótszym paśmie.

Przedstawione wyniki dla pasma tłumiącego można także wykorzystać przy zagadnieniu optymalnego tłumienia fal biegnących za pomocą grupy kilku tłumików skupionych.

## LITERATURA

- [1] E. A. Johnson, B. F. Baker, Semiactive damping of stay cables, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **128** (7).
- [2] S. Krenk, Vibration of a taut cable with an external damper, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, **67** (2000) 772-776.
- [3] B. M. Pachero, Y. Fujino, Estimation curve for modal damping in stay cables with viscous damper, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, **119** (6) (1993) 1961-1979.
- [4] W. Łatas, J. Snamina, Dissipation of the waves energy in cables by the optimal damper force, *Quarterly Mechanics*, **26** (4) (2007) 174-180.
- [5] W. Łatas, Optimal active segment damping in cables subjected to the traveling waves motion, *Vibrations in Physical Systems*, **XXIII** (2008).
- [6] W. M. Babicz, M. B. Kapilewicz, *Równania liniowe fizyki matematycznej*, PWN, Warszawa 1970.
- [7] J. Snamina, *Mechaniczne zjawiska falowe w przewodach elektroenergetycznych linii napowietrznych*, *Mechanika* **287**, Politechnika Krakowska, Kraków 2003.
- [8] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons Inc., New York 1999.
- [9] J. J. Burgess, M. S. Triantafyllou, The elastic frequencies of cables, *Journal of Sound and Vibration*, **120** (1988) 153-165.
- [10] N. C. Perkins, M. Behbahani-Nejad, Forced wave propagation in elastic cables with small curvature, ASME, *Design Engineering Technical Conferences*, 3 – Part B (1995) 1457-1464.
- [11] N. C. Perkins, M. Behbahani-Nejad, Free wave propagation characteristic of elastic cables, *Proceedings International Symposium on Cable Dynamics*, Liege 1995.
- [12] N. C. Perkins, M. Behbahani-Nejad, Freely propagating waves in elastic cables, *Journal of Sound and Vibration*, **2** (1996) 189-202.



## **DRGANIA OKRESOWE, PRAWIE OKRESOWE I CHAOTYCZNE W PROCESACH TOCZENIA**

**Jan Luczko**

Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Krakowska  
Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków  
e-mail: jluczko@mech.pk.edu.pl

---

**Abstract:** *The paper is concerned with qualitative analysis of a non-linear model describing the vibrations in cutting processes. The model of the regenerative turning process is described by two delay differential equations. The influence of selected parameters such as the rotational velocity and the frequency of the kinematic excitations as well as the cutting speed and the cutting resistance on the character and level of vibrations is studied. The possibility of the excitation of quasi-periodic or chaotic oscillations for some values of the parameters has been shown. Zones of the sub-harmonic, quasi-periodic and chaotic vibrations were estimated by the methods of numerical integration. Bifurcation diagrams have been used to explain the phenomenon of vibration synchronization. Different types of vibration are illustrated by plots of time histories, phase and stroboscopic portraits.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Proces toczenia jest jednym z najbardziej rozpowszechnionych sposobów obróbki – z tego też powodu różne modele tego procesu są chętnie analizowane w literaturze [1-4, 7, 8]. W procesie toczenia występuje tzw. efekt regeneracyjny, który polega na tym, że drgania, przy poprzednim obrocie przedmiotu, wpływają poprzez kształt powierzchni na drgania podczas kolejnego obrotu wrzeciona. Takie podejście prowadzi do opisu ruchu równaniami różniczkowymi z opóźnionym argumentem.

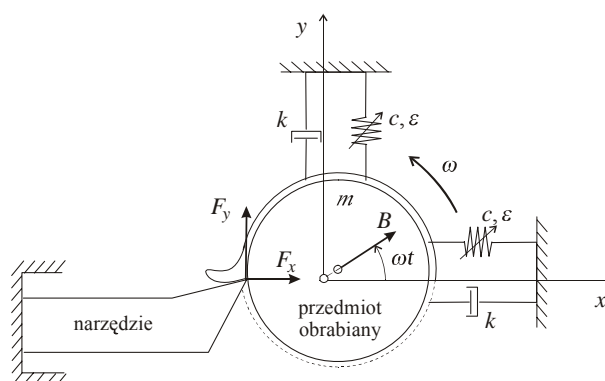
Inny, często badany model, bazuje na założeniu, że siły skrawania zależą nieliniowo od grubości warstwy skrawanej oraz od prędkości. Jest to model samowzbudny układu. Można tu dodatkowo uwzględnić wpływ wymuszeń bezwładnościowych oraz wpływ profilu powierzchni, ukształtowanego w poprzednim zabiegu, np. obróbki zgrubnej (skrawanie po śladzie), czyli wymuszenia kinematyczne. Przy założeniu, że wymuszenia te są opisane funkcją poliharmoniczną, mamy model nieautonomicznego układu samowzbudnego. Model taki pozwala wyjaśniać zjawisko wzbudzenia się drgań prawie okresowych.

Poruszone wyżej problemy modelowania są dobrze opisane w pracy [7]. Podano w niej związki między siłami skrawania, parametrami procesu toczenia i parametrami, określającymi

mi geometrię ostrza narzędzia skrawającego. Rezultaty analiz numerycznych zostały tam także zweryfikowane doświadczeniami.

## 2. MODEL UKŁADU

Do analizy przyjmujemy model zbliżony do zaprezentowanego w pracy [7]. Pozwala on badać wpływ sił bezwładności, profilu powierzchni ukształtowanego podczas obróbki wstępnej, efekty regeneracyjne oraz tarcie.



Rysunek 1: Model układu

Ograniczymy się, jak w przypadku toczenia ortogonalnego, do analizy w płaszczyźnie  $xy$ , uwzględniając tylko składową obwodową (tzw. główną siłę skrawania)  $F_x$  oraz składową odporową  $F_y$  siły skrawania  $F$  (Rys. 1). Składową  $F_x$  można opisać wzorem:

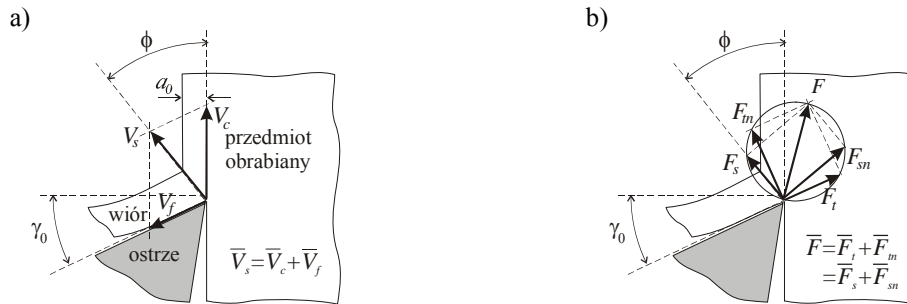
$$F_y = c_0 a^\rho \Psi(V_y) H(a) H(V_y), \quad (1)$$

gdzie:

$$\Psi(V_y) = 1 - \alpha_y V_y + \beta_y V_y^3. \quad (2)$$

Parametr  $a$  jest grubością warstwy skrawanej, parametry  $c_0$  i  $\rho$  charakteryzują proces skrawania (często zakłada się  $\rho=0.75$ ), a  $V_y$  jest prędkością względną pomiędzy narzędziem i przedmiotem w kierunku osi  $y$ . Wartości współczynników  $\alpha_y$ ,  $\beta_y$  są określane doświadczalnie.

W przypadku, gdy  $a < 0$  lub  $V_y < 0$  dochodzi do utraty kontaktu narzędzia z obrabianym materiałem. Wówczas siła  $F_y$  przyjmuje wartość zerową. Ten fakt uwzględniają wprowadzone we wzorze (1) funkcje Heaviside'a  $H(a)$  oraz  $H(V_y)$ . Wyprowadzając zależność (1) założono, że największy wpływ na proces skrawania mają siły: ścinająca  $F_s$ , leżąca w płaszczyźnie poślizgu i siła tarcia  $F_t$ , działająca na powierzchnię natarcia (Rys. 2b). Pierwsza z nich zależy nieliniowo od grubości warstwy skrawanej (funkcja  $a^\rho$ ). Siła tarcia zależy dodatkowo od prędkości sływu wióra  $V_f$  (Rys. 2a), związanej z prędkością skrawania  $V_c$  – stąd występujący we wzorze (1) człon Rayleigha (2).



Rysunek 2: Związki wektorowe ( $\gamma_0$  – kąt natarcia,  $\phi$  – kąt ścinania wióra): a) rozkład prędkości, b) rozkład sił

W przypadku braku drgań grubość warstwy skrawanej ma wartość stałą, równą założonej wartości  $a_0$  głębokości skrawania. Także  $V_y$  ma wartość stałą równą prędkości skrawania  $V_{y0}=V_c$ . Inna sytuacja ma miejsce w przypadku występowania drgań. Wtedy zarówno  $a$ , jak i  $V_y$ , są zmienne w czasie. Na wartość prędkości  $V_y$  wpływa pochodna przemieszczenia w kierunku  $y$ , w związku z czym we wzorach (1) i (2) należy przyjąć:

$$V_y = V_{y0} - \dot{y} . \quad (3)$$

Grubość warstwy skrawanej  $a$  zależy od wielu czynników. Można tu uwzględnić tylko wpływ przemieszczeń  $x(t)$  lub dodatkowo wpływ nierówności  $e(t)$ , powstałych przy pierwszym przejściu narzędzia (skrawanie zgrubne). Wreszcie można badać wpływ efektów regeneracyjnych, czyli profilu powierzchni ukształtowanego o jeden obrót wcześniej, a opisanego funkcją  $x(t-T)$ . Uwzględniając te efekty łącznie grubość warstwy zapiszemy następująco:

$$a = a_0 - x(t) + x(t - \tau) - e(t) . \quad (4)$$

W uproszczeniu można przyjąć, że funkcja  $e(t)$  jest funkcją okresową lub prawie okresową. Często przedstawia się ją w postaci sumy dwóch funkcji harmonicznnych, których częstotliwości są związane odpowiednio z częstotliwością rezonansową układu oraz z prędkością skrawania podczas procesu obróbki zgrubnej. Ogólnie można założyć:

$$e(t) = \sum_k e_k \cos(v_k t - \alpha_k) \quad (5)$$

Dla składowej  $F_x$  siły skrawania w pracy [7] jest proponowany związek:

$$F_x = \Phi(V_x) F_y \quad (6)$$

gdzie:

$$\Phi(V_x) = \text{sgn}(V_x) - \alpha_x V_x + \beta_x V_x^3 \quad (7)$$

Prędkość  $V_x = V_{x0} - \dot{x}$  jest odpowiednią składową prędkości względnej między wiórem i ostrzem narzędzia.

Zakładając, że współrzędne  $x$  i  $y$  są mierzone od stanu równowagi statycznej (w którym to składowe statyczne  $F_{x0}$ ,  $F_{y0}$  siły skrawania równoważą się z odpowiednimi składowymi sił sprężystości) równania różniczkowe ruchu można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + k\dot{x} + c(x + \varepsilon x^3) &= F_x - F_{x0} + m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} \cos \omega t \\ m\ddot{y} + k\dot{y} + c(y + \varepsilon y^3) &= F_y - F_{y0} + m\omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} \sin \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

Występująca w równaniach (8) siła bezwładności jest rezultatem przesunięcia środka masy przedmiotu, wywołanego drganiami. W stosunku do pracy [7] w równaniach (8) przyjęto nieliniową charakterystykę siły sprężystości w celu ograniczenia amplitud drgań w obszarach rezonansu parametrycznego. Wartość parametru  $\varepsilon$  będzie tak dobrana, aby parametr ten nie wpływał na charakter drgań w zakresie amplitud porównywalnych z głębokością skrawania.

W celu uzyskania bezwymiarowej postaci równań różniczkowych wprowadza się bezwymiarowy czas  $\tau = \omega_0 t$  (gdzie  $\omega_0^2 = c/m$ ). Przemieszczenia odnosi się najczęściej do założonej wartości głębokości skrawania (parametru  $a_0$ ). Postać (8) równań różniczkowych ruchu nie ulega dużej zmianie. Przykładowo, w miejscu stałej  $c_0$  występuje parametr  $c_0 a_0^{(\rho-1)}/c$ . Współczynnik tłumienia  $k$  należy zastąpić parametrem  $k/m\omega_0$ , a współczynniki  $\alpha_x$  i  $\beta_x$  (podobnie  $\alpha_y$  i  $\beta_y$ ) odpowiednio parametrami  $\alpha_x \omega_0 a_0$  i  $\beta_x (\omega_0 a_0)^3$ . Prędkości są odnoszone do wartości  $\omega_0 a_0$ , a częstość wymuszenia do wartości  $\omega_0$ . Można więc formalnie przyjąć:  $c=1$ ,  $m=1$ ,  $a_0=1$  oraz  $\omega_0=1$  i traktować dalej równania (8) oraz występujące w nich parametry jako bezwymiarowe.

### 3. ANALIZA MODELU JEDNOWYMIAROWEGO

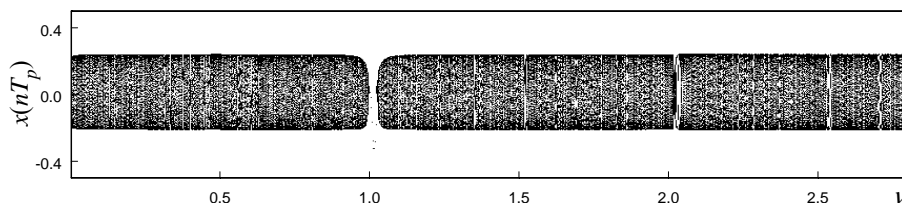
W celu zbadania wpływu podstawowych parametrów procesu skrawania na poziom drgań oraz ich charakter rozpatrzmy najpierw model układu o jednym stopniu swobody, pomijając przemieszczenia w kierunku osi  $y$ , a także wpływ wymuszeń bezwładnościowych.

Analizując wartości parametrów fizycznych, podane w pracy [7], przyjmujemy do obliczeń następujące wartości bezwymiarowych parametrów:  $c_0=0.05$ ,  $k=0.01$ ,  $\rho=0.75$ ,  $\alpha_x=1.7$ ,  $\beta_x=3.7$ ,  $\alpha_y=0.67$ ,  $\beta_y=0.23$ ,  $\nu_{x0}=0.35$ ,  $\nu_{y0}=0.5$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.2$ . W analizach numerycznych, prowadzonych metodami opisanymi w pracy [5], częstość będzie zmieniana w zakresie zawierającym częstość rezonansową układu (tutaj bliską jedności), także wartości pozostałych parametrów mogą ulegać zmianie w zakresach, obejmujących podane wyżej wartości.

Rozpatrzmy przypadek toczenia po śladzie, ukształtowanym podczas poprzedniego przejścia narzędzia, np. w procesie skrawania zgrubnego. Zakładając wymuszenie harmoniczne, uwzględnimy tylko pierwszy składnik ogólnego wzoru (5). Przyjmujemy też skrócone oznaczenia:  $\nu = \nu_1$  i  $e = e_1$ .

Rys. 3 pokazuje diagram bifurkacyjny, ilustrujący wpływ częstości  $\nu$  dla  $c_0=0.05$  i  $e=0.2$ . Przemieszczenia są tu notowane co okres wymuszenia kinematycznego  $T_p = 2\pi/\nu$ . Zachowanie układu jest typowe dla układów samowzbudnych z wymuszeniem parametrycznym. W szerokim zakresie częstości obserwuje się drgania prawie okresowe, tylko w pobliżu wartości  $\nu=1$  jest wyraźnie widoczny zakres synchronizacji drgań (drgania 1T-okresowe). W okolicy  $\nu=1.52$  wzbudzają się drgania 3T-okresowe, a dla  $\nu=2.026$  drgania 2T-okresowe.

Z obserwacji diagramu wynika, że w analizowanym zakresie parametru  $\nu$  wartości minimalne i maksymalne przemieszczeń praktycznie nie zależą od częstości wymuszenia. Są one

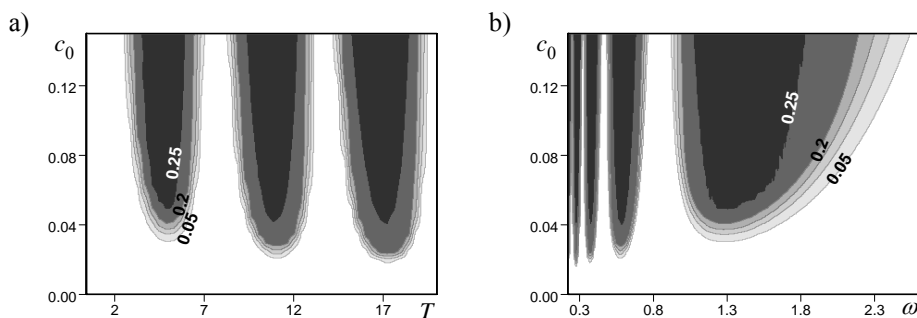
Rysunek 3: Diagram bifurkacyjny – wpływ częstości wymuszenia ( $c_0=0.05$ ,  $e=0.1$ )

zbliżone do amplitudy cyklu granicznego, którą to amplitudę można określić, analizując drgania układu autonomicznego (bez wymuszenia). Numerycznie wyznaczona częstość cyklu granicznego jest bliska wartości  $\omega_c=1.013$  (dla  $c_0=0.05$ ), a więc wspomniane wyżej drgania  $2T$ -okresowe wzbudzają się dla  $\nu=2\omega_c$ , a  $3T$ -okresowe dla  $\nu=1.5\omega_c$ . Bardzo podobne rezultaty otrzymuje się dla większych amplitud wymuszenia (np. dla  $e=0.2$ ) oraz dla innych oporów skrawania (parametr  $c_0$ ). Ze wzrostem  $c_0$  rośnie nieznacznie częstość cyklu granicznego (np. dla  $c_0=0.1$   $\omega_c=1.0254$ , dla  $c_0=0.15$   $\omega_c=1.0355$ ), co powoduje nieznaczne przesunięcie zakresów synchronizacji drgań w kierunku wyższych częstości.

W celu przeanalizowania wpływu efektu regeneracyjnego na zachowanie się układu pominiemy wpływ wymuszeń kinematycznych ( $e=0$ ), zakładając:

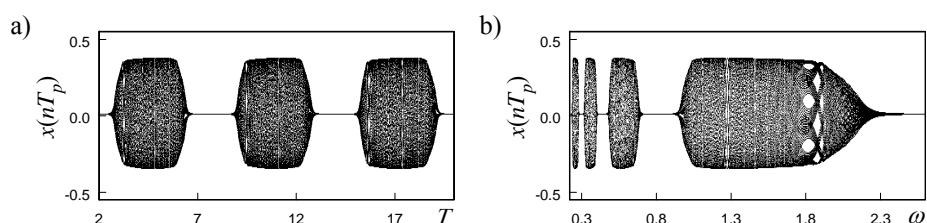
$$a = a_0 - x(t) + x(t - T) . \quad (9)$$

Pomiędzy czasem opóźnienia  $T$  i prędkością kątową przedmiotu  $\omega$  zachodzi związek  $T=2\pi/\omega$ . Rys. 4 ilustruje dwa alternatywne podejścia do badania wpływu efektu regeneracyjnego. Pokazuje on wpływ parametrów  $T$  i  $c_0$  oraz  $\omega$  i  $c_0$  na wskaźnik jakości  $J$ , zdefiniowany jako wartość skuteczna prędkości. W obszarach, oznaczonych kolorem białym wartości wskaźnika  $J$  są praktycznie zerowe – obserwuje się tu zanikające drgania. Inaczej mówiąc rozwiązania trywialne są stabilne. Tak więc proces toczenia przebiega prawidłowo (stabilnie, bez drgań) tylko dla bardzo małych oporów skrawania lub w odpowiednich przedziałach prędkości kątowej wrzeciona (Rys. 4b).

Rysunek 4: Wpływ efektu regeneracyjnego na wskaźnik jakości: a) płaszczyzna ( $T$ ,  $c_0$ ), b) płaszczyzna ( $\omega$ ,  $c_0$ )

W pozostałych obszarach wzbudają się drgania samowzbudne (okresowe). Krzywe, ograniczające te obszary w płaszczyźnie  $(T, c_0)$  nazywane są krzywymi „workowymi” [7]. Ze wzrostem wartości parametru  $c_0$  (oporów skrawania) rosną nieznacznie amplitudy drgań i zmienia się równocześnie ich charakter. Są to dalej drgania okresowe, jednak odbiegające wyraźnie od drgań harmoniczných. O tym fakcie świadczą trajektorie na płaszczyźnie fazowej, podobne do pokazanej dalej na Rys. 9b.

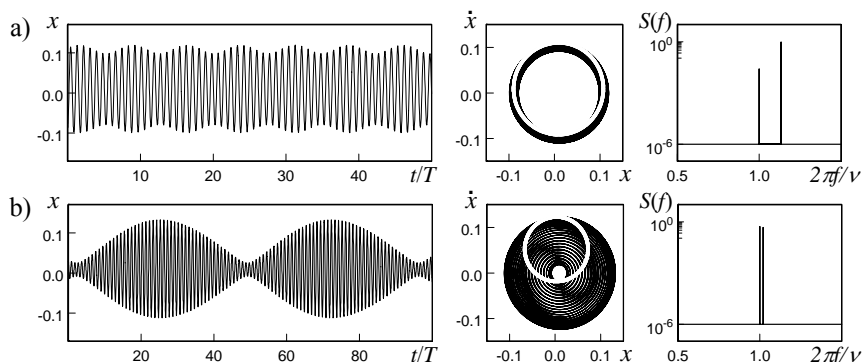
W celu zbadania równoczesnego wpływu efektu regeneracyjnego oraz skrawania po śladzie wyznaczmy diagramy bifurkacyjne, badając tym razem wpływ opóźnienia  $T$  (Rys. 5a) lub częstości  $\omega$  (Rys. 5b) dla ustalonych wartości parametrów wymuszenia:  $\nu=0.9$  i  $e=0.1$ . Jako częstość próbkowania przyjmijmy, tak jak poprzednio, częstość wymuszenia  $\nu$  ( $T_p=2\pi/\nu$ ). Można jednak postąpić inaczej, próbując sygnał z częstością  $\omega$ .



Rysunek 5: Diagramy bifurkacyjne ( $c_0=0.05$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ): a) wpływ  $T$ , b) wpływ  $\omega$

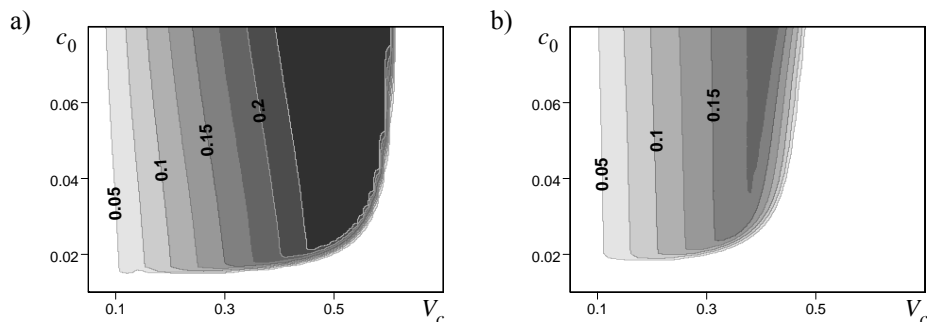
Diagramy na Rys. 5a i 5b częściowo odpowiadają przekrojom Rys. 4a i 4b dla  $c_0=0.05$ , przy czym należy pamiętać, że Rys. 4 został sporządzony bez uwzględnienia wymuszenia. W zakresach, w których wcześniej występowały drgania zanikające mamy obecnie do czynienia z drganiami z częstością wymuszenia (pojedyncza linia na diagramie), zaś w zakresach drgań okresowych wzbudają się teraz drgania prawie okresowe.

Typowy przebieg drgań prawie okresowych został przedstawiony na Rys. 6a. Na płaszczyźnie fazowej został dodatkowo pokazany portret stroboskopowy (kolor biały), który tworzy zamkniętą krzywą o kształcie zbliżonym do elipsy. Można tu zaobserwować zjawisko okresowego narastania i malenia amplitudy drgań, nazywane też zjawiskiem dudnienia. Niekiedy częstość zmian amplitudy jest bardzo mała w stosunku do częstości wymuszenia, w związku z czym na diagramach, pomimo stosunkowo dużej liczby punktów stroboskopowych (80 punktów dla zadanej wartości  $\nu$ ), występują zakresy częstości, w których rozkład punktów sugeruje wzbudzenie się drgań podharmoniczných. Przykładowo, w przedziale (1.8-1.9) mamy układ siedmiu nieco rozmytych linii (Rys. 5b). W tym przedziale drgania są bardzo zbliżone do drgań podharmoniczných siódmego rzędu, jednak faktycznie są to drgania prawie okresowe. Zjawisko synchronizacji drgań obserwuje się praktycznie tylko dla wybranych częstości, a okres wzbudzanych drgań jest często wielokrotnie większy od okresu wymuszenia. Taka sytuacja ma miejsce np. dla  $\omega \approx 0.6$  (drgania typu 1:15),  $\omega \approx 1.11$  (1:17) lub dla  $\omega \approx 1.275$  (1:18). Dla innych częstości wymuszenia diagramy są podobne, największe różnice ujawniają się dla częstości bliskich częstości rezonansowej układu (częstości cyklu granicznego). Wtedy także zmienia się nieco przebieg drgań (rys. 6b dla  $\nu=1$ ). Drgania prawie okresowe są tu złożeniem dwóch drgań harmoniczných o częstościach  $\omega_1=1$  i  $\omega_2 \approx 1.02$  i prawie jednakowych amplitudach.



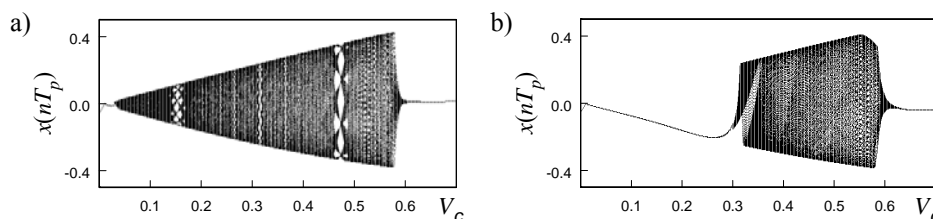
Rysunek 6: Przebiegi przemieszczeń, trajektorie fazowe i stroboskopowe, widma ( $\omega=0.7$ ,  $e=0.1$ ,  $c_0=0.05$ ): a)  $\nu=0.9$ , b)  $\nu=1$

Parametrem, wpływającym istotnie na proces toczenia jest prędkość skrawania  $V_c$ . Wartości obu składowych siły skrawania zależą od parametrów  $V_{x0}$  i  $V_{y0}$  ( $V_{y0}=V_c$ ), a te z kolei zależą od geometrii ostrza oraz prędkości kątowej toczzonego elementu, a więc są ze sobą liniowo związane. W obliczeniach założono, że zachodzi związek  $V_{y0}=\gamma V_{x0}$  (przyjęto  $\gamma=0.7$ ). Wpływ parametrów  $V_c$  oraz  $c_0$  na wskaźnik jakości (wartość skuteczną prędkości) ilustruje Rys. 7. Dla częstotliwości  $\omega=0.57$  (Rys. 7a), w przeciwieństwie do przypadku  $\omega=0.45$  (Rys. 7b), duży wpływ na rezultaty ma efekt regeneracyjny. Ograniczenie prawostronnie obszarów podwyższonego poziomu drgań jest tu przesunięte w kierunku większych prędkości skrawania. Istnieje więc pewna graniczna wartość  $V_c$ , praktycznie niezależna od oporów skrawania (od parametru  $c_0$ ), powyżej której proces toczenia przebiega prawidłowo (bez drgań).



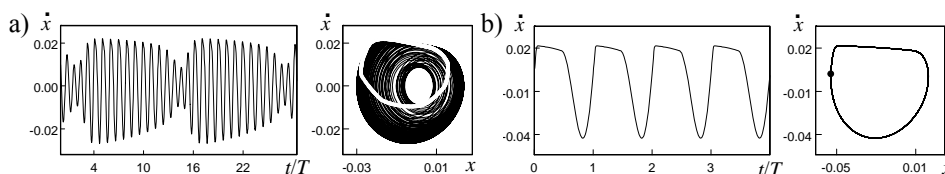
Rysunek 7: Wpływ  $V_c$  i  $c_0$  na wskaźnik jakości: a)  $\omega=0.57$ ,  $\tau_0 \approx 11$ , b)  $\omega=0.45$ ,  $\tau_0 \approx 14$

Rys. 8 przedstawia diagramy bifurkacyjne, sporządzone z uwzględnieniem wpływu wymuszenia parametrycznego. Wnioski, wynikające z analizy tych diagramów, są podobne do omówionych wcześniej (Rys. 5). W zakresach częstotliwości (0.03, 0.6) – Rys. 8a i (0.3, 0.6) – Rys. 8b dominują drgania prawie okresowe, przy czym wartości maksymalne przemieszczeń zależą liniowo od prędkości skrawania. Dla większych wartości prędkości skrawania drgania są zbliżone do drgań harmoniczných.



Rysunek 8: Diagramy bifurkacyjne – wpływ  $V_c$  ( $\omega=0.57$ ,  $c_0=0.05$ ,  $e=0.1$ ): a)  $\nu=0.9$ , b)  $\nu=1$

Bardziej interesujące jest zachowanie się układu dla małych wartości  $V_c$  (Rys. 9). Część trajektorii fazowych stanowi odcinek prawie poziomy czyli drgający element przemieszcza się w pewnym przedziale czasu w przybliżeniu ze stałą prędkością. Podobna sytuacja zachodzi dla większych wartości parametru  $c_0$ . Jest to tzw. efekt „stick-slip”. Lepszą interpretację zjawiska „stick-slip” uzyskuje się, badając model dwuwymiarowy, czyli układ o dwóch stopniach swobody. Trajektorie na obu płaszczyznach fazowych zawierają odcinki poziome, przy czym składowa prędkości w kierunku  $y$  jest praktycznie równa prędkości skrawania. Taki ten oznacza, że wiór porusza się z prędkością skrawania lub inaczej mówiąc wiór chwilowo „przykleja” się do ostrza narzędzia – stąd wynika angielska nazwa tego zjawiska.



Rysunek 9: Przebiegi prędkości, trajektorie fazowe i portrety stroboskopowe ( $\omega=0.57$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ,  $V_c=0.04$ ): a)  $c_0=0.05$ , b)  $c_0=0.2$

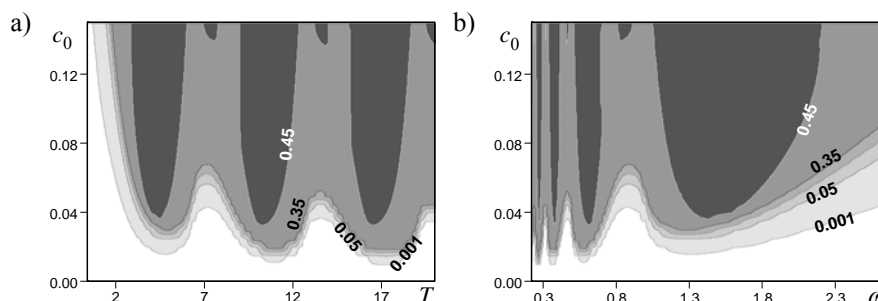
#### 4. ANALIZA MODELU DWUWYMIAROWEGO

Analizę modelu dwuwymiarowego rozpoczniemy od pewnych porównań, badając wpływ efektu regeneracyjnego. Wskaźnik jakości został tu zdefiniowany jako wartość skuteczna wypadkowej prędkości drgań.

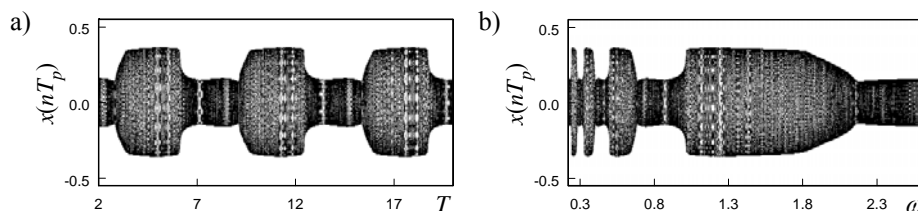
Rezultaty, przedstawione na Rys. 10, odpowiadają pokazanym wcześniej na Rys. 4. Także diagramy bifurkacyjne (Rys. 11) zostały sporządzone podobnie, jak diagramy na Rys. 5. Można zauważyć duże analogie, zwłaszcza w przypadku badania wpływu parametrów  $T$ ,  $\omega$  i  $c_0$  na wskaźnik jakości. Wprawdzie z drganiami zanikającymi mamy teraz do czynienia tylko w przypadku dostatecznie małych wartości parametru  $c_0$ , jednak w obszarach, odpowiadających wcześniej stabilnym położeniom równowagi (Rys. 4), amplitudy drgań są zdecydowanie mniejsze niż w pozostałych obszarach.

Pokazane na Rys. 11 diagramy, sporządzone dla  $c_0=0.05$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ , ilustrują prędkości obrotowej. W analizowanych zakresach parametru  $T=2\pi/\omega$  (Rys. 11a) lub  $\omega$  (Rys. 11b) dominują drgania prawie okresowe. Obwiednie obszarów na diagramach informują o wartości maksymalnych i minimalnych przemieszczeń. Na diagramach są widoczne zakresy parametru  $T$  lub  $\omega$ , w których ograniczenia amplitud drgań są zdecydowanie różne. Drgania





Rysunek 10: Wpływ efektu regeneracyjnego na wskaźnik jakości: a) płaszczyzna  $(T, c_0)$ , b) płaszczyzna  $(\omega, c_0)$



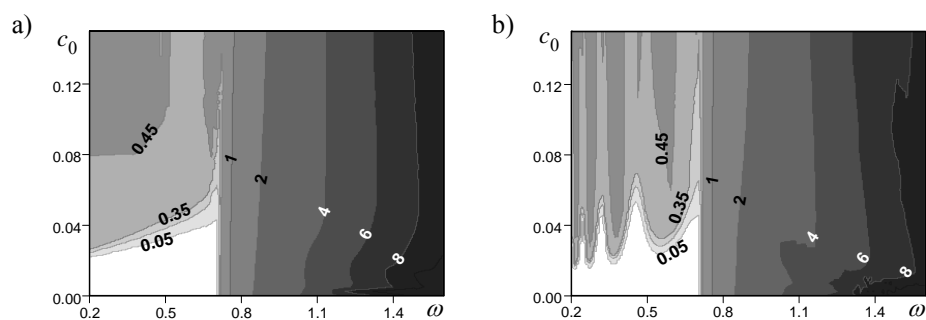
Rysunek 11: Diagramy bifurkacyjne ( $c_0=0.05$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ): a) wpływ  $T$ , b) wpływ  $\omega$

prawie okresowe o mniejszych amplitudach wzbudają się w tych zakresach analizowanego parametru, w których wcześniej (Rys. 5) występowały drgania okresowe.

Podobnie, jak poprzednio, największe zmiany jakościowe diagramów mają miejsce dla częstości  $\omega$ , bliskiej częstości rezonansowej.

Rys. 12 przedstawia zależność wskaźnika jakości od parametrów  $\omega$  i  $c_0$ . Pokazuje on wpływ wymuszenia bezwładnościowego z pominięciem (Rys. 12a) oraz z uwzględnieniem (Rys. 12b) efektu regeneracyjnego. Największe różnice występują w zakresie niskich częstości (mniejszych od 0.7). W tym zakresie częstości wpływ efektów regeneracyjnych na wskaźnik jakości jest podobny do pokazanego na Rys. 10b. W układzie samowzbudnym poddanym działaniu wymuszeń bezwładnościowych wzbudają się najczęściej drgania prawie okresowe, znacznie rzadziej mamy do czynienia z drganiami okresowymi czyli ze zjawiskiem synchronizacji drgań. Ze wzrostem częstości uwidacznia się coraz bardziej wpływ wymuszenia bezwładnościowego. Amplitudy drgań są znaczne w odniesieniu do założonej głębokości skrawania. Pewien wpływ na rezultaty obliczeń ma tu parametr  $\varepsilon$ .

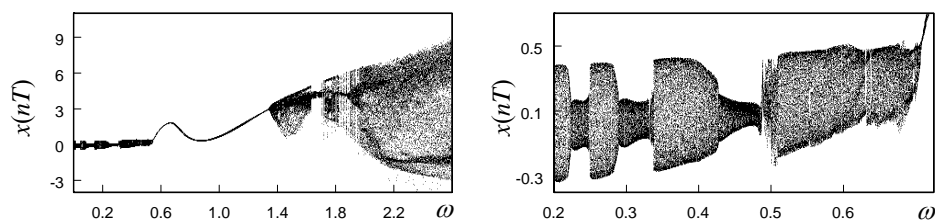
Charakter drgań staje się bardziej złożony w przypadku równoczesnego działania na układ samowzbudny wymuszeń bezwładnościowych oraz kinematycznych (skrawanie po śladzie, uwzględnienie profilu powierzchni ukształtowanego w procesie zgrubnego skrawania). W ogólnym przypadku stosunek częstości tych wymuszeń jest liczbą niewymierną. Ten fakt przemawia za wzbudzaniem się drgań prawie okresowych. Dodatkowo istotny wpływ na drgania ma częstość układu samowzbudnego bez wymuszenia, co wpływa na bardziej złożony charakter drgań prawie okresowych. Dla większych prędkości kątowych toczzonego przedmiotu zwiększają się siły bezwładności, czego rezultatem są zazwyczaj drgania o większych



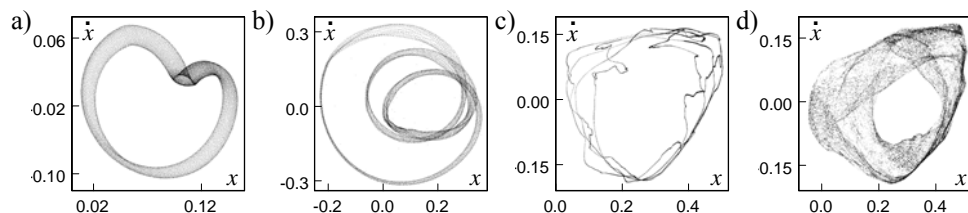
Rysunek 12: Wpływ parametrów  $\omega$  i  $c_0$  na wskaźnik jakości: a) wymuszenie bezwładnościowe, b) wymuszenie bezwładnościowe i efekt regeneracyjny

amplitudach. Większy jest też wpływ nieliniowych charakterystyk układu, co zwiększa prawdopodobieństwo wzbudzenia się drgań chaotycznych.

Przedstawiony na Rys. 13 diagram bifurkacyjny oraz jego wybrany fragment uwzględnia oba wymuszenia. Pomimo, że przy sporządzaniu diagramu przyjęto jako częstość próbkowania  $\omega$  (poprzednio  $\nu$ ) jego fragment w zakresie  $\omega$  (0.2, 0.7) przypomina odpowiedni fragment diagramu przedstawionego na Rys. 11b. Wpływ wymuszenia bezwładnościowego uwiadczenia tu się bardziej w przedziale (0.5, 0.7) – w tym przedziale obwiednie obszarów są mniej regularne. Dla częstości bliskich wartości 0.5 mamy do czynienia z interesującymi typami drgań prawie okresowych (Rys. 14a,b), a w pobliżu wartości 0.7 drgania prawie okresowe (Rys. 14c) przechodzą w chaotyczne (Rys. 14d).



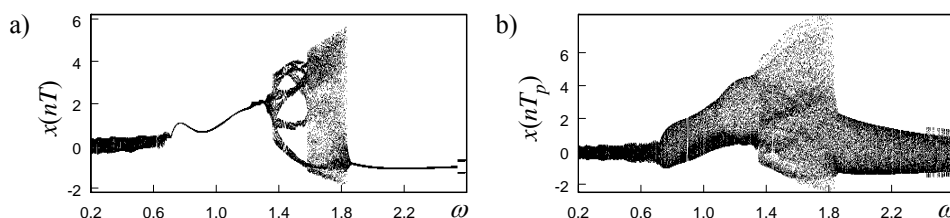
Rysunek 13: Diagram bifurkacyjny ( $c_0=0.05$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ )



Rysunek 14: Mapy Poincarégo ( $c_0=0.05$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ): a)  $\omega=0.47$ , b)  $\omega=0.51$ , c)  $\omega=0.677$ , d)  $\omega=0.6805$

Dla częstotści większych od 1.4 przeważają drgania chaotyczne. Przebiegi drgań, trajektorie fazowe i ich portrety stroboskopowe zmieniają nieznacznie ze wzrostem częstotści  $\omega$  i są podobne do przedstawionych na Rys. 17d i Rys. 18 dla  $\omega=1.71$  i  $c_0=0.2$ .

Ze wzrostem  $c_0$  zakresy drgań chaotycznych przesuwają w kierunku mniejszych częstotści, zmienia się także ich charakter. Fakt ten ilustruje diagram, przedstawiony na Rys. 15. W obliczeniach przyjęto  $c_0=0.2$ . Diagram sporządzono dwoma metodami, notując wartości przemieszczeń co okres  $T=2\pi/\omega$  (Rys. 7.26a) oraz  $T_p=2\pi/\nu$  (Rys. 15b).



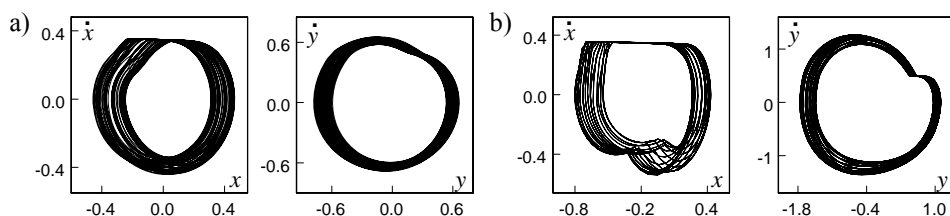
Rysunek 15: Diagram bifurkacyjny ( $c_0=0.2$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ): a) okres próbkowania  $T$ , b) okres próbkowania  $T_p$

W przypadku działania na układ dwóch wymuszeń okresowych występuje problem wyboru jednej z częstotści tych wymuszeń, jako częstotści próbkowania. Jak wynika z obserwacji diagramów (Rys. 15) sposób próbkowania ma duży wpływ na końcowe rezultaty.

W rozważanym przypadku bardziej wyrazisty diagram otrzymuje się przy próbkowaniu z częstotścią wymuszenia bezwładnościowego. W zakresie częstotści (0.7, 1.3) oraz (1.85, 2.54) na diagramie (Rys. 15a) jest widoczna pojedyncza, nieco rozmyta, linia. Okazuje się, że mamy tu do czynienia z drganiami prawie okresowymi o nieznacznie zmieniającej się amplitudzie – z punktu widzenia praktycznego są to drgania okresowe z częstotścią wymuszenia bezwładnościowego. Z analizy diagramu, pokazanego na Rys. 15b, nie uzyskuje się powyższej informacji o charakterze ruchu.

Jako kryterium wyboru częstotści próbkowania można więc przyjąć warunek, aby punkty stroboskopowe wypełniały jak najmniejszy obszar diagramu lub płaszczyzny fazowej przy sporządzaniu mapy Poincarégo.

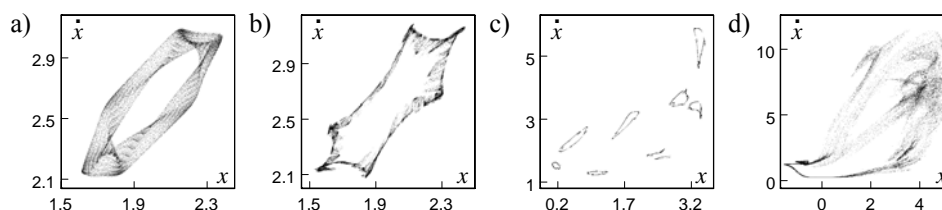
Powróćmy do omówienia diagramów pokazanych na Rys. 15. W zakresie niskich częstotści (dla  $\omega < 0.7$ ) mamy do czynienia z drganiami prawie okresowymi lub podharmonicznymi wysokiego rzędu. Przebiegi czasowe są tu mniej interesujące, znacznie ciekawsze są trajektorie fazowe w porównaniu do przypadku  $c_0=0.05$ . Uwidacznia się zjawisko „stick-slip”.



Rysunek 16: Trajektorie fazowe ( $\omega=0.35$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ): a)  $c_0=0.2$ , drgania prawie okresowe, b)  $c_0=0.8$ , drgania podharmoniczne 1:7

Trajektorie fazowe, które dla małych wartości  $c_0$  są zbliżone do elips, ze wzrostem  $c_0$  zmieniają wyraźnie swój kształt, a pewne ich odcinki przechodzą w odcinki poziome (Rys. 16). Podobna sytuacja miała miejsce w przypadku badania modelu jednowymiarowego (Rys. 9).

Dla częstości z przedziału (1.3, 1.85) wzbudzają drgania prawie okresowe o bardziej złożonym charakterze lub drgania chaotyczne. Rys. 17 przedstawia dla wybranych wartości  $\omega$  portrety stroboskopowe w płaszczyźnie  $(x, \dot{x})$ .



Rysunek 17: Mapy Poincarégo ( $c_0=0.2$ ,  $\nu=0.9$ ,  $e=0.1$ ): a)  $\omega=1.33$ , b)  $\omega=1.337$ , c)  $\omega=1.39$ , d)  $\omega=1.71$

## 5. PODSUMOWANIE

Szczegółowe wnioski były sukcesywnie wyciągane w trakcie omawiania rezultatów analiz numerycznych. Podsumowując rozważania, dotyczące analizy procesu toczenia, można stwierdzić, że proponowany model, pozwala w sposób efektywny szacować wartości parametrów skrawania, zapewniające dostatecznie mały poziom drgań oraz odpowiednią gładkość obrabianej powierzchni. Model układu jest też interesujący z punktu widzenia poznawczego głównie z uwagi na ciekawe typy drgań prawie okresowych i chaotycznych, nie występujące w innych nieliniowych układach.

## LITERATURA

- [1] I. Grabec, Chaotic Dynamics in the Cutting Process, *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, **28**, 19-32, 1998.
- [2] J. Gradišek, E. Govekar, I. Grabec, Chatter onset in non-regenerative cutting: A numerical study, *Journal of Sound and Vibration*, **242**, 5, 829-838, 2001.
- [3] S. Karube, W. Hoshino, T. Soutome, K. Sato, The non-linear phenomena in vibration cutting system. The establishment of dynamic model, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **37**, 541-564, 2002.
- [4] G. Litak, Chaotic Vibrations in a Regenerative Cutting Process, *Chaos Solitons & Fractals*, **13**, 1531-1535, 2002.
- [5] J. Łuczko, Metody numeryczne wyznaczania zakresów drgań podharmonicznych i chaotycznych, *Czasopismo Techniczne, Z.* **11-M**, 39-62, 2006.
- [6] R. Rusinek, J. Warmiński, K. Szabelski, *Drgania nieliniowe w procesie skrawania toczaniem*, Lublin 2006.
- [7] S. Smith, J. Tlustý, Current Trends in High Speed Machining, *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, **119**, 664-666, 1997.

## **IDENTYFIKACJA CECH DYNAMICZNYCH WYSOKICH BUDYNKÓW PODLEGAJACYCH WSTRZĄSOM GÓRNICZYM**

**Edward Maciąg, Jarosław Chelmecki**

Politechnika Krakowska, Instytut Mechaniki Budowli  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: maciag@limba.wil.pk.edu.pl

---

**Abstract:** *The report refers to the identification of dynamic properties of tall buildings subjected to mining tremors. Taking into consideration the theoretical analysis from [2], the identification of natural frequencies of 2 high buildings (12 story) subjected to strong and very strong mining tremors was carried out for the buildings on flexible ground and with the assumption of non flexible ground. The amplitude Fourier Spectra from measured vibrations of 12th story and the building foundation and the ration of these spectra were analyzed. The ground deformation during the building motion caused by rockbursts decreases natural building frequencies in the insignificant degree.*

---

### **1. WSTĘP**

Zjawisko współpracy konstrukcji i podłoża gruntowego na działania sejsmiczne i parasejsmiczne wynikające z wzajemnego oddziaływania układu konstrukcja – podłoże nosi nazwę interakcji dynamicznej. Interakcja grunt-budynki, SSI (soil-structure interaction), może mieć znaczący wpływ na sejsmiczne odpowiedzi budynków posadowionych na słabym gruncie. Jeśli nie ma SSI, budynek może być zidentyfikowany poprzez przebiegi drgań fundamentów traktowanych jako wejście, a przebiegi drgań górnej kondygnacji jako wyjście i nie ma wówczas sprzężenia między wejściem i wyjściem. Wtedy budynek może być przyjęty jako oparty na niepodatnym podłożu i przebiegi drgań rejestrowane na fundamencie budynku można traktować jako wymuszenie kinematyczne. Ruch górnych kondygnacji budynku wpływa na ruch fundamentu, tj. wejście i wyjście układu są sprzężone. Kwestia wykrycia i identyfikacji interakcji układu budynek-podłoże na podstawie zarejestrowanych drgań była badana w znaczących pracach [1÷5]. Również pierwszy z autorów referatu zajmował się tą problematyką [6÷9]. Niniejszy referat dotyczy identyfikacji cech dynamicznych dwu wysokich budynków, na podstawie ich badań w trakcie podlegania wstrząsom górniczym. Identyfikację ich cech dynamicznych przeprowadza się poprzez ocenę stopnia interakcji układu wysoki budynek – podłoże gruntowe podlegającego drganiom wzbudzonym wstrząsami górniczymi. Przez stopień SSI rozumie się różnicę między podstawowymi częstotliwościami rezonansowymi budynku w trakcie jego ruchu powodującego deformacje podłoża, a tymi częstotliwościami budynku, gdy ich podłoże nie doznaje deformacji. Do wyznaczenia tych

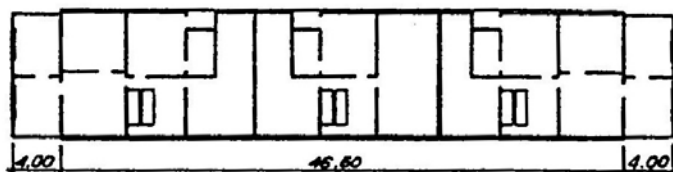
różnic, co sprowadza się do określenia częstotliwości rezonansowych budynku z udziałem SSI i bez niej, wykorzystuje się przebiegi drgań zarejestrowane jednocześnie w poziomie fundamentu i górnej kondygnacji budynku w trakcie wstrząsu górniczego (por. [2]). Podjęto też próbę określenia różnic między drugimi częstotliwościami rezonansowymi budynków w trakcie ich ruchu powodującego deformację podłoża pod budynkiem, a tymi częstotliwościami budynków, gdy ich podłoże nie doznaje deformacji. Do wyznaczenia tych różnic, wykorzystuje się przebiegi drgań zarejestrowane jednocześnie w poziomie fundamentu i górnej kondygnacji budynku (11 piętro), jak również drgania fundamentu i czwartej kondygnacji, bowiem na tej wysokości, w badanych 12 kondygnacyjnych budynkach, składowe ich drgań z drugą częstotliwością rezonansową, od wstrząsów górniczych, wykazują największe amplitudy.

## 2. OPIS BADANYCH BUDYNKÓW I PRZEPROWADZONYCH POMIARÓW DRGAŃ

Budynek nr 1 (w Polkowicach w LGOM przy ul. Miedzianej) jest obiektem 12 kondygnacyjnym wykonanym w technologii wielkopłytowej i składa się z dwu oddzielnych części: jedno i dwukłapkowej. Wysokość kondygnacji wynosi 2,7 m. Układ ścian nośnych mieszany, poprzeczno podłużny. Obie części są w całości podpiwniczone posadowione na ławach fundamentowych. Stropy wykonano z płyt żelbetowych, pełnych o grubości 15 cm. Pokrycie dachu stanowią płyty panwiowe. Budynek ma wzmocnienia zrealizowane poprzez wprowadzenie dodatkowych, przylegających do ścian szczytowych, przeseł wykonanych w technologii betonu monolitycznego. Wzmocnienia sięgają: w części jednokłapkowej do poziomu 7 kondygnacji, a w części dwukłapkowej do 10 kondygnacji. Rzut poziomy budynku i jego przekrój pokazano odpowiednio na Rys. 1 i 2.

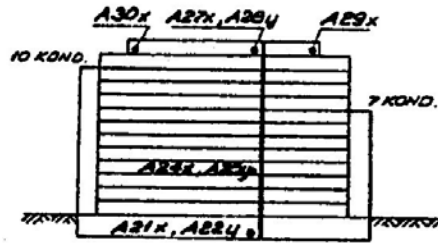
Pierwotna konstrukcja budynku Nr 2 (w Polkowicach w LGOM przy ul. Ratowników) była taka sama jak konstrukcja budynku Nr 1 przed jego wzmocnieniem. Budynek Nr 2 wzmocniono (na przełomie 89/90 r. ub.w.) poprzez jego zmonolitowanie żelbetowymi pasami obwodowymi i pogrubieniem niektórych ścian nośnych (przy ścianach szczytowych).

Mierzono składowe poziome drgań budynku, odpowiednio w kierunku osi poprzecznej budynku (oś x) oraz osi podłużnej – oś y.



Rysunek 1: Rzut poziomy budynku Nr 1

Na Rys 2 pokazano rozmieszczenie akcelerometrów. W budynku Nr 2 akcelerometry rozmieszczone były podobnie, z tym że na najwyższej kondygnacji (11 p.) były tylko 2 czujniki mierzące składowe x i y. W sąsiedztwie budynku Nr 1, w odległości 6,0 m, znajduje się stanowisko pomiarowe, składające się z trójskładowego akcelerometru służącego do pomiaru trzech składowych drgań gruntu (poziomych x i y oraz pionowych z).

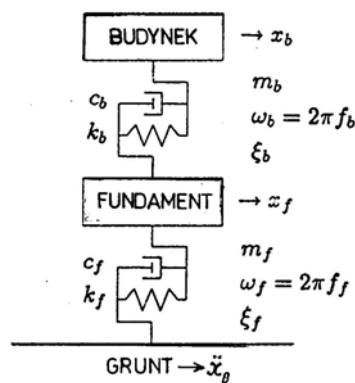


Rysunek 2: Przebieg i rozmieszczenie aparatury (budynek Nr 1)

Źródłem drgań budynków są wstrząsy górnicze będące skutkiem gwałtownego pęknięcia skał w górotworze w wyniku podziemnej eksploatacji rudy miedzi. W rejonie Polkowic zdarzają się najsilniejsze wstrząsy górnicze, nawet o energii  $E_n=1,9E9$  J, wzbudzające wyjątkowo intensywne drgania powierzchniowe, niejednokrotnie powodujące wiele uszkodzeń budynków.

### 3. WPLYW INTERAKCJI UKŁADU GRUNT-BUDYNEK NA CZĘSTOTLIWOŚCI DRGAŃ BUDYNKU

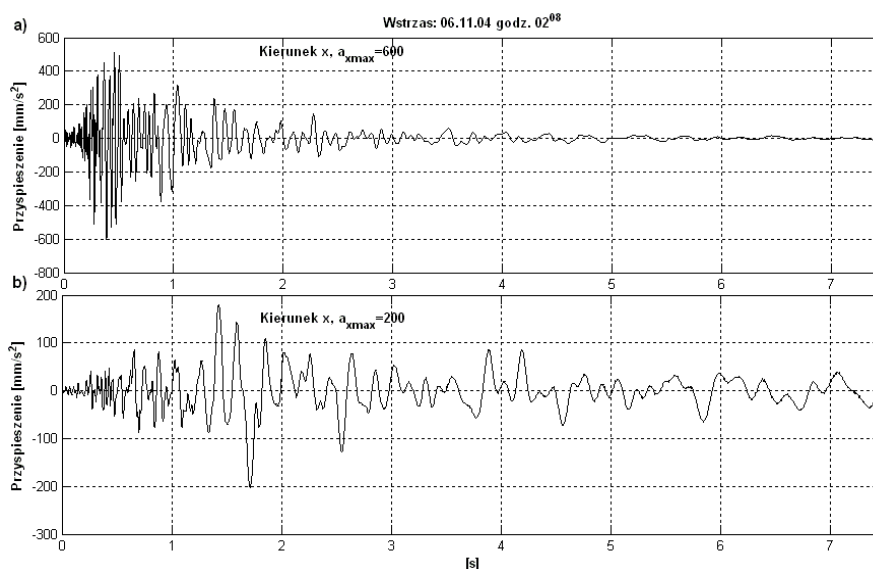
Przez identyfikację cech dynamicznych budynku rozumie się tu wykrywanie różnic między dynamicznymi charakterystykami budynku posadowionego na odkształcającym się podłożu w czasie drgań budynku, a tymi charakterystykami budynku posadowionym na niepodatnym podłożu, na podstawie pomierzonych przebiegów drgań fundamentu i górnej kondygnacji budynku na deformującym się podłożu. W omawianym przypadku chodzi o podstawowe i drugie częstotliwości rezonansowe budynków. Aby określić skutki SSI na częstotliwościową zawartość zarejestrowanych przyspieszeń drgań budynku, Şafak w [2] analizuje częstotliwościowe funkcje odpowiedzi  $H_f$  i  $H_b$  prostego dwumasowego układu (jak na Rys 3) o dwu stopniach swobody, podlegającego kinematycznie wymuszonym drganiom poprzez podłoże.



Rysunek 3: Model Şafaka [2]

Z analizy układu jak na Rys. 3 wynika, że podstawowa częstotliwość drgań układu z SSI jest zawsze mniejsza niż ta częstotliwość układu na niepodatnym podłożu, czego należało się spodziewać. Ponieważ SSI wpływa na zmianę częstotliwościowych charakterystyk przebiegów drgań konstrukcji, ważne jest sprawdzenie, przed analizą zarejestrowanych przebiegów drgań obiektu, czy podlega on SSI. W przypadku jednocześnie pomierzonych przyspieszeń drgań gruntu (obok budynku) i fundamentu budynku z porównania przebiegów tych drgań i ich charakterystyk częstotliwościowych np. poprzez przyspieszeniowe spektrum odpowiedzi, wnioskuje się o wystąpieniu SSI, czy też nie.

Na Rys. 4a i b pokazano składowe poziome drgań, jednocześnie pomierzone na gruncie i na fundamencie budynku przy ul. Miedzianej, od bardzo silnego wstrząsu górniczego. Porównując przebiegi drgań gruntu i fundamentu z Rys. 4a i 4b, widać że ten pierwszy przebieg drgań (Rys.4a) zawiera wyższe dominujące częstotliwości drgań niż ten drugi; budynek dla składowych poziomych drgań stanowi filtr dolnoprzepustowy.  $A_{gmax}$  jest ponad 3 razy większa niż  $a_{bmax}$  (por. maksymalne amplitudy drgań z Rys. 4a i 4b).

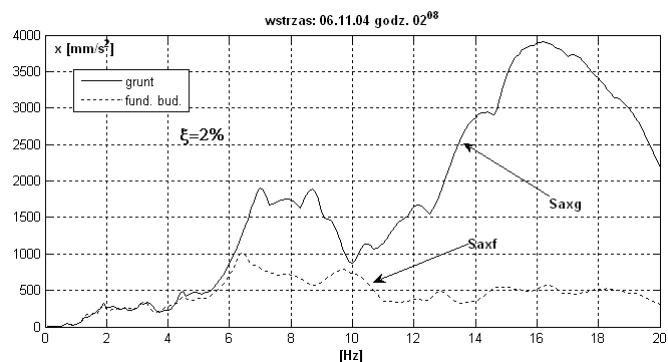


Rysunek 4: Drgania gruntu (a) i fundamentu budynku Nr 1 (b)

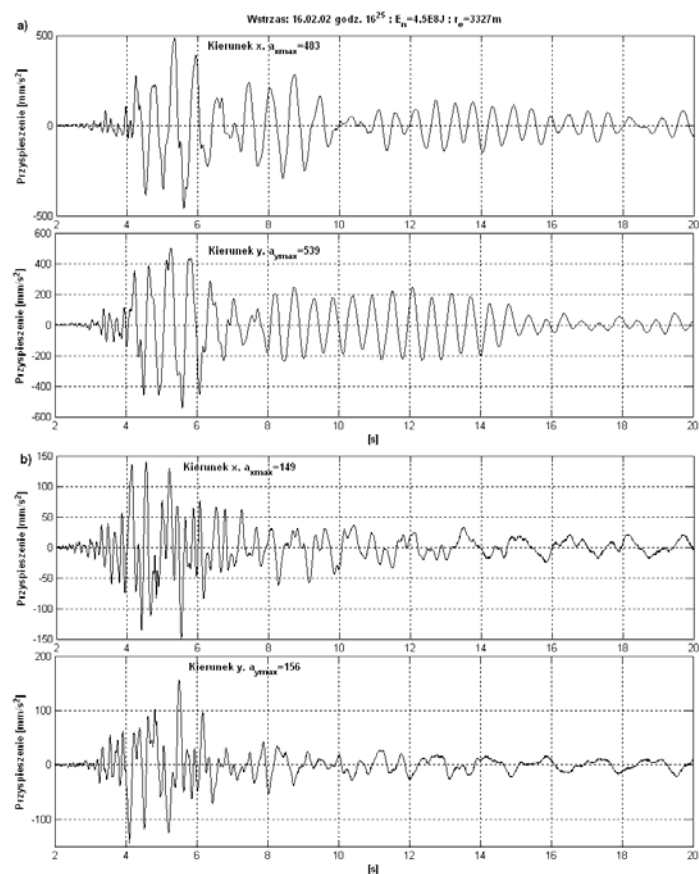
Z kolei na Rys. 5 pokazano przyspieszeniowe spektra odpowiedzi wykonane na podstawie drgań z Rys. 4a i b. Rys. 5 wskazuje, że spektrum odpowiedzi wykonane na podstawie drgań fundamentu budynku jest dużo mniejsze, prawie w całym zakresie rozpatrywanych częstotliwości niż na podstawie drgań gruntu. Drgania fundamentu nie mogą tu być traktowane jako wejście (wymuszenie), lecz jako reakcja na wymuszenie drgań z gruntu. Tak więc w tym przypadku ma miejsce SSI.

Z analizy zachowania się modelu z Rys. 3 przeprowadzonej w [2], wynika że bezwzględna wartość stosunku odpowiedzi górnej do dolnej części układu  $|R|$ , opisuje charakterystyki obiektu na sztywnym podłożu.  $|R|$  może być obliczane jako stosunek amplitudowego widma





Rysunek 5: Przyspieszeniowe spektra odpowiedzi drgań z Rys. 4;  $S_{af}$ -gruntu.  $S_{ab}$ -fundamentu budynku

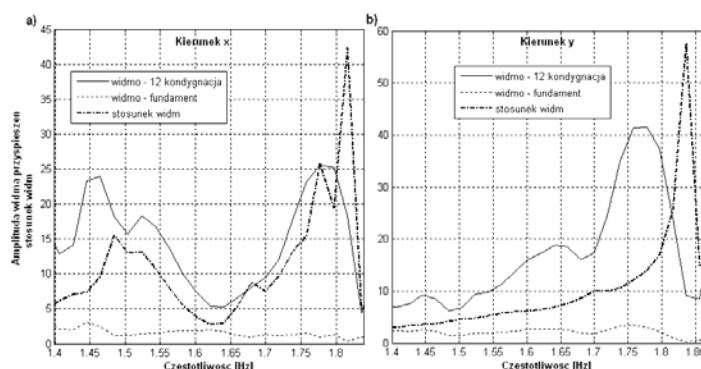


Rysunek 6: Drgania górnej kondygnacji (a) i fundamentu budynku Nr 1 (b)

Fouriera przyspieszenia drgań górnej kondygnacji budynku do przyspieszenia drgań fundamentu. Tak określona wielkość bywa nazywana funkcją transformacji. Dominujący „pik” tego stosunku określa podstawową częstotliwość drgań budynku na niepodatnym podłożu. W zależności od stopnia SSI, dominujące częstotliwości drgań budynku mogą być istotnie różne od tych jakie miałby budynek na niepodatnym podłożu.

Dnia 16.02.02 zdarzył się bardzo silny wstrząs górniczy w filarze ochronnym Polkowice, o energii  $E_n = 4,5E8J$  i odległości epicentralnej  $r_e = 3327m$ . Na Rys 6a i b pokazane są zarejestrowane przyspieszenia drgań górnej kondygnacji budynku (11 piętro) i jego fundamentu odpowiednio w kierunku x (osi poprzecznej) i y (osi podłużnej) budynku od ww. wstrząsu.

Z kolei na Rys. 7a i b pokazane są amplitudowe widma przyspieszeń drgań (przeskalowane) 12 kondygnacji i fundamentu budynku oraz stosunek amplitudowych widm przyspieszeń drgań ( $|R|$ ) 12 kondygnacji i fundamentu budynku, odpowiednio w kierunku x i y. Na podstawie krzywej reprezentującej amplitudowe widmo drgań 12 kondygnacji budynku w kierunku osi poprzecznej x (Rys.7a), wyznaczono podstawowe częstotliwości rezonansowe drgań budynku na podatnym podłożu, odpowiadające „pikowym” wartościom ww. krzywej. Są to: podstawowa częstotliwość rezonansowa drgań translacyjnych budynku w kierunku osi poprzecznej,  $f_{1x} = 1,46$  Hz oraz podstawowa częstotliwość rezonansowa drgań skrętnych budynku  $f_{1skr} = 1,78$  Hz. Na krzywej wyrażającej stosunek widm (Rys. 7a), „pikowym” wartościom tej krzywej, odpowiadają: podstawowa częstotliwość drgań translacyjnych w kierunku x,  $f_{1xz} = 1,48$  Hz oraz podstawowa częstotliwość drgań skrętnych  $f_{1skrz} = 1,83$  Hz budynku na niepodatnym podłożu.

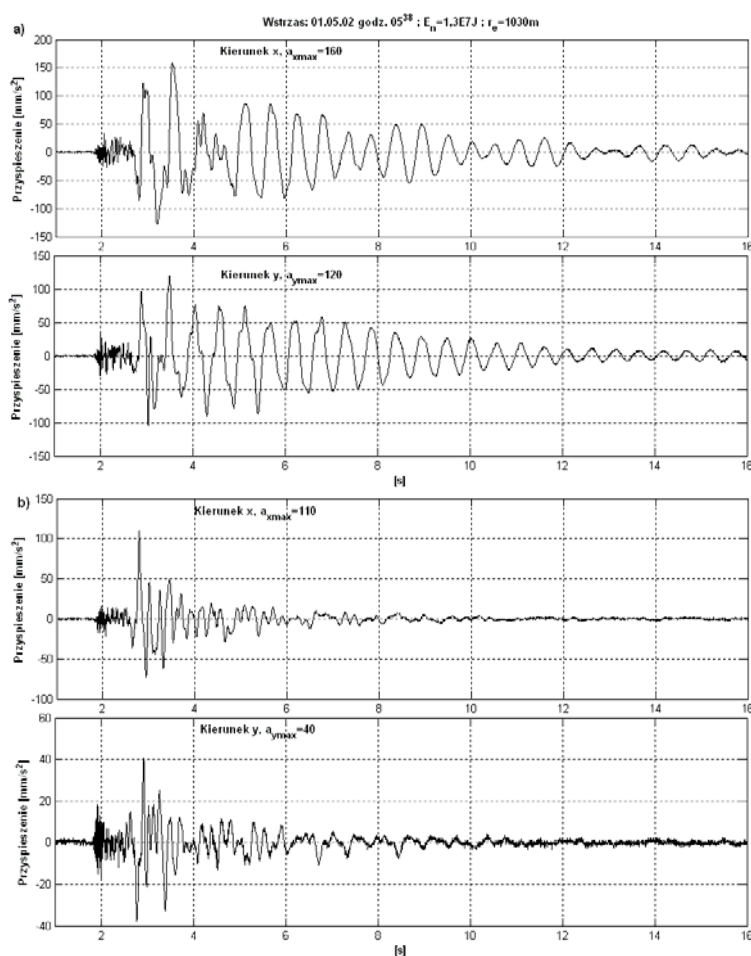


Rysunek 7: Amplitudowe widma przyspieszeń drgań z Rys. 6 (przeskalowane) 12 kondygnacji i fundamentu budynku oraz stosunek tych widm a) kierunek x, b) kierunek y

Z Rys. 7b, na podstawie krzywej amplitudowych widm pomierzonych przyspieszeń drgań górnej kondygnacji w kierunku osi y, odczytano podstawową częstotliwość rezonansową drgań skrętnych budynku na podatnym podłożu,  $f_{1skr} = 1,78$  Hz, oczywiście tę samą wartość jak na podstawie zarejestrowanych drgań w kierunku x. Na podstawie krzywej reprezentującej stosunek amplitudowych widm (Rys. 7b) otrzymano podstawową częstotliwość drgań skrętnych  $f_{1skrz} = 1,83$  Hz (jak wyżej) budynku na nie deformującym się podłożu. Badany budynek (jego część dwuklatkowa) wykazuje „skłonność” do drgań skrętnych. Tylko od nie których wstrząsów pojawiają się drgania translacyjne budynku w kierunku osi po-

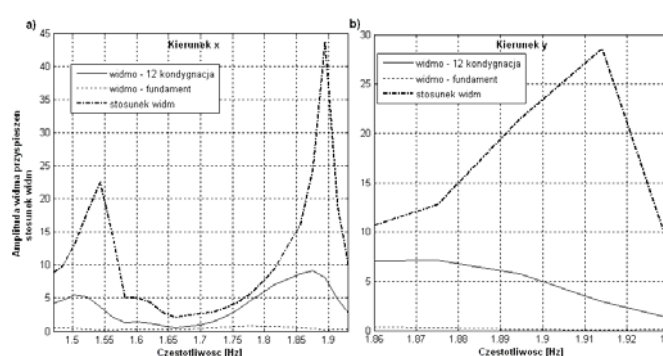
przeczej  $x$ , ich występowanie ustalono na podstawie zarejestrowanych drgań na 12 kondygnacji na obu końcach dwuklatkowej części budynku (przypadek drgań w kierunku  $x$  z tą samą częstotliwością i w tej samej fazie). Odształcalność podłoża w czasie ruchu budynku wywołanego bardzo silnym wstrząsem górniczym obniża podstawowe częstotliwości rezonansowe tego obiektu, w tym przypadku o 0,02 do 0,05 Hz, względem wartości tych częstotliwości w przypadku budynku na niepodatnym podłożu.

Z kolei na Rys. 8a i b pokazano przebiegi drgań górnej kondygnacji i fundamentu badanego budynku od wstrząsu górniczego z dnia 01.05.2002, o energii  $E_n = 1,3E7J$  i odległości epicentralnej  $r_e = 1030m$ .



Rysunek 8: Drgania: a) górnej kondygnacji, b) fundamentu budynku przy ul. Miedzianej

Wstrząs ten wywołał zdecydowanie niższy poziom drgań budynku niż poprzednio omawiany. Wyniki analizy widmowej przebiegów przyspieszeń drgań z Rys. 8a i b, przeprowadzonej tak samo jak poprzednio, przedstawione są na Rys. 9a i b.



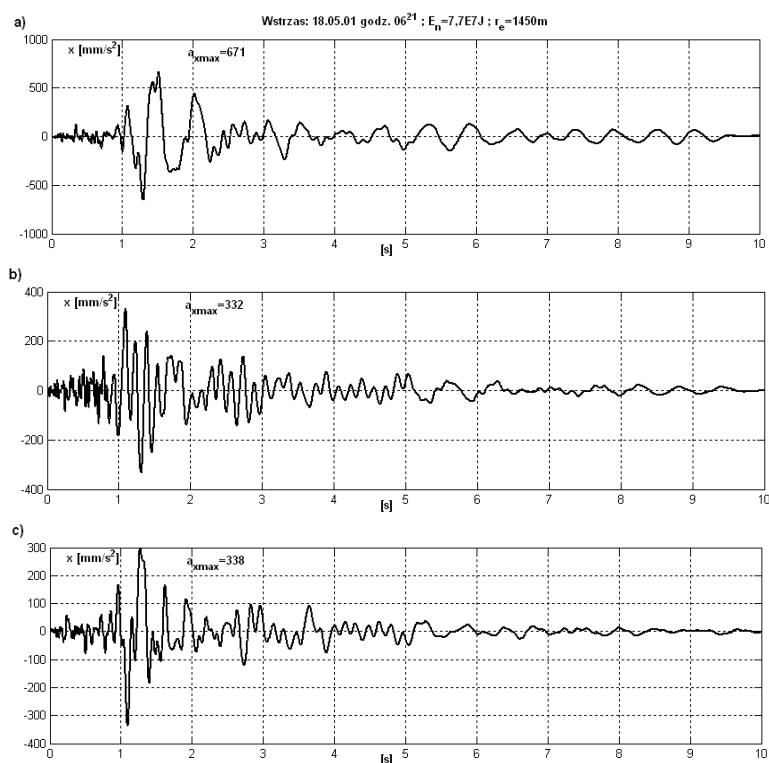
Rysunek 9: Amplitudowe widma drgań z Rys. 8 (przeskalowane) 12 kondygnacji i fundamentu budynku oraz stosunek tych widm; a) kierunek x, b) kierunek y

Podstawowe częstotliwości rezonansowe drgań budynku na deformującym się podłożu wynikające z krzywej reprezentującej amplitudowe widmo drgań 12 kondygnacji budynku w kierunku x, (Rys. 9) wynoszą:  $f_{1x} = 1,50$  Hz i  $f_{1skr} = 1,88$  Hz. Na krzywej wyrażającej stosunek widm (Rys. 9a), „pikowym” wartościom tej krzywej odpowiadają: podstawowa częstotliwość drgań translacyjnych w kierunku osi poprzecznej  $f_{1xz} = 1,54$  Hz oraz podstawowa częstotliwość drgań skrętnych  $f_{1skrz} = 1,90$  Hz budynku na niepodatnym podłożu.

Z Rys. 9b wynika, że podstawowa częstotliwość drgań skrętnych budynku na nie deformującym się podłożu wynosi  $f_{1skrz} = 1,91$  Hz. W tym przypadku podstawowe częstotliwości drgań są nieco wyższe niż wyznaczone poprzednio od wstrząsu z 16.02.02. Należy wnioskować, że w przypadku mniej intensywnych drgań gruntu przekazujących się na budynek, podłoże pod budynkiem w czasie jego ruchu podlega mniejszym deformacjom; jego odpowiedź, szczególnie górnych kondygnacji wynikająca z tej deformacji może być mniejsza, z nieco wyższymi częstotliwościami drgań. Powyższe potwierdzają analizy drgań omawianego budynku od innych wstrząsów.

Podobne analizy pomierzonych drgań tego budynku od kilku silnych i bardzo silnych wstrząsów wykazały, że: podstawowa częstotliwość translacyjnych drgań rezonansowych w kierunku osi poprzecznej x budynku z uwzględnieniem deformacji podłoża, pozostaje w paśmie  $f_{1x} = 1,40 \div 1,56$  Hz, a podstawowa częstotliwość drgań skrętnych  $f_{1skr} = 1,76 \div 1,88$  Hz. Podstawowa częstotliwość drgań budynku przy założeniu braku deformacji podłoża w kierunku x wynosi  $f_{1xz} = 1,45 \div 1,53$  Hz, a drgań skrętnych  $f_{1skrz} = 1,78 \div 1,92$  Hz. Podstawową częstotliwość rezonansową budynku w kierunku osi podłużnej y,  $f_{1y}$ , wyznaczono na podstawie tych fragmentów przebiegu drgań zarejestrowanych w p. k28 (por. Rys. 2), gdy jednocześnie w p. k27, k29 i k30 przebiegi drgań zawierały tylko składowe translacyjne drgań w kierunku osi x z podstawową częstotliwością rezonansową w paśmie  $1,40 \div 1,56$  Hz, co zdarzało się bardzo rzadko. Częstotliwość  $f_{1y}$  pozostaje w paśmie  $2,06 \div 2,17$  Hz.

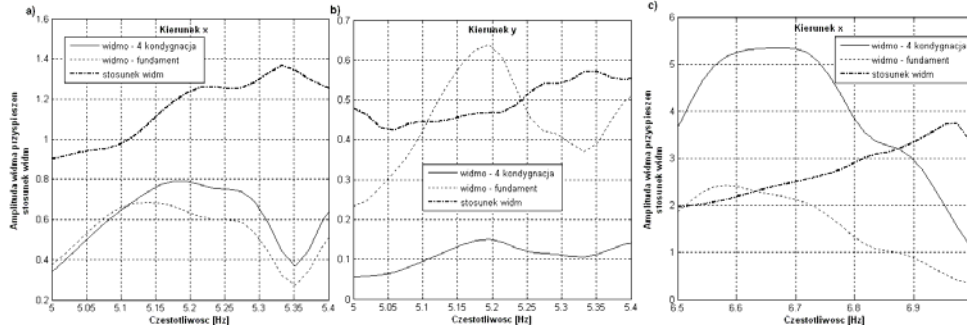
Na Rys. 10 a, b i c pokazano składowe poziome  $x$  drgań 12 i 4 kondygnacji oraz fundamentu budynku przy ul. Miedzianej od wstrząsu z 18.05.01 o energii  $E_n = 7,7E7J$  i odległości epicentralnej 1450 m.



Rysunek 10: Składowe poziome  $x$  drgań: a) 12 kondygnacji, b) 4 kondygnacji, c) fundamentu budynku Nr 1

W przebiegu drgań 4 kondygnacji występują składowe drgań z drugą częstotliwością rezonansową w sposób bardziej wyrazisty niż na kondygnacji 12. Z tego względu dla określenia drugich częstotliwości rezonansowych badanego budynku na deformującym się podłożu w czasie drgań i przy założeniu jego niepodatności wykorzystuje się przebiegi drgań z 4 kondygnacji, zarówno składowe  $x$  jak i  $y$  (tu nie pokazywane).

Na Rys. 11a i b widoczne są amplitudowe widma przyspieszeń drgań (przeskalowane) 4 kondygnacji i fundamentu budynku oraz stosunek amplitudowych widm przyspieszeń drgań 4 kondygnacji i fundamentu budynku, odpowiednio w kierunku  $x$  i  $y$ . Najniższą drugą częstotliwością rezonansową drgań budynku na deformującym się podłożu wynikającą z krzywej reprezentującej amplitudowe widmo drgań 4 (i 12) kondygnacji budynku w kierunku  $x$  (Rys. 11a) jest  $f_{2skr} = 5,19$  Hz; tę samą wartość na  $f_{2skr}$  otrzymuje się z Rys.11b. Z kolei z Rys. 11c otrzymano drugą częstotliwość rezonansową drgań translacyjnych w kie-

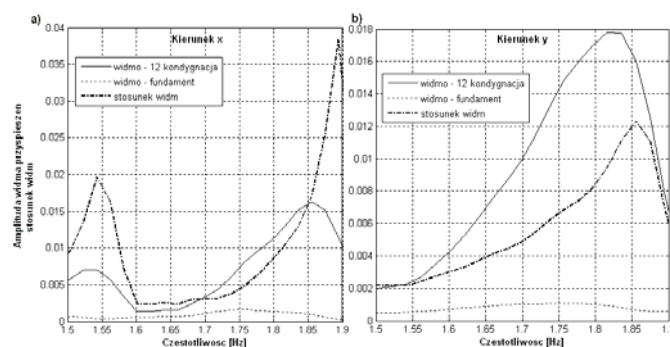


Rysunek 11: Amplitudowe widma drgań (przeskalowane) 4 kondygnacji i fundamentu budynku Nr 1 oraz stosunek tych widm: a) i c) kierunek x, b) kierunek y

runku x (w przypadku deformującego się podłoża),  $f_{2x} = 6,68$  Hz. Kolejność drugich częstotliwości rezonansowych odpowiadających drganiom skrętnym i translacyjnym w kierunku x jest odwrotna niż w przypadku pierwszych częstotliwości.

Na krzywych wyrażających stosunek widm „pikowym” wartościom tych krzywych odpowiadają drugie częstotliwości rezonansowe drgań budynku na nie deformującym się podłożu:  $f_{2skrz} = 5,33$  Hz (rys. 11a i 11b) oraz  $f_{2xz} = 6,97$  Hz. Deformacja podłoża w czasie ruchu budynku wywołanego bardzo silnym wstrząsem górnicyz obniża drugie częstotliwości rezonansowe tego obiektu. W tym przypadku o 0,14 do 0,29 Hz, względem wartości tych częstotliwości w przypadku budynku na nie odkształcającym się podłożu.

Obniżenie drugich częstotliwości jest dużo większe niż pierwszych. Druga częstotliwość skrętnych drgań rezonansowych budynku z uwzględnieniem deformacji podłoża pozostaje w paśmie  $f_{2skr} = 5,11 \div 5,22$  Hz, a drgań translacyjnych w kierunku x,  $f_{2x} = 6,65 \div 7,44$  Hz. W przypadku nie deformującego się podłoża  $f_{2skrz} = 5,13 \div 5,48$  Hz, a drgań translacyjnych w kierunku x,  $f_{2xz} = 6,73 \div 7,48$  Hz. Identyfikację częstotliwości rezonansowych budynku Nr 1 przeprowadzono tu w dużo większym zakresie niż w pracy [9].



Rysunek 12: Amplitudowe widma przyspieszeń drgań (przeskalowane) górnej kondygnacji i fundamentu budynku Nr 2 (przy ul. Ratowników) oraz stosunek tych widm, a) kierunek x, b) kierunek y

Na podstawie pomierzonych drgań 12 kondygnacji i fundamentu budynku przy ul. Ratowników od bardzo silnego wstrząsu z 17.04.04, o energii  $E_n = 1,5 \text{ EJ}$  i odległości epicentralnej  $r_e = 1100 \text{ m}$ , określono podobnie jak poprzednio (por. Rys. 12a i b) podstawowe częstotliwości rezonansowe budynku.

Przy uwzględnieniu deformującego się podłoża, częstotliwości w przypadku drgań translacyjnych w kierunku x pozostają w paśmie  $f_{1x} = 1,47 \div 1,61 \text{ Hz}$ , a drgań skrętnych  $f_{1s} = 1,80 \div 1,97 \text{ Hz}$ . W przypadku nie deformującego się podłoża:  $f_{1x2} = 1,50 \div 1,68 \text{ Hz}$  oraz  $f_{1sz} = 1,85 \div 1,97 \text{ Hz}$ . Ww. pasma częstotliwości rezonansowych są nieco wyższe niż w przypadku budynku przy ul. Miedzianej. Dla budynku przy ul. Ratowników, określono tylko drugą częstotliwość rezonansową drgań translacyjnych w kierunku x:  $f_{2x} = 6,66 \div 7,54 \text{ Hz}$ , a  $f_{2xz} = 6,89 \div 7,68 \text{ Hz}$ . Podane wyżej pasma drugich częstotliwości rezonansowych drgań w kierunku x (budynku Nr 2) są całkiem podobne do wyznaczonych dla budynku Nr 1.

#### 4. WNIOSEK KOŃCOWY

Kierując się pracą [2], na podstawie zarejestrowanych przebiegów przyspieszeń drgań („czuwająca” aparaturą) górnych kondygnacji dwu wysokich budynków (o 12 kondygnacjach) oraz ich fundamentów, wywołanych silnymi wstrząsami górnymi, możliwa jest identyfikacja podstawowych i drugich częstotliwości rezonansowych tych budynków na deformującym się podłożu gruntowym, w czasie ruchu budynków na skutek wstrząsów górnych i przy założeniu niepodatnego podłoża. W zależności od stopnia interakcji układu grunt-budynki w czasie drgań, ma miejsce obniżenie: podstawowych częstotliwości rezonansowych budynków w niewielkim zakresie (aczkolwiek dostrzegalny jest wpływ poziomu drgań budynków na te wielkości), drugich częstotliwości rezonansowych w znacznie większym zakresie.

#### LITERATURA

- [1] Luco J.E., Trifunac M.D., Long H.L., Isolation of soil-structure interaction effects by full-scale forced vibration tests, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**, 1-21, 1988.
- [2] Şafak E., Detection and identification of soil-structure interaction in buildings from vibration recordings, *Journal of Structural Engineering*, 1995, **121** (5), 899-906.
- [3] Çelebi M., Şafak E., Seismic response of Pacific Park Plaza, I: data and preliminary analysis, *Journal of Structural Engineering*, **118** (6), 1547-1565.
- [4] Şafak E., Çelebi M., Recorded seismic response of Pacific Park Plaza, II: system identification, *Journal of Structural Engineering*, **118**, (6), 1566-1589.
- [5] Steward J.P., Fenves G.L., System identification for the evaluating soil-structure interaction effects in building from strong motion recordings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1998, **27**, 869-885.

- [6] Maciąg E., Doświadczalna ocena zmian cech dynamicznych budynków w zależności od sposobu ich posadowienia, *Archives of Civil Engineering*, 1981, **27** (4), 621-634.
- [7] Maciąg E., Experimental evaluation of changes of dynamic properties of buildings on different grounds, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1986, **14**, 925-932.
- [8] Maciąg E., Kuźniar K., The influence of ground flexibility on the fundamental frequencies of natural vibrations of medium – height buildings with load bearing concrete walls, *Archives of Civil Engineering*, 1993, **39** (2), 139-151.
- [9] Maciąg E., Kuźniar K., Chełmecki J., Identyfikacja cech dynamicznych wysokiego budynku na podstawie badań w skali naturalnej, *Problemy Naukowo-Badawcze Budownictwa, t. II: Konstrukcje budowlane i inżynierskie*, Wyd. Politechniki Białostockiej, Białystok 2007, s.495-502.



## **ZASTOSOWANIE ODWRACANYCH MODELI PARAMETRYCZNYCH DO IDENTYFIKACJI SIŁ EKSPLOATACYJNYCH**

**Krzysztof Mendrok**

Akademia Górniczo – Hutnicza, Katedra Robotyki i Mechatroniki  
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków  
e-mail: mendrok@agh.edu.pl

---

**Abstract:** *The paper presents an attempt to identify forces acting on the control unit of a helicopter model during flight. The helicopter model will, according to the project assumptions, operate as an inspection robot i.e. it will autonomously fly in selected regions and monitor them with an embedded camera. It could be used for visual inspection of high masts or chimneys. Autonomous flying requires a sophisticated control system. The control unit is placed in an additional box hung under the fuselage. One of the stages of the unit development was examination of in-flight forces acting on the box and if it was necessary, a vibroinsulation selection. For this reason, an experiment was conducted. During the test, forces in the box suspension and accelerations in selected locations of the object were recorded. Having both, forces and responses in the form of vibrations accelerations, enabled to verify a force identification procedure. It is a procedure based on regressive parametric models inversion. The paper presents this method's description and an attempt to apply it to the described forces identification.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Znajomość sił wymuszających obiekty jest bardzo istotna z punktu widzenia oceny ich stanu technicznego. Współczesne systemy diagnostyczne monitorują warunki pracy maszyny czy urządzenia w sposób ciągły. Bardzo istotnym elementem tych warunków są obciążenia działające na obiekt w czasie jego eksploatacji. Ich znajomość pozwala na określenie przeciążeń, zużycia zmęczeniowego, ułatwia wykrycie uszkodzeń. Znając wartości obciążeń eksploatacyjnych można podjąć próbę sterowania nimi w taki sposób, aby zminimalizować ich wpływ na zużycie zmęczeniowe obiektu. Wreszcie znajomość omawianych obciążeń stanowi istotną wskazówkę na etapie projektowania lub modyfikacji urządzeń. Z drugiej jednak strony pomiar obciążeń działających na obiekt w czasie normalnej jego eksploatacji jest z reguły trudny i skomplikowany, a czasami wręcz niemożliwy. W przypadkach takich można posłużyć się jedną z procedur identyfikacji sił na podstawie sygnału odpowiedzi. Najwygodniejszym i najpopularniejszym sposobem pomiaru odpowiedzi drganiowej układu jest

miar przyspieszeń drgań przy użyciu akcelerometrów piezoelektrycznych. Dlatego znanych jest wiele metod identyfikacji obciążeń na podstawie odpowiedzi układu w postaci przebiegów przyspieszeń drgań. Metody te można podzielić na następujące grupy:

- metody deterministyczne [6, 7, 9-11, 13],
- metody statystyczne [2, 3],
- metody bazujące na sztucznej inteligencji [3, 4, 12].

Metody bazujące na analizie regresji są najczęściej stosowane w podejściu statystycznym do identyfikacji obciążeń [2]. Polegają one na identyfikacji parametrów modelu regresyjnego, który opisuje zależność pomiędzy szukanym obciążeniem a znaną odpowiedzią lub parametrami procesowymi. Z tej grupy metod warto jeszcze wymienić algorytm odwracanego filtra strukturalnego opisany w [5].

Metody, których podstawą jest sztuczna inteligencja, stosuje się, gdy nie ma wystarczających informacji o obiekcie, aby zbudować jego model deterministyczny, lub gdy ten model byłby zbyt złożony i przez to nie nadawał się do obliczeń. Przewagą metod opartych na sztucznej inteligencji nad metodami statystycznymi jest ich przydatność w przypadkach z silnymi nieliniowościami. Również dla przypadków zbyt złożonych, by można je było opisać modelem regresyjnym wybierana jest jedna z technik sztucznej inteligencji. Z tej grupy metod najczęściej stosowane są sztuczne sieci neuronowe [3, 4] i logika rozmyta [4]. Do identyfikacji obciążeń eksploatacyjnych stosuje się też algorytmy genetyczne, ale w połączeniu z innymi technikami [12].

Największą grupą metod wyznaczania obciążeń w oparciu o sygnały odpowiedzi są algorytmy stosujące zależności deterministyczne. Metody te opierają się głównie na rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego zdefiniowanego w następujący sposób: dane są model i sygnał odpowiedzi układu – obciążenie ma zostać zidentyfikowane [1]. Zagadnienie takie może zostać rozwiązane w dziedzinie czasu, częstotliwości lub amplitud.

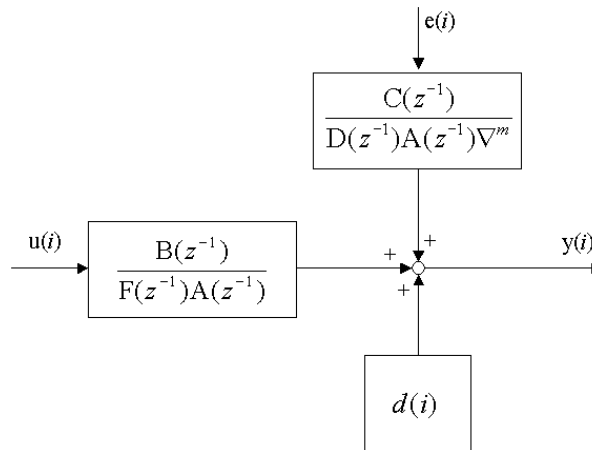
W dziedzinie częstotliwości prawdopodobnie najpopularniejszą metodą identyfikacji obciążeń jest zastosowanie pseudoodwrótej macierzy widmowych funkcji przejścia (WFP). Model układu jest tutaj dany w postaci macierzy WFP, w ogólnym przypadku niekwadratowej. W celu zestawienia macierzy WFP i jej odwrócenia stosuje się wiele różnych technik. Inną metodą realizowaną w dziedzinie częstotliwości jest zastosowanie filtracji modalnej [10, 11]. Filtr modalny to narzędzie do dekompozycji odpowiedzi układu na składowe związane z kolejnymi postaciami drgań własnych poprzez transformację tych odpowiedzi z współrzędnych fizycznych na modalne [10]. Zastosowanie filtru modalnego do identyfikacji obciążeń zawiera się w czterech głównych krokach [11]: transformacja odpowiedzi układu do współrzędnych modalnych, wyznaczenie ilości nieskorelowanych źródeł obciążenia, wskazanie położenia tych źródeł, wyliczenie wartości amplitud obciążeń w każdym ze źródeł.

Metoda pokazana w pracy [7, 19] jest realizowana w dziedzinie czasu. Stosowane są w niej modele układu w postaci regresyjnych modeli parametrycznych takich jak np.: ARMAX. Podstawy tej metody opisane są w następnym rozdziale.

## 2. ALGORYTM IDENTYFIKACJI SIŁ

Jednym ze sposobów modelowania układów dynamicznych jest stosowanie regresyjnych modeli parametrycznych. Regresyjne modele parametryczne obiektów wykorzystują głównie

operatorowy opis dynamiki systemu w postaci transmitancji. Założono, że obiekt będzie opisany przy pomocy torów wejść-wyjść oraz zakłóceń-wyjść. Oznacza to, że dla modeli wielomianowych zakłócenia opisuje się jako sprowadzone na wyjście obiektu. Sytuację taką przedstawiono na Rys. 1.



Rysunek 1: Uogólniony schemat układu dynamicznego

Wielkości pokazane na rysunku 1 mają następujące znaczenie:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$  – wielomiany operatorowe,  $\nabla^m = (1 - z^{-1})^m$  – trendy wielomianów,  $u(i)$ ,  $y(i)$ ,  $e(i)$  – sygnały wejścia, wyjścia i zakłócenia,  $d(i)$  – zakłócenie deterministyczne. Model ogólny wielomianowy układu jedno wejście – jedno wyjście (SISO) przedstawiony na rysunku 1 zapisujemy następująco:

$$A(z^{-1})[\nabla^m \cdot y(z^{-1})] = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}[\nabla^m \cdot u(z^{-1})] + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}e(z^{-1}) \quad (1)$$

Upraszczając równanie (1) można wyróżnić następujące regresyjne modele parametryczne [14-16]:

- 1) model o strukturze ARX (ang. Auto Regressive with eXogenous input):

$$A(z^{-1}) \cdot y(z^{-1}) = B(z^{-1}) \cdot u(z^{-1}) + e(z^{-1}) \quad (2)$$

opisujący zakłócenia jako proporcjonalne do wyjścia sygnału użytecznego,

- 2) model o strukturze ARMAX (ang. Auto Regressive Moving Average with eXogenous input):

$$A(z^{-1}) \cdot y(z^{-1}) = B(z^{-1}) \cdot u(z^{-1}) + C(z^{-1}) \cdot e(z^{-1}) \quad (3)$$

wprowadzający częściowo niezależny opis zakłóceń w postaci zer licznika  $C(z^{-1})$  w torach zakłócenia-wyjścia, mianownik jest taki sam jak w torach wejścia-wyjścia,

- 3) model o strukturze OE (ang. Output Error):

$$y(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot u(z^{-d}) + e(z^{-1}) \quad (4)$$

pomijający opis zakłóceń przy pomocy funkcji przejścia (na wyjściu tylko biały szum),

4) model o strukturze BJ (Box - Jenkins):

$$y(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot u(z^{-d}) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \cdot e(z^{-1}) \quad (5)$$

wprowadzający całkowicie niezależny opis zakłóceń od torów wejścia-wyjścia w postaci zer licznika  $C(z^{-1})$  oraz biegunów mianownika  $D(z^{-1})$  w torach zakłócenia-wyjścia,

5) model o strukturze PEM (ang. Predict Error Method):

$$A(z^{-1}) \cdot y(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})} \cdot u(z^{-d}) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})} \cdot e(z^{-1}) \quad (6)$$

wprowadzający całkowicie niezależny opis zakłóceń od torów wejścia-wyjścia jak w modelu BJ oraz dodatkowo wspólną część w postaci biegunów mianownika  $A(z^{-1})$  dla torów wejścia-wyjścia oraz zakłócenia-wyjścia.

W czasie działania obiektu przemysłowego można wyróżnić dwie klasy modelowanych zmian: zmiany otoczenia w którym działa obiekt oraz zmiany własności obiektu. Z praktycznego punktu widzenia prowadzi to do błędów stosowania modelu obiektu, jeżeli w otoczeniu pojawi się źródło dodatkowych zakłóceń lub w obiekcie wystąpią zmiany własności. W celu zapewnienia zgodności estymatora należy poprawnie dobrać strukturę modelu wykorzystując przede wszystkim wiedzę a priori dotyczącą zakłóceń otoczenia oraz parametrów obiektu. W wielu przypadkach najprostsza struktura ARX nie zapewnia nawet dostatecznej dokładności w odtwarzaniu cech obiektu oraz zakłóceń otoczenia.

Dobór struktury w przypadku modeli bardziej złożonych: ARMAX, BJ, PEM jest bardzo trudnym zadaniem. Niewielkie zmiany w stopniach wielomianów  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$  powodują duże zmiany jakościowe w wynikach stosowania modelu.

W przypadku diagnostycznych zastosowań modelu można wykorzystać zmiany strukturalne do diagnostyki, np. separacji zmian w nieliniowości obiektu, pojawiania się ubocznych skutków działania obiektu itd. Wprowadzenie modeli BJ (również PEM) z oddzielnymi biegunami w torach wejścia-wyjścia oraz zakłócenia-wyjście predysponuje te struktury do identyfikacji obiektów analizowanych pod kątem drgań.

## 2.1. Odwracanie regresyjnych modeli parametrycznych

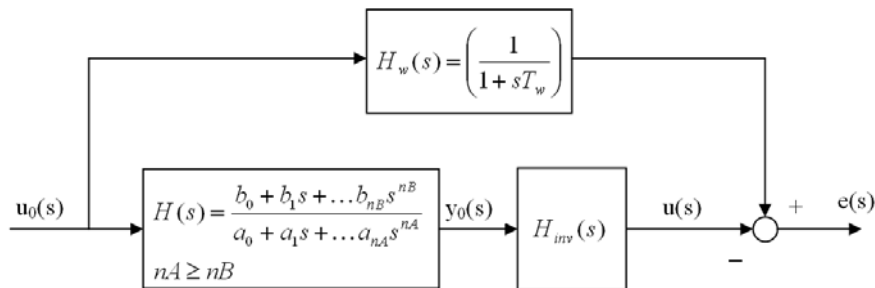
Aby wygenerować odpowiedź liniowego dynamicznego modelu odwrotnego niezbędne jest, aby był on właściwy lub ściśle właściwy [17], [18]. Obiekt właściwy charakteryzuje się tym, że jego transmitancja ma stopień licznika mniejszy od stopnia mianownika  $nB < nA$ , dla obiektu ściśle właściwego natomiast, stopień licznika jest równy stopniowi mianownika  $nB = nA$ . Gdy stopień licznika jest wyższy od stopnia mianownika  $nB > nA$  obiekt jest nierealizowalny fizycznie z uwagi na wymagane idealne różniczkowanie. Ponadto obiekt powinien być liniowy, stacjonarny i minimalnofazowy.

Inwersję realizowalną fizycznie dla obiektu opisywanego modelem ciągłym przedstawia się jako połączenie transmitancji obiektu oraz jego modelu odwrotnego o identycznej strukturze  $H(s) \cdot H_{inv}(s) = 1$ . Dla inwersji idealnej żąda się równości wejścia  $u_0(s)$  oraz  $u(s)$  wprowadzając model wzorcowy  $H_w(s)$  co pozwala na wyznaczenie modelu odwrotnego według zależności:

$$H_{inv}(s) = \frac{H_w(s)}{H(s)} = \frac{u(s)}{y_0(s)} = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_{nA}s^{nA}}{(b_0 + b_1s + \dots + b_{nB}s^{nB})(1 + sT_w)^{(nA-nB)}} \quad (7)$$

gdzie:  $nA, nB$  – stopnie wielomianów,  
 $u(s), y_0(s)$  – wejście szacowane i wyjście referencyjne,  
 $T_w$  – stała czasowa,

Schemat procedury odwracania modelu obiektu przedstawiono na rysunku 2.



Rysunek 2: Schemat procedury odwracania modeli parametrycznych

Na rysunku 2 przez  $e(s)$  oznaczono błąd pomiędzy wymuszeniem referencyjnym  $u_0(s)$ , a wymuszeniem szacowanym  $u(s)$ ,  $H_{inv}(s)$  jest transmitancją odwrotną modelu obiektu. Zbyt duża różnica pomiędzy stopniem licznika  $nB$  i mianownika  $nA$  prowadzi do większej niedokładności inwersji. Dla dużej różnicy stopni dokładność inwersji spada dla zwiększającej się częstotliwości. Wynika to z możliwości realizacji idealnego całkowania (minimalna wartość  $T_w$ ).

Dyskretny model odwrotny wyznacza się następująco:

$$H_{inv}(z) = \frac{H_w(z)}{H(z)} = \frac{u(z)}{y(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{nA}z^{nA}}{(b_0 + b_1z + \dots + b_{nB}z^{nB})} \left( \frac{1-c}{z-c} \right)^{(nA-nB)} \quad (8)$$

gdzie:  $c$  – stała ustalająca doskonałość inwersji.

Dla  $c = 0$  otrzymuje się:

$$H_{inv}(z) = \frac{H_w(z)}{H(z)} = \frac{u(z)}{y(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_{nA}z^{nA}}{(b_0 + b_1z + \dots + b_{nB}z^{nB})z^{(nA-nB)}} \quad (9)$$

W przypadku modelu dyskretnego dla zachowania realizowalności fizycznej systemu wprowadza się dodatkowe opóźnienie  $z^{-1}$  wymuszając przyczynowość odpowiedzi impulsowej obiektu. W przeciwnym przypadku obiekt przewidywałby przyszłość i odpowiedź powstawałaby przed pojawieniem się wymuszenia.

## 2.2. Procedura identyfikacyjna

Zespół czynności niezbędnych do zidentyfikowania obciążenia eksploatacyjnego na podstawie pomiaru odpowiedzi przy pomocy odwróconych modeli parametrycznych można przedstawić w formie następującej procedury [19]:

- 1) przygotowanie danych do identyfikacji regresyjnego modelu parametrycznego,
- 2) wybór struktury modelu i estymacja jego parametrów,
- 3) odwrócenie modelu,
- 4) wygenerowanie odpowiedzi odwrotnego modelu pobudzanego przebiegami danych zawierającymi odpowiedź obiektu na wymuszenie harmoniczne lub szumowe,
- 5) weryfikacja poprawności modelu odwrotnego przez porównanie otrzymanych wymuszeń z wymuszeniami zmierzonymi.

W przypadku gdy weryfikacja wypadnie niekorzystnie, wrócić do punktu drugiego i zmienić strukturę modelu bądź jego parametry np.: stopnie licznika i mianownika.

Dane do punktu pierwszego procedury mogą pochodzić z eksperymentu laboratoryjnego lub mogą być uzyskane na podstawie symulacji modelu obiektu np.: modelu elementów skończonych.

Metoda była testowana na danych symulacyjnych i eksperymentalnych. Wyniki tych badań można znaleźć w pracy [7]. Wykazały one, że metoda dobrze radzi sobie z sygnałami o charakterze harmonicznym, natomiast nie nadaje się do identyfikacji sił o charakterze szumu losowego.

## 3. OPIS EKSPERYMENTU

Obiektem badań był model helikoptera *Hirobo SST Eagle 2*. Jest to model latający, zdalnie sterowany. W ramach prac prowadzonych w Katedrze Robotyki i Mechatroniki AGH model ten ma zostać przerobiony na robota inspekcyjnego, którego zadaniem będą samodzielne przeloty we wskazane rejony i filmowanie zadanego obszaru kamerą pokładową. Robot taki może znaleźć szerokie zastosowanie w monitoringu trudnodostępnych budowli lub dużych obszarów, gdzie sieć kamer stacjonarnych nie może zostać zastosowana. Zdjęcie modelu podczas badań pokazano na Rys. 3. Ze względu na opisane zastosowanie konieczne było zaprojektowanie i wykonanie modułu sterującego, który umożliwiłby samodzielny lot helikoptera i śledzenie zadanej trajektorii.

Jednym z etapów projektowania modułu było sprawdzenie poziomu drgań jakim jest on poddawany w czasie lotu i ewentualny dobór wibroizolacji. W tym celu dokonano pomiaru przyspieszeń drgań w 12 wybranych lokalizacjach (3 kierunki w każdym punkcie) oraz pomiaru sił działających w elementach mocujących moduł sterujący do ramy helikoptera – 4 punkty. Zdjęcie modułu wraz z czujnikami siły pokazano na Rys. 4.

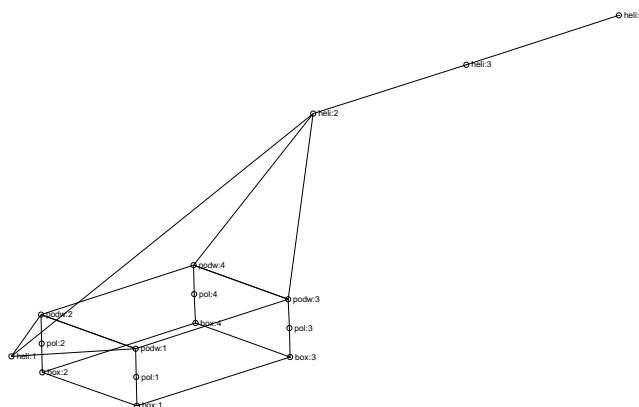


Rysunek 3: Model helikoptera podczas badań



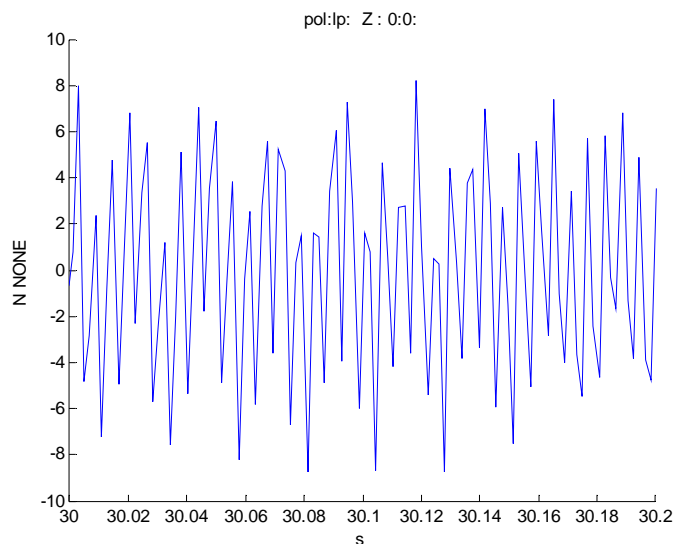
Rysunek 4: Moduł sterujący z czujnikami siły w zawieszeniu

Na Rys. 5 przedstawiono sieć punktów pomiarowych.



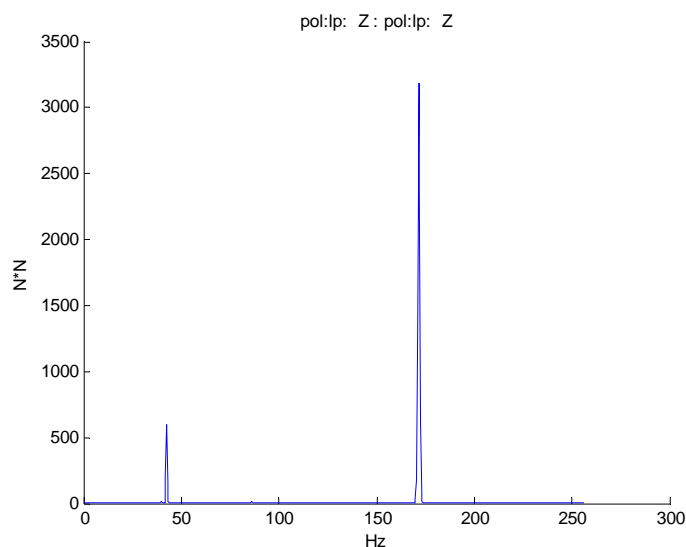
Rysunek 5: Moduł sterujący z czujnikami siły w zawieszeniu

Podczas eksperymentu wykonano dwa loty. W obu przypadkach był to około 3 minutowy zawis na wysokości 1,5 metra. Niemożliwe było zbadanie bardziej złożonego charakteru lotu z uwagi na pomiar przewodowy. W obu lotach mierzono siły w tych samych lokalizacjach, wspólne były też pomiary przyspieszeń drgań w miejscach pomiaru sił – stosowano głównie impedancyjne. Pozostałe lokalizacje pomiaru różniły się w obu lotach. Rejestrowano przebiegi czasowe, na podstawie których estymowano następnie przebiegi gęstości widmowych mocy. Przykładowy przebieg czasowy siły zmierzonej podczas lotu oraz jej gęstość widmową mocy pokazano odpowiednio na Rys. 6 i 7.



Rysunek 6: Przebieg czasowy siły zmierzonej w przednim lewym zawieszeniu



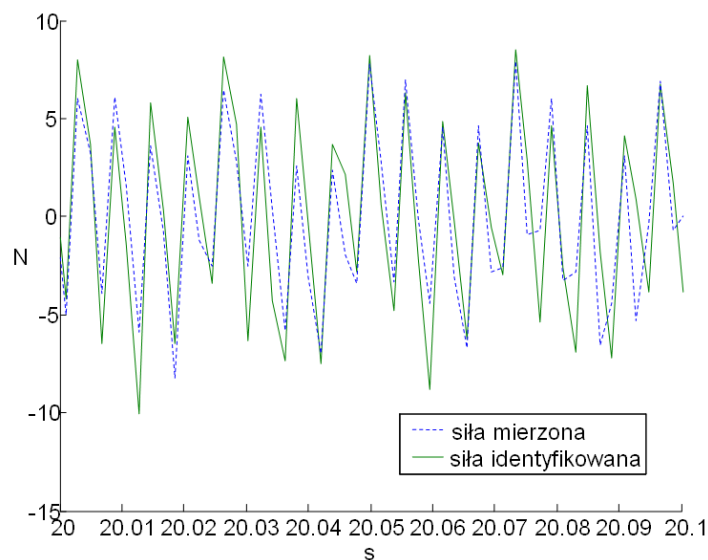


Rysunek 7: Gęstość widmowa mocy siły zmierzonej w przednim lewym zawieszeniu

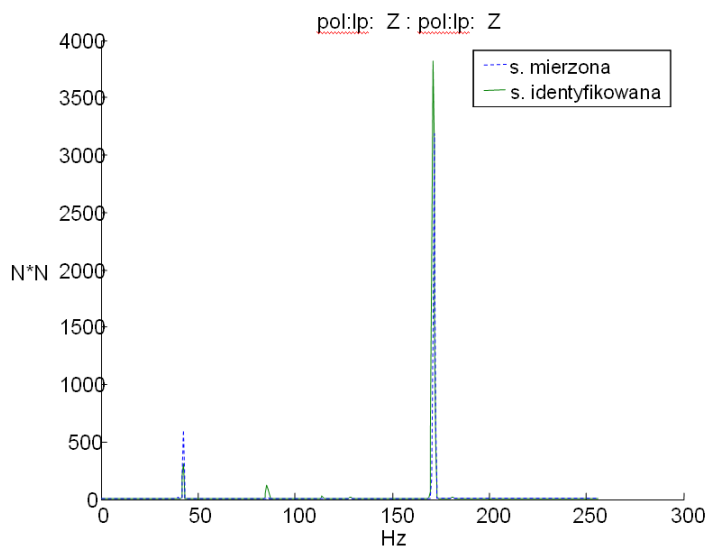
Analiza obu rysunków pozwala stwierdzić, że siły w zawieszeniach mają charakter typowo harmoniczny. Jest to zresztą dość oczywiste, gdyż głównym wymuszeniem był pracujący silnik modelu. Taki przebieg sił pozwala na zastosowanie metody odwracania regresyjnych modeli parametrycznych w celu ich identyfikacji.

#### 4. WYNIKI IDENTYFIKACJI SIŁ

W procedurze opisanej w podrozdziale 2 zastosowano model ARMAX jako najlepszy kompromis pomiędzy czasem obliczeń, a dokładnością wyników. Przyjęto następujące rzędy wielomianów:  $A = 5$ ,  $B$  i  $C = 3$ . Z uwagi na niewielkie rozmiary obiektu i przyjęty czas próbkowania, wartość opóźnienia ustalono na poziomie 0 próbek – brak opóźnienia. Identyfikowano dwie siły z punktów, w których pomiar był realizowany przy pomocy głowic impedancyjnych POL:PT i POL:LP. Dzięki temu problem był kolokacyjny – pomiar siły i odpowiedzi w tym samym punkcie, a więc łatwiejszy do rozwiązania. Dane z pierwszego lotu zostały zastosowane do identyfikacji parametrów przyjętego modelu ARMAX. Otrzymany model następnie odwrócono wg przyjętej procedury i zastosowano do identyfikacji sił na podstawie przebiegów przyspieszeń drgań zarejestrowanych w czasie lotu nr 2. Przebiegi otrzymane w wyniku działania procedury identyfikacyjnej pokazano na Rys. 8, a ich gęstości widmowe mocy na Rys 9.



Rysunek 8: Przebiegi czasowe siły zmierzonej i zidentyfikowanej



Rysunek 9: Gęstość widmowa mocy siły zmierzonej w przednim lewym zawieszeniu

Jako miarę porównania sił zmierzonych i zidentyfikowanych przyjęto: dla przebiegów czasowych – współczynnik korelacji i wartość skuteczną sygnałów, dla gęstości widmowych mocy – wartości amplitudy w częstotliwościach harmonicznych. Otrzymane wyniki zestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1: Wyniki identyfikacji sił

Kryterium	POL:PT		POL:LP	
	<i>pomiar</i>	<i>ident.</i>	<i>pomiar</i>	<i>ident.</i>
Współczynnik korelacji	0.6720		0.6252	
RMS	6.82	7.74	18.5	22.1
Amplituda maksimum 42 Hz [N <sup>2</sup> ]	1021	937	599	303
Amplituda maksimum 171 Hz [N <sup>2</sup> ]	282	496	3184	3632

Na podstawie wizualnego porównania przebiegów zidentyfikowanych i zmierzonych na rysunkach 8 i 9 oraz danych zawartych w tabeli 1 można stwierdzić, że identyfikacja sił metodą odwracania parametrycznych modeli regresyjnych dała pozytywne rezultaty. Współczynnik korelacji dla obu analizowanych przebiegów przekraczał 0,6. Jest to wartość wysoka biorąc pod uwagę fakt, że analizowane przebiegi czasowe były znacznej długości – ponad 100000 próbek i zawierały dane ze startu i lądowania. Różnica w wartości skutecznej sygnału nie przekroczyła 20 %. Także charakter przebiegu gęstości widmowej mocy obu sił został zachowany, a amplituda kolejnych maksimum na przebiegach jest zbliżona. Zgodność sił zmierzonych i zidentyfikowanych na poziomie zaprezentowanym w niniejszej pracy, przy uwzględnieniu złożoności rozważanego przypadku należy ocenić jako dobrą.

## 5. PODSUMOWANIE

Przedstawiona próba identyfikacji sił eksploatacyjnych została zakończona powodzeniem. Metoda pokazana w pracy udowodniła swoją wysoką skuteczność dla sygnałów poliharmonicznych. Ma także kilka zalet, które czynią ją szczególnie przydatną w praktyce. Siły zostały poprawnie zidentyfikowane na podstawie tylko jednego przebiegu odpowiedzi, a model układu został zidentyfikowany na podstawie danych z jednego lotu. To daje metodzie przewagę nad innymi znanymi metodami identyfikacji sił, które wymagają bądź to wielu odpowiedzi dla lepszego uwarunkowania zagadnienia, bądź to wielkich zbiorów danych uczących do identyfikacji modelu.

## LITERATURA

- [1] Gladwell M. L. G., *Inverse problems in vibration*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 2004.
- [2] Zion L, Predicting fatigue loads using regression diagnostics, *Proceedings of The American Helicopter Society Annual Forum*, Washington D.C., 1994.
- [3] Haas D.J., Milano J., Flitter L., Prediction of Helicopter Component Loads Using Neural Networks, *Journal of the American Helicopter Society*, no.1, 1995

- [4] Góral G., Bydoń S., Uhl T., Zastosowanie sieci neuronowych i logiki rozmytej do oceny obciążeń konstrukcji na podstawie pomiarów eksploatacyjnych, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 26, no 2/3, 2002
- [5] Stelzner D. A., Kammer D. C., Input force estimation using an inverse structural filter, *Proceedings of 17th IMAC*, Orlando, Florida, USA, 1999.
- [6] Carne T., Bateman V., Mayes R., Force reconstruction using a sum of weighted accelerations technique, *Proceedings of 12th IMAC*, Honolulu, Hawaii, USA, 1994.
- [7] Mendrok K. *Zastosowanie algorytmów analizy rozchodzenia się energii w konstrukcjach do identyfikacji obciążeń w układach mechanicznych*, Praca Doktorska, Kraków, Polska 2003.
- [8] Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y., *Solution of Ill-posed Problems*, Winston and Sons, Washington, D.C., 1977.
- [9] Uhl T., Mendrok K., *Zastosowanie odwrotnego zadania identyfikacji do wyznaczania sił obciążających konstrukcje mechaniczne*, ITE, Radom, Polska 2005.
- [10] Zhang Q., Allemang, R.J., Brown, D.L., Modal Filter: Concept and Applications, *Proceedings of IMAC*, pp. 487-496, 1990.
- [11] Shih C.Y., Zhang Q., Allemang R.J., Force Identification by Using Principle and Modal Coordinate Transformation Methods, *Twelfth Biennial ASME Conference, Vibrational Analysis - Techniques and Applications*, ASME DE-Volume, 18 (4), 303-310, 1989.
- [12] Uhl T., Pieczara J., Identification of operational loading forces for mechanical structures, *The Archives of Transport*, vol. XVI, no.2, pp. 109- 126, 2003.
- [13] Giergiel J., Uhl T., Identification of the input impact type forces in mechanical systems, *The Archives of Transport*, vol.1, no. 1, 1989.
- [14] Ljung L., *System identification – Theory for the User*, Prentice-Hall, 1999.
- [15] Söderström T., Stoica P., *System identification*. Prentice-Hall 1988.
- [16] Eykhoff P., *System identification: parameter and state estimation*. Wiley, 1974.
- [17] Giergiel J., Uhl T., *Identyfikacja układów mechanicznych*, PWN 1990.
- [18] Larminat P., Thomas Y., *Automatyka – układy liniowe cz. 2. Identyfikacja*, WNT 1983.
- [19] Czop P., Uhl T., Load identification methods based on parametric models for mechanical structures, *Proceedings of the 8th IEEE international conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2002 Szczecin*, vol. 2.

## **IDENTYFIKACJA OBCIĄŻENIA POWODUJĄCEGO UPLASTYCZNIENIE RAMY Z ZASTOSOWANIEM BAYESOWSKICH SIECI NEURONOWYCH**

**Bartosz Miller**

Katedra Mechaniki Konstrukcji  
Politechnika Rzeszowska  
ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów  
e-mail: bartosz.miller@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *This paper presents the application of Bayesian Neural Networks (BNN) in the identification of parameters of a load causing partial yielding of a cross-section of a portal frame. As the source of the data in the identification procedure the eigenfrequencies and eigenvectors are used. The applied BNN are either of SSN/MAP (Maximum A Posteriori) or of T-BNN (True Bayesian Neural Networks) type, the results are compared with the results of the identification performed using Standard Neural Networks (SNN).*

---

### **1. WPROWADZENIE**

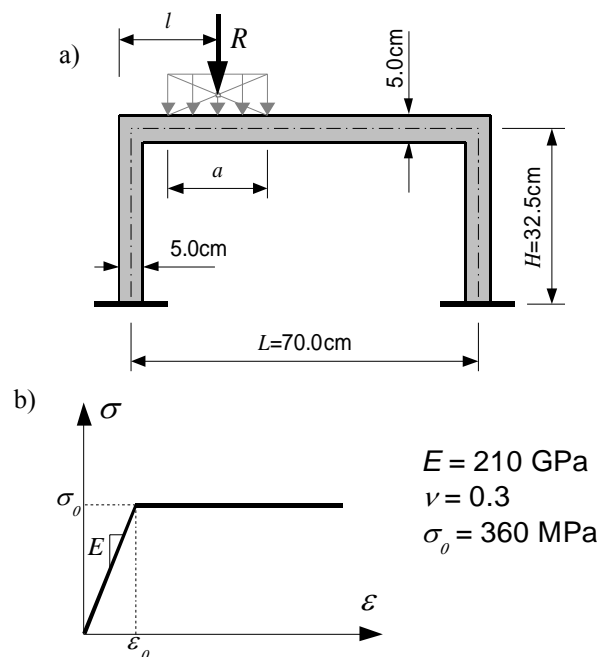
Częściowe uplastycznienie przekroju poprzecznego może nastąpić w wyniku działania obciążenia zewnętrznego i/lub w wyniku zarysowania (pęknięcia) [1]. Określenie stopnia uplastycznienia przekroju poprzecznego (możliwe, kiedy wywołujące uplastycznienie zewnętrzne obciążenie jest znane) pozwala na oszacowanie stanu bezpieczeństwa konstrukcji [2]. W przypadku, kiedy dokładna wartość obciążenia nie jest znana może być określona z wykorzystaniem analizy modalnej dynamicznej odpowiedzi konstrukcji.

W pracach [3,4] przedstawiono identyfikację obciążenia wywołującego uplastycznienie przekroju poprzecznego z zastosowaniem standardowych sieci neuronowych (SNN, ang. *Standard Neural Networks*) [5,6]. Pokazano, że wykorzystując jako dane wejściowe zmiany mierzalnych parametrów, takich jak częstości drgań własnych [3] oraz wybrane współrzędne wektorów własnych [4], można z zastosowaniem sztucznych sieci neuronowych zidentyfikować położenie oraz wartość wypadkowej obciążenia działającego na konstrukcję. W pracach [3,4] pokazano także, że nie jest możliwa identyfikacja szerokości obciążenia z zadowalającą dokładnością na podstawie zmian rozważanych parametrów dynamicznych układu.

W niniejszej pracy przedstawiona jest metoda identyfikacji obciążenia wywołującego uplastycznienie przekroju poprzecznego z zastosowaniem bayesowskich sieci neuronowych (BNN, ang. *Bayesian Neural Networks*) [7-9].

## 2. OPIS PROBLEMU

Identyfikowano obciążenie powodujące częściowe uplastycznienie przekroju poprzecznego w ramie portalowej przedstawionej na Rys. 1. Obciążenie było opisane trzema parametrami: wartość wypadkowej  $R$ , położenie wypadkowej  $l$  oraz szerokość obciążenia  $a$ . Dwa parametry – wartość  $R$  oraz położenie wypadkowej  $l$  – były identyfikowane na podstawie zmian parametrów dynamicznych układu wywołanych pojawieniem się częściowego uplastycznienia. Trzeci parametr – szerokość obciążenia  $a$  – nie był identyfikowany (patrz [3,4]).



Rysunek 1: Rama portalowa a) schemat układu, b) dane materiałowe.

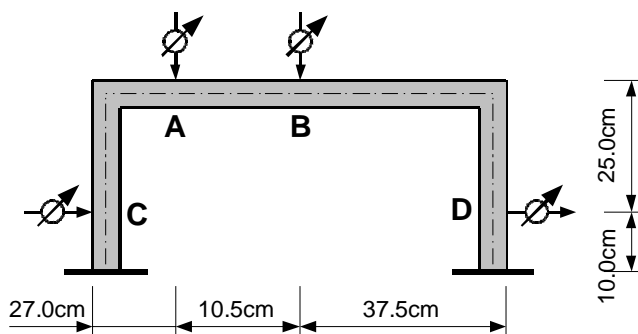
## 3. ZASTOSOWANIE BNN DO IDENTYFIKACJI OBCIĄŻENIA

Do rozwiązania problemu odwrotnego – identyfikacji parametrów obciążenia na podstawie danych pseudo-eksperymentalnych – zastosowano sztuczne sieci neuronowe. Wektor wejściowy sieci neuronowych był zbudowany wyłącznie ze zmian częstości drgań własnych ( $a$ ) lub ze zmian częstości oraz z wybranych elementów form drgań własnych ( $b$ ):

$$a) \mathbf{x}_{(10 \times 1)} = \{\Delta f_i \mid i = 1, \dots, 10\}$$

$$b) \mathbf{x}_{(15 \times 1)} = \{\Delta f_i, v_{ij} \mid i = 1, 2, 3; j = A, B, C, D\}$$

W przypadku ( $b$ ) symbole A, B, C i D oznaczają położenie czujników przyspieszeń (patrz Rys. 2) oraz jednocześnie wskazują te elementy wektorów własnych, które były brane pod uwagę podczas identyfikacji obciążenia.



Rysunek 2: Rama portalowa: rozmieszczenie czujników przyspieszeń

Parametry obciążenia (wypadkowa i położenie obciążenia) były identyfikowane przez dwie niezależne sieci o jednym wyjściu (1) lub przez jedną sieć z dwoma wyjściami (2):

$$1) \mathbf{y}_{(1 \times 1)} = \{l / L\} \text{ lub } \mathbf{y}_{(1 \times 1)} = \{R / R_{\max}\},$$

$$2) \mathbf{y}_{(2 \times 1)} = \{l / L, R / R_{\max}\},$$

gdzie  $R_{\max}$  to maksymalna rozważana wartość wypadkowej obciążenia.

Łącznie dysponowano 1990 wzorcami  $\{\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^n\}$  otrzymanymi z symulacji numerycznych przeprowadzonych z zastosowaniem systemu metody elementów skończonych Adina [10]. Model ramy był zbudowany z 1450 8-węzłowych elementów skończonych pracujących w płaskim stanie naprężenia. Podczas symulacji numerycznych zmieniano położenie, szerokość oraz intensywność obciążenia przyłożonego do układu (parametry obciążenia były tak dobierane, aby za każdym razem wywołać częściowe uplastycznienie przekroju) i obliczano częstości oraz formy drgań własnych ramy. Otrzymane wzorce zostały losowo rozdzielone na zbiory uczący i testowy o takiej samej liczbie elementów.

#### 4. WYNIKI IDENTYFIKACJI Z ZASTOSOWANIEM BNN

Rozważono różne kombinacje przedstawionych powyżej wektorów wejściowych i wyjściowych, wyniki symulacji numerycznych otrzymanych dla wzorców ze zbioru testowego są zestawione w Tabeli 1. W pierwszej kolumnie tabeli symbolicznie przedstawiono definicję wektorów wejściowego i wyjściowego wykorzystywanych przed daną sieć, dla przykładu  $a-2$  oznacza wejście zdefiniowane przez  $(a)$  – zmiany dziesięciu pierwszych częstości drgań własnych, oraz wyjście opisane jako (2) – oba parametry identyfikowane przez jedną sieć o dwóch wyjściach. W kolejnych kolumnach przedstawiono rodzaj zastosowanej sieci oraz otrzymane dla wzorców ze zbioru testowego błędy RMS (ang. *Root-Mean-Square error*):

$$RMS_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \{t_i^n - y_i^n\}} \quad (1)$$

ARE (ang. *Absolute Relative Error*):

$$ARE_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| 1 - \frac{y_i^n}{t_i^n} \right| \times 100\% \quad (2)$$

i współczynnik korelacji liniowej  $r$ .

We wzorach (1) oraz (2)  $y_i^n$  to  $i$ -ty element wektora wyjściowego z sieci otrzymanego dla  $n$ -tego wektora wejściowego,  $t_i^n$  to  $i$ -ty element wzorcowego  $n$ -tego wektora wyjściowego (dla sieci o dwóch wyjściach, w przypadku sieci o jednym wyjściu  $i=1$  przy identyfikacji położenia,  $i=2$  przy identyfikacji wartości wypadkowej),  $N$  to liczba wszystkich wzorców.

Tabela 1: Wyniki symulacji z zastosowaniem sieci neuronowych

$x - y$	Architektura sieci neuronowej	Błędy testowania					
		Położenie wypadkowej			Wartość wypadkowej		
		RMS <sub>1</sub> ×10 <sup>2</sup> [-]	ARE <sub>1</sub> [%]	r <sub>1</sub> [-]	RMS <sub>2</sub> ×10 <sup>2</sup> [-]	ARE <sub>2</sub> [%]	r <sub>2</sub> [-]
$a-2$	SSN: 10-10-2, [4]	2.9453	6.4340	0.9941	3.3437	9.7338	0.9779
	SSN/MAP: 10-20-2	2.4345	6.1625	0.9960	2.7671	5.3155	0.9854
	T-BNN: 10-12-2	3.9050	9.7105	0.9897	3.8367	9.7298	0.9690
$a-2$	T-BNN: 10-18-1	3.8686	10.6524	0.9897	3.9596	9.2815	0.9684
$b-2$	SSN: 15-6-2, [4]	2.4799	4.8883	0.9957	2.7565	10.7755	0.9848
	SSN/MAP: 15-20-2	1.3458	3.2081	0.9988	2.6612	5.1410	0.9847
	T-BNN: 15-12-2	2.8497	7.1642	0.9945	4.1299	11.6037	0.9625
$b-1$	T-BNN: 15-16-1	3.0010	8.3439	0.9940	4.4231	12.0365	0.9594

W kolejnych wierszach Tabeli 1 przedstawiono wyniki otrzymane ze standardowych sieci wielowarstwowych (SSN) jak i z sieci bayesowskich (BNN). Sieci bayesowskie zarówno na etapie uczenia jak i działania operacyjnego oparte są na twierdzeniu Bayesa:

$$p(\mathbf{w} | \mathbf{X}, \mathbf{t}, \alpha, \beta) = \frac{p(\mathbf{t} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) p(\mathbf{w} | \alpha)}{p(\mathbf{t} | \mathbf{X}, \alpha, \beta)} \quad (3)$$

Mianownik wyrażenia po prawej stronie równania (1) można przedstawić jako

$$p(\mathbf{t} | \mathbf{X}, \alpha, \beta) = \int_{R^n} p(\mathbf{t} | \mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) p(\mathbf{w} | \alpha) d\mathbf{w} \quad (4)$$



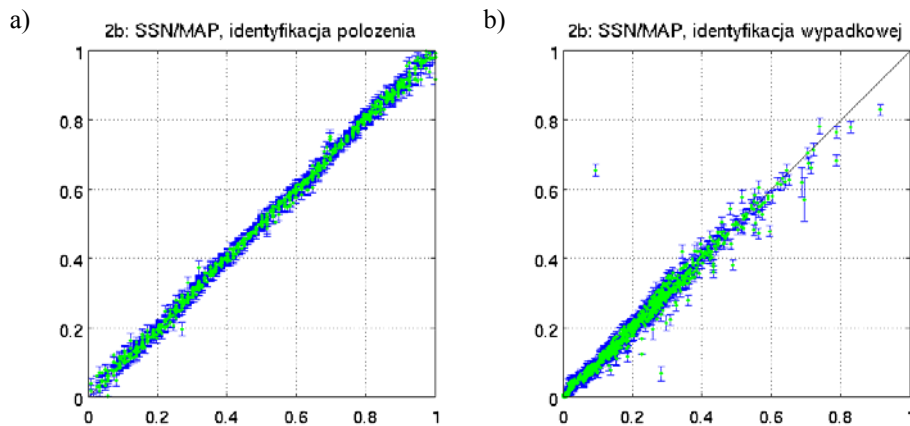
W obu powyższych równaniach  $p$  oznacza rozkład prawdopodobieństwa,  $D = \{\mathbf{X}, \mathbf{t}\}$  to zbiór wzorców z wejściami  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^N$  i wyjściami  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}^n\}_{n=1}^N$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  to hiperparametry zaś  $\mathbf{w}$  to wektor wag sieci neuronowej. Funkcja błędu może być przedstawiona w postaci:

$$F(\mathbf{w}) = \beta E_D(\mathbf{w}) + \alpha E_w(\mathbf{w}) = \frac{\beta}{2} \sum_{n=1}^N \{t^n - y(x^n; \mathbf{w})\}^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{i=1}^W w_i^2 \quad (5)$$

gdzie  $\alpha E_w(\mathbf{w})$  pełni rolę czynnika regularyzacyjnego.

Zastosowano sieci bayesowskie typu SSN/MAP (Maximum A Posteriori) oraz T-BNN (True Bayesian Neural Networks). W przypadku sieci SSN/MAP podczas uczenia sieci wprowadzony jest człon regularyzacyjny a wartości hiperparametrów są ustalane iteracyjnie, w sieci T-BNN hiperparametry są traktowane jako zmienne losowe [10].

Szarym kolorem zaznaczono w Tabeli 1 najlepsze wyniki otrzymane z sieci o 15 wejściach trzech podstawowych częstości drgań własnych oraz po 4 elementy z trzech pierwszych wektorów własnych), 2 wyjściach (położenie i wartość wypadkowej) oraz o 20 neuronach ukrytych. Szczegółowo wyniki testowania tej sieci są przedstawione także na Rys. 3.



Rysunek 3: Wyniki identyfikacji położenia (a) i wartości (b) obciążenia.

Na osi poziomej na Rys. 3a,b przedstawiono wartości oczekiwane (znane z symulacji numerycznych), na osi pionowej wartości otrzymane z sieci neuronowej. Widoczne skupienie wyników wokół prostej o równaniu  $x = y$  dowodzi, że sieci są w stanie prawidłowo zidentyfikować parametry obciążenia.

Dzięki zastosowaniu wnioskowania bayesowskiego możliwe jest traktowanie wielkości wyjściowych jako zmiennych probabilistycznych. Na Rys. 3 przedstawiono w postaci słupków błąd odchylenie standardowe określone dla położenia oraz wartości wypadkowej zidentyfikowanego obciążenia.

## 5. PODSUMOWANIE

Zastosowanie sztucznych sieci neuronowych opartych na wnioskowaniu bayesowskim pozwala poprawić dokładność identyfikacji parametrów obciążenia powodującego częściowe uplastycznienie przekroju. Szczególnie obiecująca wydaje się być sieć BNN/MAP, która nie wymaga – jak to jest w przypadku sieci T-BNN – wykonywania bardzo czasochłonnego numerycznego całkowania po wartościach hiperparametrów.

Dodatkową zaletą zaprezentowanego podejścia jest wykorzystanie sieci bayesowskich o dwóch wyjściach, podczas gdy w przykładach dostępnych w literaturze stosowane są wyłącznie sieci o jednym wyjściu.

Dalsze prace związane z zastosowaniem BNN w problemach dynamiki konstrukcji powinny obejmować analizę optymalnej architektury sieci (liczbę neuronów ukrytych) oraz zastosowanie innych typów sieci. Wskazane jest także wykorzystanie jako informacji wejściowych do sieci danych otrzymanych z pomiarów doświadczalnych lub danych otrzymanych z symulacji numerycznych lecz z dodanym szumem imitującym błędy i niedokładności, które mogą się pojawić podczas pomiarów na obiektach rzeczywistych lub ich laboratoryjnych modelach.

## LITERATURA

- [1] W.F. Chen, D.J. Han, *Plasticity for structural engineers*. Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 1988.
- [2] M.M. Moran, Change of dynamic characteristics due to plastification. Computational Plasticity. *Fundamentals and Applications*, Pineridge Press - CIMNE, Swansea - Barcelona, 1967-1997, 1995.
- [3] B. Miller, G. Piątkowski, L. Ziemiański, *Beam yielding load identification by neural networks*, CAMES, **6**:449-467, 1999.
- [4] B. Miller, L. Ziemiański, *The identification of the load causing partial yielding in a beam on the basis of the dynamic characteristics*, CMM-2005, Częstochowa, 2005.
- [5] S. Haykin, *Neural networks. A comprehensive foundation*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2 wydanie, 1999.
- [6] Z. Waszczyszyn, L. Ziemiański, *Neural Networks in Mechanics of Structures and Materials – New Results and Prospects of Applications*. Computers&Structures **79**:2261-2276, 2001.
- [7] Z. Waszczyszyn, M. Słoński, B. Miller, G. Piątkowski, Bayesian Neural Networks in the Regression Analysis of Structural Mechanics Problems. WCCM8, Venice, 2008.
- [8] Ch.M. Bishop, *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer, 2006
- [9] Z. Waszczyszyn, *Bayesowskie sieci neuronowe w analizie problemów regresji*, XIII SDK, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, 258(74), 2008.
- [10] *ADINA, Theory and modeling guide*. Adina R&D Inc. 1992.

## WYBRANE ZAGADNIENIA DYNAMIKI STROPÓW PRZEMYSŁOWYCH Z USZKODZENIAMI

**Władysław Mironowicz, Marcin Sęk**

Instytut Inżynierii Ładowej Politechniki Wrocławskiej  
Wybrzeże Stanisława Wyspiańskiego 27, 50 – 370 Wrocław  
e-mail: {wladyslaw.mironowicz, marcin.sek}@pwr.wroc.pl

---

***Abstract:** Some unusual problems relating to the dynamics of the industrial ferroconcrete slab ceilings weighed down with machines are considered. The choice is made on the ground of the research results concerning the real constructions. Questions which are discussed concern the change of the stiffness as the result of incorrect execution of the ceiling as well as damages arising during its use. These are two kinds of problems: these of the construction which became weaker due to the machine oil's or chemical substances' effect and unilateral constraints problems (damage of the supporting construction's components).*

---

### 1. WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań są żelbetowe stropy przemysłowe typu płytowego. Są one najczęściej konstruowane w postaci płyty bezżebrowej lub z żebrami, opartej na regularnie rozmieszczonych słupach i ścianach.

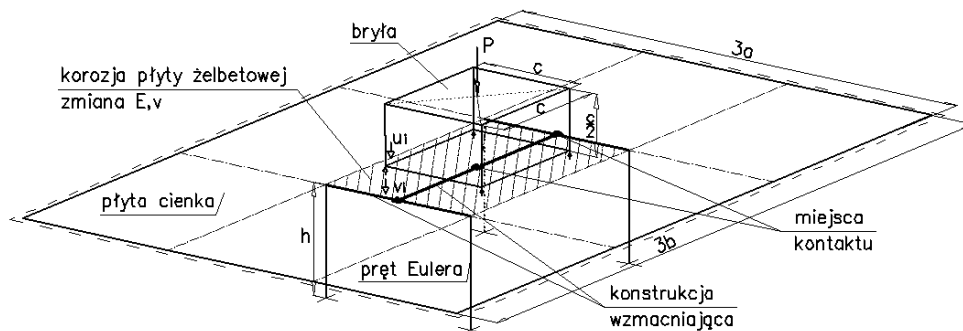
W stropach takich w trakcie ich użytkowania pojawiają się niekiedy uszkodzenia mające wpływ na ich dynamikę i nośność. W pracy rozpatrzono dwa rodzaje uszkodzeń. Pierwszym jest osłabienie betonu na określonym obszarze stropu (zmiana sztywności czyli modułu Younga  $E$  i współczynnika Poissona  $\nu$ ) w wyniku działania oleju maszynowego lub substancji chemicznych. Jak wskazują źródła literaturowe wpływy te mogą być znaczne (wpływ oleju na zmianę  $E$  może sięgać 40 %). Skutkiem drugiego rodzaju uszkodzenia jest pojawienie się więzi jednostronnych. W [1] rozpatrzono przypadek szczeliny w elemencie oporowym maszyny na stropie. Tutaj przedmiotem rozważań jest wpływ występowania dylatacji między konstrukcją wzmacniającą strop (na przykład wykonanej w sytuacji wyżej opisanego osłabienia), a płytą stropową. Dylatacja taka może powstać w czasie użytkowania stropu (na przykład wpływ osiadania), może też być skutkiem niestarannego wykonania konstrukcji.

W analizie numerycznej wielkość dylatacji przyjęto zgodnie z literaturą [2]. Stopień uszkodzenia korozyjnego płyty przyjęto na podstawie własnych badań doświadczalnych innego typu konstrukcji, a mianowicie hali żelbetowej zlokalizowanej w Zakładach Chemicznych PCC Rokita w Brzegu Dolnym. Jest to przykład realny odnoszący się do rozpatrywanego tu zjawiska na którym zaobserwowano i pomierzono wielkość negatywnego działania chlorku sodu oraz wilgoci na elementy konstrukcyjne.

Do rozważań przyjęto strop, którego schemat ideowy przedstawiono na Rys. 1. Analizę numeryczną drgań wymuszonych przeprowadzono przyjmując obciążenie siłą pionową  $P = 30 \text{ kN}$ , którą umiejscowiono na środku górnej powierzchni maszyny (bryły).

## 2. SFORMUŁOWANIE TEORETYCZNE ZAGADNIENIA

Rozpatrzono konstrukcję stropu w postaci prostokątnej płyty opartej na regularnej siatce słupów i na ścianach na obwodzie oraz umieszczonej na niej, za pośrednictwem wibroizolacji, nieodkształcalnej bryły będącej modelem maszyny. Dodatkowo pod płytą stropową zastosowano konstrukcję wzmacniającą w postaci rusztu stalowego.



Rysunek 1: Schemat ideowy rozpatrywanego układu

Drgania układu przedstawionego na rysunku powyżej opisuje macierzowy układ równań różniczkowych

$$\mathbf{B} \ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{g}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (1)$$

gdzie:

$\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  – macierze bezwładności, tłumienia i sztywności

$\mathbf{F}(t)$  – wektor obciążenia dynamicznego

$\mathbf{g}(t)$  – wektor współrzędnych uogólnionych

Ogólne postacie macierzy bezwładności  $\mathbf{B}$ , tłumienia  $\mathbf{C}$  i sztywności  $\mathbf{K}$  przedstawiają relacje

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_q & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_{qb} \\ \mathbf{C}_{bq} & \mathbf{C}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_q & \mathbf{K}_{qb} \\ \mathbf{K}_{bq} & \mathbf{K}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie:

$\mathbf{q}, \mathbf{b}$  – współrzędne uogólnione odpowiednio dla stropu i bryły,

$\mathbf{B}_q, \mathbf{C}_q, \mathbf{K}_q$  – macierze bezwładności, tłumienia i sztywności układu (płyta + słupy + ruszt wzmacniający + wibroizolacja maszyny),

$\mathbf{B}_b, \mathbf{C}_b, \mathbf{K}_b$  – macierze bezwładności, tłumienia i sztywności bryły,

$\mathbf{C}_{qb} = \mathbf{C}_{bq}^T, \mathbf{K}_{qb} = \mathbf{K}_{bq}^T$  – macierze tłumienia i sztywności połączenia bryły ze stropem.

Macierze bezwładności  $\mathbf{B}_q$  oraz sztywności  $\mathbf{K}_q$  układu złożonego z  $n_p$  elementów płytowych oraz  $n_r$  i  $n_s$  elementów prętowych (ruszt i słupy) otrzymano dokonując sumowania zgodnie ze wzorami w postaci

$$\mathbf{B}_q = \mathbf{B}_p + \mathbf{B}_r + \mathbf{B}_s \quad \mathbf{K}_q = \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_r + \mathbf{K}_s + \mathbf{V} \{k_i^w\} \mathbf{V}^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}_p = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{Q}_{pi}^T \mathbf{B}_{pe}^i \mathbf{Q}_{pi} \quad \mathbf{B}_r = \sum_{i=1}^{n_r} \mathbf{Q}_{ri}^T \mathbf{B}_{re}^i \mathbf{Q}_{ri} \quad \mathbf{B}_s = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{Q}_{si}^T \mathbf{B}_{se}^i \mathbf{Q}_{si},$$

$$\mathbf{K}_p = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{Q}_{pi}^T \mathbf{K}_{pe}^i \mathbf{Q}_{pi} \quad \mathbf{K}_r = \sum_{i=1}^{n_r} \mathbf{Q}_{ri}^T \mathbf{K}_{re}^i \mathbf{Q}_{ri} \quad \mathbf{K}_s = \sum_{i=1}^{n_s} \mathbf{Q}_{si}^T \mathbf{K}_{se}^i \mathbf{Q}_{si},$$

gdzie:

$\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_r, \mathbf{B}_s, \mathbf{K}_p, \mathbf{K}_r, \mathbf{K}_s$  – macierze bezwładności oraz sztywności płyty, rusztu oraz słupów  
 $\mathbf{V}$  – macierz przemieszczeń pionowych płyty w miejscach lokalizacji wibroizolacji o sztywności  $k_i^w$  pod bryłą,

$\mathbf{Q}_{pi}, \mathbf{Q}_{ri}, \mathbf{Q}_{si}$  – macierze transformacji wektorów współrzędnych uogólnionych płyty ( $\mathbf{q}_p^i$ ), rusztu ( $\mathbf{q}_r^i$ ) oraz słupów ( $\mathbf{q}_s^i$ ) na wektor współrzędnych uogólnionych całego układu ( $\mathbf{q}$ ),

$\mathbf{B}_{pe}^i, \mathbf{B}_{re}^i, \mathbf{B}_{se}^i, \mathbf{K}_{pe}^i, \mathbf{K}_{re}^i, \mathbf{K}_{se}^i$  – macierze odnoszące się do  $i$ -tego elementu, sformułowano w postaci (6) oraz (9), gdzie pominięto wskaźnik  $i$ .

Jednostkową energię potencjalną oraz kinetyczną odkształcenia cienkiej płyty izotropowej określają wzory

$$dE_{pp} = \frac{1}{2} D [(w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{,xx}w_{,yy} - (w_{,xy})^2)] \quad dE_{kp} = \frac{1}{2} m \dot{w}^2. \quad (4)$$

Stan przemieszczeń w elemencie płyty przedstawia relacja

$$w(x,y,t) = \mathbf{q}_p^T(t) \mathbf{L}(x,y), \quad (5)$$

gdzie  $\mathbf{L}$  – wektor funkcji aproksymacyjnych.

Po podstawieniu (5) do (4) i przekształceniach macierze bezwładności  $\mathbf{B}_{pe}$  i sztywności  $\mathbf{K}_{pe}$  elementu płyty mają postać

$$\mathbf{B}_{pe} = \iint (\rho h \mathbf{A}_5) dx dy \quad \mathbf{K}_{pe} = \iint \mathbf{D} [\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + 2\nu \mathbf{A}_3 + 2(1-\nu) \mathbf{A}_4] dx dy, \quad (6)$$

gdzie  $\mathbf{A}_1 = L_{,xx} L_{,xx}^T$ ,  $\mathbf{A}_2 = L_{,yy} L_{,yy}^T$ ,  $\mathbf{A}_3 = L_{,xx} L_{,yy}^T$ ,  $\mathbf{A}_4 = L_{,xy} L_{,xy}^T$ ,  $\mathbf{A}_5 = LL^T$ .

Jednostkową energię potencjalną oraz kinetyczną elementu prętowego (ruszt i słup) określają wzory

$$dE_{ps} = \frac{1}{2} (EI_y v_{s,z}''^2 + EI_x u_{s,z}''^2 + EA_s w_{s,z}'^2) \quad dE_{ks} = \frac{1}{2} m_s (\dot{v}_s^2 + \dot{u}_s^2 + \dot{w}_s^2). \quad (7)$$

Stan przemieszczeń w elemencie prętowym przedstawiają relacje

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{q}_{sv}^T(t) \mathbf{N}_1(z) \quad \mathbf{u}_s = \mathbf{q}_{su}^T(t) \mathbf{N}_2(z) \quad \mathbf{w}_s = \mathbf{q}_{sw}^T(t) \mathbf{N}_3(z), \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$  – wektory funkcji aproksymacyjnych

W konsekwencji macierze bezwładności  $\mathbf{B}_{se}$  i sztywności  $\mathbf{K}_{se}$  elementu prętowego przybierają postać

$$\mathbf{B}_{se} = \int \text{diag}(m_s \mathbf{B}_1, m_s \mathbf{B}_2, m_s \mathbf{B}_3) dz \quad \mathbf{K}_{se} = \int \text{diag}(EI_y \mathbf{K}_1, EI_x \mathbf{K}_2, EA_s \mathbf{K}_3) dz, \quad (9)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{N}_{1,z}'' \mathbf{N}_{1,z}''^T; \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{N}_{2,z}'' \mathbf{N}_{2,z}''^T; \quad \mathbf{K}_3 = \mathbf{N}_{3,z}' \mathbf{N}_{3,z}'^T; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_2^T; \quad \mathbf{B}_3 = \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_3^T$$

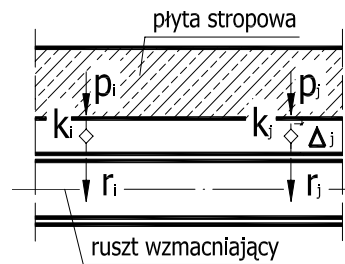
Energia potencjalna połączenia płyty z rusztem wzmacniającym za pośrednictwem przekładek – na przykład stalowych – (rys. 2) jest wyrażona wzorem

$$E_{pr} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (p_i - r_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_j (p_j - r_j - \Delta_j)^2 \cdot \beta_j, \quad (10)$$

gdzie:

$$\beta_j = \begin{cases} 1 & \text{gdy } p_j \geq r_j + \Delta_j \\ 0 & \text{gdy } p_j < r_j + \Delta_j \end{cases}$$

$k_i, k_j$  – sztywności przekładek  
 $p_i, p_j, r_i, r_j$  – przemieszczenia lokalne  
 $\Delta_j$  – dylatacja pomiędzy płytą i rusztem



Rysunek 2: Schemat kontaktu

Relację (10) można też przedstawić w postaci

$$E_{pr} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i (p_i - r_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m k_j (p_j - r_j - \Delta_j)^2 \cdot H(p_j - r_j - \Delta_j), \quad (11)$$

gdzie  $H(p_j - r_j - \Delta_j)$  – funkcja Heaviside'a

Energia potencjalna wyrażona wzorami (10) lub (11) w bazie współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{g}$  przybiera postać

$$E_{pr} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{K}_{pr} \mathbf{g}, \quad (12)$$

gdzie:

$\mathbf{K}_{pr} = \mathbf{K}_{rp}^T = -\mathbf{R}\{k_i\}\mathbf{P}_q^T$  – macierz sztywności połączenia płyty z rusztem

$\mathbf{R}(\mathbf{P}_q)$  – macierz przemieszczeń pionowych rusztu (płyty) w miejscach lokalizacji przekładek o sztywności  $k_i$  pod płytą

Macierz bezwładności bryły  $\mathbf{B}_b$  przyjęto w ogólnie znanej formie przedstawionej w [1]. Natomiast macierz sztywności bryły  $\mathbf{K}_b$  przyjęto w postaci

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{U}\{k_i^w\}\mathbf{U}^T, \quad (13)$$

gdzie:

$\mathbf{U}$  – macierz przemieszczeń pionowych bryły w miejscach lokalizacji wibroizolacji o sztywności  $k_i^w$  pod bryłą.

Macierz sztywności  $\mathbf{K}_{qb}$  połączenia bryły z płytą jest wyrażona wzorem

$$\mathbf{K}_{qb} = \mathbf{K}_{bq}^T = -\mathbf{V}\{k_i^w\}\mathbf{U}^T \quad (14)$$

W podobny sposób można zapisać poszczególne macierze tłumienia. Przedstawiono je w formach poniżej

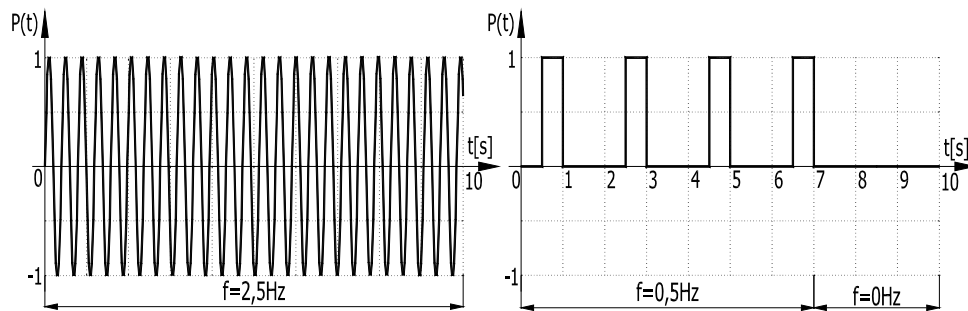
$$\mathbf{C}_q = \mu\mathbf{B}_q + \beta\mathbf{K}_q + \mathbf{V}\{c_i^w\}\mathbf{V}^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{C}_b = \mu\mathbf{B}_b + \mathbf{U}\{c_i^w\}\mathbf{U}^T, \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_{qb} = \mathbf{C}_{bq}^T = -\mathbf{V}\{c_i^w\}\mathbf{U}^T, \quad (17)$$

gdzie  $\mu, \beta$  – współczynniki tłumienia,  $c_i^w$  – stała tłumienia wibroizolacji maszyny.

W rozpatrywanym przypadku jako obciążenie dynamiczne przyjęto wymuszenia w postaci typowej dla ustalonego ruchu roboczego maszyny tkackiej oraz młota matrycowego według [3]. Na Rys. 3a oraz 3b przedstawiono przyjęte przebiegi.



Rysunek 3: Wymuszenie: a) harmoniczne (praca maszyny tkackiej w stanie ustalonym), b) w postaci serii impulsów prostokątnych (młot matrycowy)

### 3. ANALIZY NUMERYCZNE

Rozpatruje się tu układ przedstawiony na Rys. 1, w którym przyjęto następujące parametry  $a = 9$  m,  $b = 6$  m,  $c = 3$  m,  $h = 4$  m oraz grubość płyty stropowej  $h_p = 0,3$  m. Użytkowano w ten sposób model obliczeniowy pokazany na Rys. 4.

Wibroizolatory maszyny rozmieszczone są w jej czterech dolnych narożach. Każdy z nich składa się z jednej więzi sprężysto – tłumiącej o sztywności  $k_i = 2 \cdot 10^6$  N/m oraz stałej tłumienia  $c_i = 8,1 \cdot 10^3$  Ns/m.

Uszkodzenie korozyjne zlokalizowane jest w centralnym polu płytowym stropu w miejscu posadowienia maszyny, a jego obszar wynosi  $a \times b = 54$  m<sup>2</sup>.

Ruszt wzmacniający zamontowany jest pod płytą stropową tak jak to pokazano schematycznie na Rys. 1. Belki wzmacniające przyjęto w postaci dwuteowników stalowych typu HEB300. Uszkodzenie przyjmujące postać więzi jednostronnych w miejscach kontaktu pomiędzy płytą stropową oraz rusztem przyjęto w trzech punktach charakterystycznych (końce oraz środek belki wzmacniającej).

W Tabelach 1 i 2 przedstawiono wyniki z przeprowadzonych analiz obliczeniowych. Na Rys. 5 przedstawiono przebiegi pionowych drgań centralnego punktu płyty dla układów nieuszkodzonych oraz uszkodzonych od przedstawionych wymuszeń.

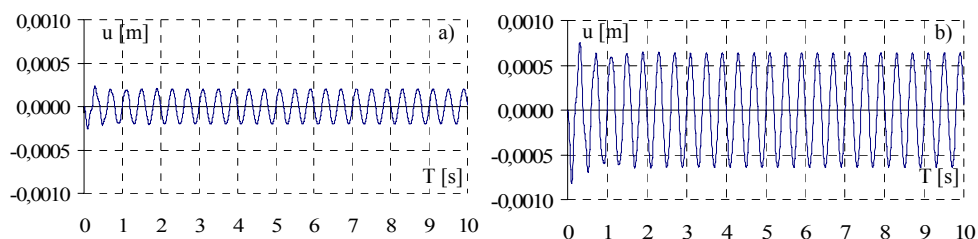
Tabela 1. Amplitudy pionowego przemieszczenia dynamicznego centralnego punktu płyty w przypadku lokalnej korozji płyty stropowej

Wzbudzenie harmoniczne (praca maszyny w stanie ustalonym)					
Zmniejszenie E oraz $\nu$ [%]	0	10	20	50	90
Przemieszczenie dynamiczne $u$ [mm]	0,204	0,227	0,252	0,367	0,646
Wzrost [%]	0	10,1	19,0	44,4	68,7
Wymuszenie krótkotrwałe w postaci impulsów prostokątnych					
Zmniejszenie E oraz $\nu$ [%]	0	10	20	50	90
Przemieszczenie dynamiczne $u$ [mm]	0,343	0,381	0,425	0,617	1,034
Wzrost [%]	0	11,1	19,3	44,4	66,8

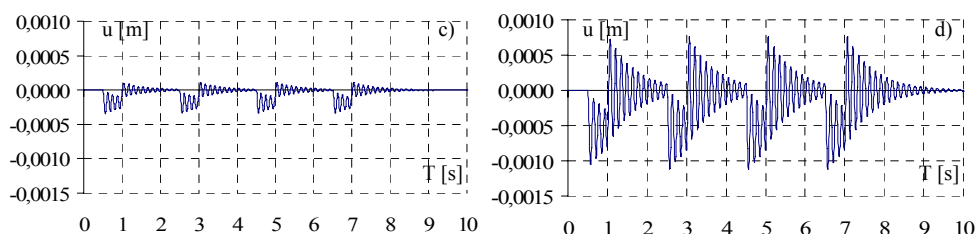
Tabela 2. Amplitudy pionowego przemieszczenia dynamicznego centralnego punktu płyty w przypadku błędnie wykonanego wzmocnienia stropu

Wzbudzenie harmoniczne (praca maszyny w stanie ustalonym)					
Dylatacja $\Delta$ [mm]	0	0,1	1	5	10
Przemieszczenie dynamiczne $u$ [mm]	0,182	0,187	0,216	0,228	0,239
Wzrost [%]	0	2,7	15,7	20,2	23,8
Wymuszenie krótkotrwałe w postaci impulsów prostokątnych					
Dylatacja $\Delta$ [mm]	0	0,1	1	5	10
Przemieszczenie dynamiczne $u$ [mm]	0,309	0,317	0,365	0,385	0,403
Wzrost [%]	0	2,5	15,3	19,7	23,3

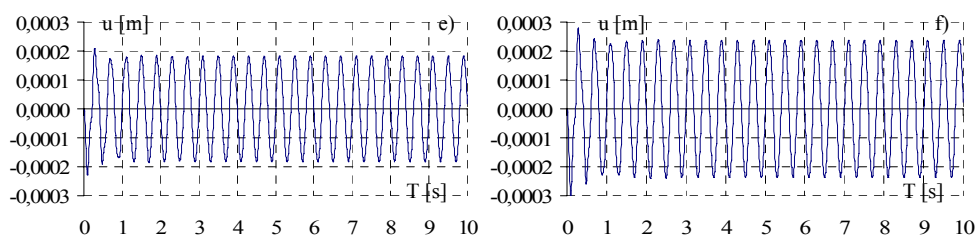




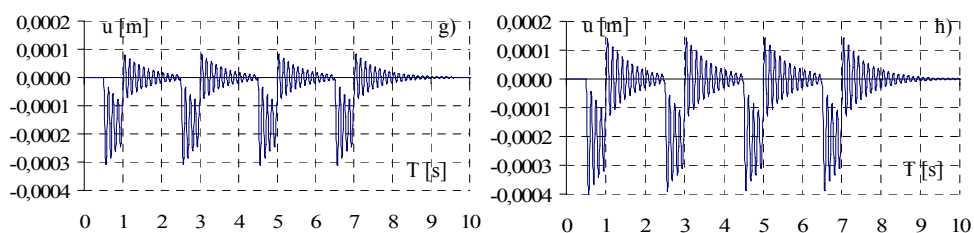
Rysunek 5a i 5b. Wykresy przemieszczenia dynamicznego dla układu nieuszkodzonego oraz uszkodzonego (zm. E oraz  $\nu - 90\%$ ) od wzbudzenia harmonicznego przy  $\Delta = 0$



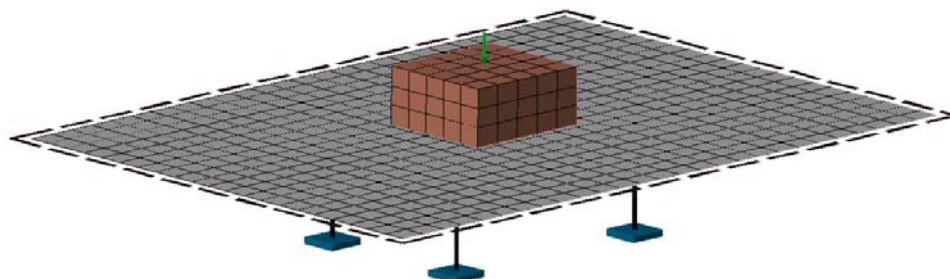
Rysunek 5c i 5d. Wykresy przemieszczenia dynamicznego dla układu nieuszkodzonego oraz uszkodzonego (zm. E oraz  $\nu - 90\%$ ) od wzbudzenia impulsowego przy  $\Delta = 0$



Rysunek 5e i 5f. Wykresy przemieszczenia dynamicznego dla układu nieuszkodzonego oraz uszkodzonego ( $\Delta = 10$  mm) od wzbudzenia harmonicznego przy zm. E oraz  $\nu - 19\%$



Rysunek 5g i 5h. Wykresy przemieszczenia dynamicznego dla układu nieuszkodzonego oraz uszkodzonego ( $\Delta = 10$  mm) od wzbudzenia impulsowego przy zm. E oraz  $\nu - 19\%$



Rysunek 4. Model numeryczny rozpatrywanego układu

W pierwszej tabeli pokazano amplitudy pionowego przemieszczenia dynamicznego centralnego punktu płyty w przypadku lokalnej korozji płyty stropowej dla różnych wartości zmniejszenia  $E$  oraz  $\nu$ .

Drugi przypadek określa pionowe przemieszczenia dynamiczne tego samego punktu płyty w sytuacji, gdy pod stropem znajduje się błędnie wykonane wzmocnienie w postaci rusztu, przy jednoczesnym zmniejszeniu  $E$  oraz  $\nu$  wynoszącym 19 % (pomiar określony na podstawie badań doświadczalnych).

#### 4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI KOŃCOWE

W pracy rozważono wpływ lokalnego zmniejszenia modułu  $E$  oraz współczynnika  $\nu$  betonu płyty w wyniku korozyjnego działania oleju maszynowego lub substancji chemicznych. Przedstawiono również problem błędnego wzmocnienia płyty rusztem stalowym, który zamontowano pod stropem.

W rozpatrywanych przykładach przyrost pionowego przemieszczenia dynamicznego centralnego punktu płyty w układach uszkodzonych w stosunku do układów nieuszkodzonych w przypadku lokalnej korozji płyty stropowej wynosi od 10,1 % do 68,7 %. Natomiast dla błędnego wykonania wzmocnienia płyty stropowej (pojawienie się więzi jednostronnych w punktach kontaktu pomiędzy rusztem i płytą) przyrost ten waha się w granicach od 2,5 % do 23,8 %.

#### LITERATURA

- [1] W. Mironowicz, M. Sęk, Problem of unilateral constraints in the dynamics of the floor loaded with a machine, PAMM - Proc. Appl. Math. Mech. 6, 105-106, 2006.
- [2] J. Goliński, *Wibroizolacja maszyn i urządzeń*, Wydawnictwo Naukowo – Techniczne, Warszawa, 1979.
- [3] J. Lipiński, *Fundamenty pod maszyny*, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1985.

## **WYKRYWANIE USZKODZEŃ KONSTRUKCJI Z WYKORZYSTANIEM FAL SPRĘŻYSTYCH ORAZ SZTUCZNYCH SIECI NEURONOWYCH**

**Piotr Nazarko, Leonard Ziemiański**

Katedra Mechaniki Konstrukcji, Politechnika Rzeszowska  
ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów  
e-mail: {pnazarko, ziele}@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *Examination of structures integrity and failures detection are nowadays of great interest for both civil infrastructure and industry systems. This paper presents Structural Health Monitoring (SHM) technique that was tested on several laboratory models and utilizes elastic wave propagation phenomenon. Furthermore, it describes signals feature extraction procedure by using Principal Component Analysis (PCA). Artificial Neural Networks (ANNs) and statistical learning theory are used to determine and classify structure's damages. The results show that data reduction using PCA, followed by implementation of ANNs patterns recognition, provide a good indication of failure occurrence and they may be used for SHM.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Z uwagi na aspekt ekonomiczny, społeczny oraz bezpieczeństwo wewnętrzne kraju, konstrukcje budowlane, inżynieryjne i przemysłowe są często uważane za obiekty strategiczne. Na całym świecie kwestią bardzo istotną stają się zaprojektowanie tych konstrukcji na odpowiednio długi czas użytkowania oraz późniejsze ich utrzymanie. Ponieważ obiekty takie narażone są na uszkodzenia, a ich stan stale się pogarsza, wraz z upływem czasu koszty ich utrzymania znacznie wzrastają.

Działania mające na celu utrzymanie konstrukcji, ogólnie podzielić można na *utrzymanie zapobiegawcze*, którego zaniechanie generować będzie więcej kosztów na późniejszym etapie zapewnienia bezpiecznego użytkowania konstrukcji, oraz *utrzymanie zasadnicze*, wymagane do zachowania bezpieczeństwa konstrukcji [1]. W ostatnich latach można także zauważyć rozwój koncepcji projektowania i planowania inspekcji konstrukcji (zwłaszcza obiektów takich jak mosty, platformy, itp.). Jest to uzasadniane potrzebą optymalizacji kosztów utrzymania oraz uzyskania wyższego poziomu bezpieczeństwa. Szczególnie ważną dziedziną dla konstrukcji budowlanych i zastosowań inżynierskich, stało się *monitorowanie stanu konstrukcji* (SHM). Systemy monitorowania stanu konstrukcji, utożsamiane także z identyfikacją uszkodzeń, stały się bardzo ważnym elementem poprawiającym bezpieczeństwo i niezawodność konstrukcji. Obecnie są one wykorzystywane do wykonywania badań

nieniszczących oraz przeprowadzania inspekcji w celu wykrycia obecności uszkodzenia, jego położenia, rozmiaru, a czasem nawet do oszacowania pozostałego czasu użytkowania konstrukcji. Stale też poszukiwane są nowe techniki monitorowania stanu konstrukcji, które będą w stanie poprawić bezpieczeństwo i niezawodność ich użytkowania.

## 2. PODSTAWY IDENTYFIKACJI USZKODZEŃ

Zadaniem systemów monitorowania konstrukcji jest zbieranie informacji o występujących w niej uszkodzeniach, aby poprzez podejmowane działania przywrócić systemowi odpowiednio wysoką sprawność funkcjonowania lub przynajmniej zapewnić bezpieczeństwo jej użytkowania. Proces identyfikacji uszkodzeń przedstawić można jako hierarchiczny układ następujących elementów [2]:

- *detekcja* - jakościowa oznaka możliwości wystąpienia w konstrukcji uszkodzenia,
- *lokalizacja* - informacja o prawdopodobnym położeniu uszkodzenia,
- *klasyfikacja* - informacja o typie uszkodzenia,
- *ocena* - estymacja wielkości (zasięgu) uszkodzenia,
- *predykcja* - informacja o bezpieczeństwie konstrukcji oraz szacowanym czasie bezpiecznego jej użytkowania.

Łatwo sobie wyobrazić, że *klasyfikacja* jest istotna dla prawidłowej *oceny* i *predykcji*. Natomiast *predykcji*, w odróżnieniu od pozostałych składników, nie można dokonać bez zrozumienia mechanizmu uszkodzenia i znajomości jego charakterystyki. Sama jednak *detekcja*, także w odróżnieniu od pozostałych składników, może być zrealizowana bez wcześniejszej wiedzy o zachowaniu się uszkodzonej konstrukcji.

### 2.1. Podstawowe pojęcia

Obecnie wiele nowoczesnych podejść wykrywania uszkodzeń bazuje na idei *rozpoznawania wzorców*. Ogólnie rzecz biorąc, polega to na przypisaniu pewnemu wzorcowi, np. z serii pomiarów, odpowiadającej mu etykiety (zwykle ze skończonego zbioru). Odpowiednie etykiety klas mogą kodować m.in. typ uszkodzenia, jego położenie, itp. Chcąc jednak zrealizować wyższy poziom identyfikacji, konieczne jest zwykle zbudowanie wzorców odpowiadających każdej z klas, tworząc tym samym zbiór *wektorów trenujących* jednoznacznie związanych z daną klasą. Jednym z wielu algorytmów działających poprzez trenowanie są *sztuczne sieci neuronowe* (SSN) [3]. Zwykle potrzebnych jest do tego dość wiele wzorców, a algorytm uczący, w którym danym wejściom przypisane są pożądane klasy nazywa się *uczeniem pod nadzorem* [1,4].

Jeśli konieczne jest uczenie pod nadzorem, wzorce dla każdego z identyfikowanych rodzajów uszkodzenia uzyskać możemy poprzez ich obliczanie, modelowanie numeryczne lub eksperyment. Modelowanie takich zjawisk dla konstrukcji geometrycznie lub materiałowo złożonych, np. wykorzystując metodę elementów skończonych, wymaga dokładnej siatki, co z kolei może powodować bardzo czasochłonne obliczenia. Dla konstrukcji kompozytowych lub materiałów nietypowych mogą nawet nie istnieć konstytutywne dla nich modele. W takich przypadkach uszkodzenie może być trudne do modelowania, czyniąc nawet konstrukcję

dynamicznie nieliniową (np. poprzez otwierające i zamykające się pęknięcia zmęczeniowe). Nagromadzenia odpowiedniej liczby wzorców w przypadku wykonywania eksperymentów wymaga natomiast wykonanie kilku kopi modelu i uszkodzanie ich na wszystkie możliwe sposoby jakie pojawić się mogą także w rzeczywistości. Dla objętościowo dużych układów, takich jak mosty czy samoloty, jest to zwyczajnie niemożliwe.

Istnieje także alternatywa do algorytmu uczenia pod nadzorem - *uczenie bez nadzoru*. Jednakże taka forma uczenia ma zastosowanie jedynie do pierwszego poziomu identyfikacji - *detekcji*, a technika ta jest często utożsamiana z *wykrywaniem anomalii* (ang. *novelty*, *anomaly detection* [1, 2]). Idea tej metody polega na założeniu, że do trenowania systemu diagnostycznego wykorzystywane są jedynie dane pochodzące z pomiarów przy normalnych warunkach użytkowania konstrukcji. W ten sposób tworzony jest model nieuszkodzonej konstrukcji, a następnie w trakcie monitorowania nowo pozyskane dane są porównywane z uzyskanym wcześniej modelem. Jeśli występują znaczne odchylenia, algorytm sygnalizuje wystąpienie anomalii. Korzyści takiego podejścia wydają się oczywiste. Jeśli dane trenujące chcemy otrzymać z modelu numerycznego, potrzebny jest jedynie przypadek bez uszkodzenia. Natomiast gdy dane pochodzą z eksperymentu, wówczas nie ma potrzeby niszczenia modelu. Pomimo, że detekcja anomalii jest zaledwie pierwszym poziomem identyfikacji, istnieje wiele sytuacji, gdy jest to wystarczające (np. w systemach gdzie ze względów bezpieczeństwa każde wykryte uszkodzenie wymagać będzie wyłączenie elementu z użytkowania).

Często znaleźć można kompromis pomiędzy poziomem identyfikacji, a ponoszonymi kosztami trenowania systemu diagnostycznego. Głównym wymaganiem dla *inteligentnych* systemów wykrywania uszkodzeń pozostaje zapewnienie uzyskania informacji adekwatnej do założonego poziomu identyfikacji. Ich zadaniem jest zbieranie odpowiednich informacji i przetwarzanie ich we właściwy sposób, biorąc pod uwagę niepewność danych i dokładność diagnostyki na wybranym poziomie.

Biorąc pod uwagę algorytmy monitorowania konstrukcji (wykorzystujące np. jej drgania), można je podzielić na dwie kategorie [1]:

- metody bez-modelowe,
- metody wykorzystujące modele konstrukcji.

Metody nie wymagające modelu wykorzystują do wykrycia i zlokalizowania uszkodzenia w konstrukcji zmiany rejestrowane bezpośrednio przez czujniki. Można je uważać za metody, w których przetwarzanie sygnału, ekstrakcja parametrów i przetwarzanie wzorców zostały połączone w celu rozwiązania zadania identyfikacji uszkodzeń. Metody, które do identyfikacji rozmiaru i położenia uszkodzenia wykorzystują model, bazują na zmianach funkcji odpowiedzi konstrukcji lub parametrach modalnych takich jak częstości własne, formy własne (lub ich pochodne).

## 2.2. Identyfikacja uszkodzenia przez rozpoznawanie wzorców

Wykrywanie uszkodzeń konstrukcji na podstawie analizy jej odpowiedzi rozpatrywać można jako zadanie rozpoznawania wzorców, ponieważ taki system musi dostrzegać różnice pomiędzy stanami „normalnymi” (tj. bez uszkodzenia) oraz konstrukcją w stanie uszkodzonym. Proces rozpoznawania wzorców i klasyfikacji podzielić można na trzy etapy [1]:

- pomiary,
- ekstrakcja parametrów, redukcja cech,
- przetwarzanie wzorców.

Etap pomiarów polega na zbieraniu surowych danych z badań *in situ*, poprzez zestaw czujników ulokowanych w niewrażliwych miejscach konstrukcji (np. czasowe przebiegi drgań) oraz ich oczyszczaniu (filtrowanie, eliminacja pomiarów odstających, itp.). Następnie ekstrakcja parametrów ma na celu eliminację nadmiarowych informacji, redukując zbiór danych tylko do cech dominujących dla każdego pomiaru, jednocześnie czyniąc je odróżnialnymi od innych klas danych (np. uszkodzona i nieuszkodzona). Cechy te mogą być zwykle uzyskane przez analizę przebiegów czasowych, widma częstotliwości, dekompozycji falkowej lub parametrów modalnych. Istniejące algorytmy statystyczne (np. analiza składników głównych, analiza składników niezależnych) mogą być użyte do zmniejszenia wymiaru mierzonych danych (kompresji), powodując otrzymanie mało wymiarowego zbioru danych, zawierającego składniki główne układu.

Przetwarzanie wzorców polega na trenowaniu algorytmu podejmującego decyzje o analizowanych wektorach cech (np. parametrach modalnych, częstotliwościowych funkcjach odpowiedzi, współczynnikach auto-regresji, składnikach głównych) w celu wytworzenia zasad klasyfikacji bądź podejmowania decyzji o normalnym lub uszkodzonym stanie konstrukcji. Innymi słowy, wektor cech lub wektor wzorców są klasyfikowane na jedną lub dwie klasy (stan nieuszkodzony i uszkodzony) używając jedynie zasad podejmowania decyzji zaimplementowanych przez algorytm rozpoznawania wzorców.

Spośród systemów inteligentnych, zdefiniować można trzy typy algorytmów, w zależności od poziomu diagnostyki uszkodzenia (detekcja, lokalizacja, klasyfikacja, itd.) [1, 2, 5]:

- *wykrywanie anomalii*: algorytm ten sygnalizuje czy zestaw cech należy do warunków nieuszkodzonych czy też nie. Jest to zadanie dwu-klasowe (nieuszkodzona/uszkodzona), do którego może być użyte uczenie bez nadzoru. Niektóre z metod wykrywania anomalii zawierają: analizę wartości odstających, metody gęstości jądra, auto-asocjacyjne sieci neuronowe, sieci Kohonena, metody wektorów wspierających.
- *klasyfikacja*: algorytm definiuje dyskretny podział wieloklasowy. Jest to zadanie klasyfikacji wieloklasowej i wymaga, aby regułą klasyfikacji uszkodzenia (lokalizacja, typ, itp.) można było przypisać etykiety pewnych klastrów. Algorytm ten wskazuje do którego klastra dane mogą zostać zaliczone. Przykłady takich algorytmów wykorzystują: klasyfikujące sieci neuronowe, metody wektorów wspierających i klasyfikatory najbliższych sąsiadów.
- *regresja*: wyjściem algorytmu jest jedna bądź wiele zmiennych ciągłych. W tym przypadku uszkodzenie może być związane z oceną położenia, nasilenia, itd. Problem regresji jest często nieliniowy i jest szczególnie odpowiedni dla sieci neuronowych oraz regresyjnych metod wektorów wspierających.

### 3. WYKRYWANIE USZKODZEŃ Z WYKORZYSTANIEM PROPAGACJI FAL

Zadanie wykrywania uszkodzeń zdefiniować można jako problem rozpoznawania wzorców, gdzie wzorce mogą być zdefiniowane przez istnienie uszkodzenia. Na taki system składają się następujące procesy:

- zbieranie danych,
- ekstrakcja cech sygnałów i redukcja wymiaru (np. analiza składników głównych),
- wyrywanie uszkodzeń (rozpoznawanie wzorców) poprzez systemy uczące się.

Do wyznaczenia pewnych dynamicznych cech układu wykorzystano czasowe przebiegi propagacji fal sprężystych w badanym modelu. Ekstrakcji parametrów sygnału i redukcji wymiaru danych dokonano poprzez analizę składników głównych [1, 6]. Pozwala to na przedstawienie danych zmierzonych w dziedzinie czasu jako liniową kombinację dominujących składników statystycznych oraz macierzy mieszającej. Ponieważ większość danych dostępnych dla monitorowania stanu konstrukcji pochodzi z konstrukcji bez uszkodzenia, proces detekcji uszkodzeń bazuje na problemie klasyfikacji jedno-klasowej. Proces rozpoznawania wzorców (detekcji uszkodzeń) został tu przeprowadzony z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych, które zostały zaimplementowane do wykrywania anomalii na podstawie wydzielonych cech sygnału (macierzy mieszającej).

#### 3.1. Analiza składników głównych (PCA)

Analiza składników głównych (ang. *Principal Component Analysis* – PCA) jest metodą statystyczną, którą określa przekształcenie liniowe  $\mathbf{y} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ . Transformuje ono opis procesu reprezentowanego wektorem  $\mathbf{x} \in R^N$  w wektor  $\mathbf{y} \in R^K$  za pośrednictwem macierzy  $\mathbf{W}$  w taki sposób, że przestrzeń wyjściowa o zredukowanym wymiarze ( $K < N$ ) zachowuje najważniejsze informacje dotyczące procesu [4, 6]. Transformacja PCA zamienia dużą ilość informacji zawartej we wzajemnie skorelowanych danych wejściowych w zbiór statystycznie niezależnych składników uporządkowanych według ich ważności. Stanowi to zatem formę kompresji stratnej, znanej jako transformacja Karhunen-Loeve'go.

#### 3.2. SSN do wykrywania anomalii

Zadaniem systemów uczących się wykrywania anomalii jest decydowanie czy dany wektor wejściowy jest podobny, czy też nie, do zestawu wektorów trenujących utożsamianych z „normalnym” stanem pracy konstrukcji. Nawiązując do procesu wykrywania uszkodzeń, zadaniem takiego systemu jest określenie czy dany zestaw parametrów wejściowych odpowiada danym dla konstrukcji nieuszkodzonej. W przypadku, gdy dane te nie pasują do założonego modelu, takiemu zestawowi danych przypisywany jest scenariusz wystąpienia w konstrukcji uszkodzenia.

Zakładamy ponadto, że w całej przestrzeni wejścia  $\mathbf{S} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  dysponujemy zbiorem  $\mathbf{X}$  wektorów trenujących, gdzie każdy wektor  $\mathbf{x}_i$  jest wektorem „normalnym”. Aby wiedzieć czy dany wektor  $\mathbf{x}$  należy do grupy *normalnej* czy *anormalnej* (nieuszkodzonej czy uszkodzonej), konieczne jest zdefiniowanie kryterium decyzji. Jednak aby je zastosować, rozstrzygnąć należy jak ocenić słowną zmienną „podobne” oraz „nie podobne” (nieuszkodzone oraz uszkodzone). W prezentowanym podejściu, będzie to podstawowym zadaniem

SSN. Ich uczenie polegać będzie na estymowaniu nieznannej zależności pomiędzy danymi wejściowymi i wyjściowymi systemu, wykorzystując dostępną bazę wzorców, tj. znane wartości wejścia-wyjścia. Gdy raz taka zależność zostanie oszacowana, można jej używać do klasyfikacji lub regresji. W przypadku wykrywania uszkodzeń, uczenie pozwala oszacować zależność (kryterium decyzji) pomiędzy cechami wydzielonymi ze zmierzonych danych (wejściami) oraz etykietami związanymi z odpowiednim stanem konstrukcji (wyjściami). Wykorzystywane do tego celu algorytmy uczenia znajdują zależność odwzorowania danych, minimalizując przy tym błąd pomiędzy aproksymowanym modelem i nieznaną rzeczywistą funkcją odwzorowania.

W ogólnym modelu uczenia ze wzorców decydującą rolę odgrywają trzy składniki [1]:

- *losowy wektor wejściowy*,  $\mathbf{x} \in R^n$ , dane wejściowe systemu (np. wyznaczone parametry dynamiczne),
- *wartość wyjścia*,  $\mathbf{y} \in R^m$ , stowarzyszona z każdym wektorem wejściowym  $\mathbf{x}$  (rzeczywiste przypadki z uszkodzeniem i bez uszkodzenia),
- *wartość odpowiedzi*,  $\hat{\mathbf{y}} \in R^m$ , wynik zastosowanych funkcji odwzorowania (estymowane przypadki konstrukcji z uszkodzeniem i bez uszkodzenia).

Warto w tym miejscu zaznaczyć także, że wzorce użyte w procesie uczenia powinny być reprezentatywne dla opisu danego zjawiska (tutaj scenariusza uszkodzenia).

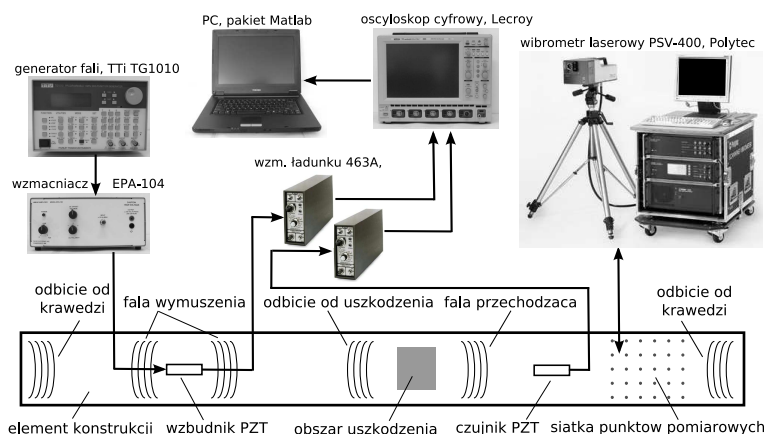
#### 4. BADANIA LABORATORYJNE WYKRYWANIA USZKODZEŃ

Opisane w pracy podejście zilustrowane i sprawdzone zostało na laboratoryjnym modelu pasma aluminium o wymiarach 10x1x2000 mm. Do obu końców badanego elementu przytwierdzono przetworniki piezoelektryczne, których zadaniem było wprowadzanie i odbieranie propagujących w modelu fal sprężystych. Wykorzystywane do detekcji uszkodzeń zjawisko propagacji fal sprężystych bazuje na założeniu, że napotkane przez propagującą falę przeszkody (np. w postaci uszkodzenia) powodować będą jej zmiany poprzez występujące odbicia i/lub tłumienie przechodzącej przez przeszkodę fali. Analizując czasowe przebiegi fali sprężystej pod kątem zmian takich parametrów jak amplituda fali, czas jej przelotu, zmiana fazy, częstotliwości, itp., wnioskować można m.in. o występowaniu uszkodzenia, jego położeniu, a nawet wielkości [7, 8, 9]. Idea badań jak i elementy toru pomiarowego przedstawione zostały na Rys. 1.

##### 4.1. Opis danych

Analizowane w artykule dane dotyczą przebiegów czasowych fal sprężystych rejestrowanych w trakcie badań laboratoryjnych zarówno dla modelu konstrukcji bez uszkodzenia, jak i konstrukcji z uszkodzeniem. Rozpatrywane przypadki uszkodzeń zebrano w Tabeli 1, a schemat rozmieszczenia przetworników PZT oraz wymiary modelu przedstawiono na Rys. 2a. Ponieważ uszkodzenie wprowadzano systematycznie zwiększając średnicę wierconych otworów (średnicy  $\phi = 1, 0 \div 3, 2$  mm), stąd też dla każdego przypadku uszkodzenia wygenerowano nawet po 8 wzorców. Dodatkowo pomiar powtarzany był 3-krotnie, każdorazowo ustawiając parametry wymuszenia fali sprężystej, przepinając kable oraz ponownie mocując model. Łączna liczba wzorców dla konstrukcji bez uszkodzenia wynosiła 22





Rysunek 1: Idea badań oraz elementy toru pomiarowego.

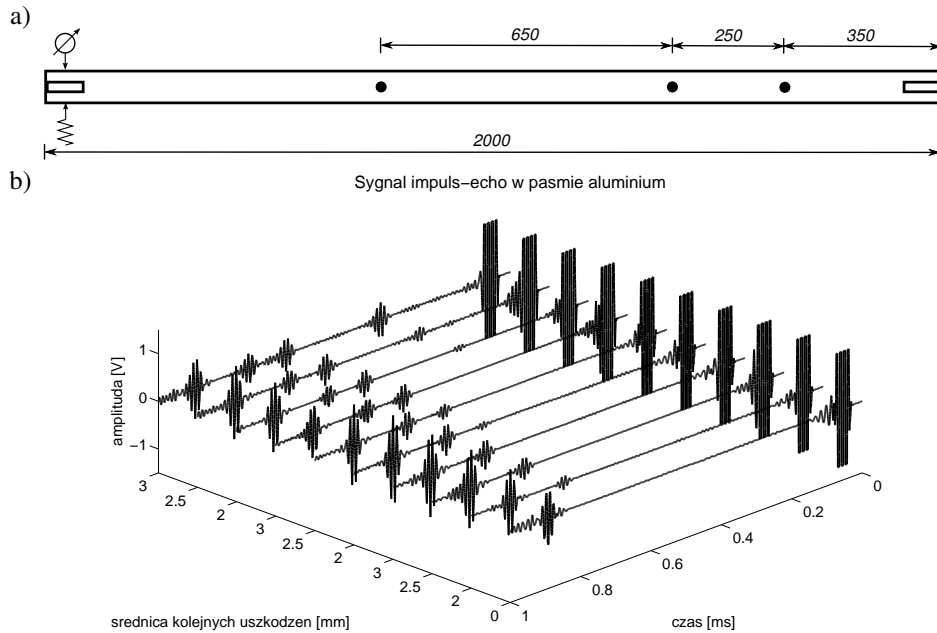
Tabela 1: Analizowane wzorce uszkodzenia.

Scenariusz	Opis przypadku
nieuszkodzona	konstrukcja w stanie początkowym
1 uszkodzenie	pojedyncze uszkodzenie (otwór) w odległości 35 cm od początku pasma
2 uszkodzenia	dwa uszkodzenia (otwory) w odległości 35 oraz 60 cm od początku pasma
3 uszkodzenia	trzy uszkodzenia (otwory) w odległości 35, 60 oraz 125 cm od początku pasma

(zarejestrowane dla różnych warunków otoczenia), natomiast dla modelu z uszkodzeniami liczba wzorców wynosiła 69 ( $3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 8$ ). Wybrane przykłady zarejestrowanych przebiegów pokazano na Rys. 2b. Pierwszy z sygnałów odpowiada modelowi bez uszkodzenia. Wyróżnić tam można wygenerowany impuls (paczkę) wymuszenia fali oraz odbicie od końca (krawędzi) pasma. Kolejne przebiegi czasowe fali odpowiadają kolejno sytuacji z pojedynczym uszkodzeniem oraz odpowiednio dwoma i trzema uszkodzeniami. Można tam zauważyć dodatkowe odbicia fali wynikające z pojawienia się na długości pasma wprowadzonych do niego uszkodzeń. Dla przejrzystości pominięto pośrednie przypadki różnych średnic wierconych otworów.

#### 4.2. Kompresja sygnału PCA

Czasowe przebiegi fali sprężystej dla przypadku konstrukcji bez uszkodzenia (22 wzorce) utworzyły macierz o wymiarze  $22 \times 2502$ , gdzie 2502 jest liczbą punktów każdego z sygnałów. Trudno jednak w tej sytuacji wyobrazić sobie przetwarzanie tak długich wektorów wejściowych bezpośrednio przez SSN. Dlatego w celu zmniejszenia wymiaru danych zastosowano PCA. Ograniczając się zaledwie do 16 dominujących składników głównych, zachowanych w nich zostaje 99.97% informacji oryginalnych. Następnie wybranych 16 skład-



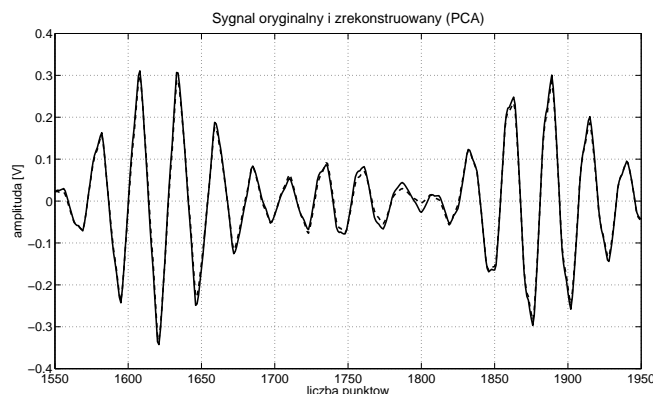
Rysunek 2: a) Schemat rozmieszczenia przetworników oraz wymiary modelu, b) Zestawienie wybranych przebiegów fali sprężystej dla modelu bez uszkodzenia i z uszkodzeniem; wymuszenie na końcu pasma paczką 4,5 fali sinus o częstotliwości 89.5 kHz.

ników głównych oraz odpowiadająca im macierz  $\mathbf{W}$  o wymiarze  $22 \times 16$ , użyte zostały do rekonstrukcji sygnałów. Pozwoliło to na uzyskanie dokładności rekonstrukcji sygnału na poziomie 99,52%.

Podobną procedurę zastosowano także do 67 wzorców odpowiadających przypadkowi konstrukcji z uszkodzeniem. Zrekonstruowany fragment sygnału z uszkodzeniem został dla przykładu pokazany na Rys. 3 wraz z oryginalnym przebiegiem fali. Można tam zauważyć bardzo dobrą zgodność rekonstrukcji, co potwierdza, że wyznaczone składniki główne jednoznacznie charakteryzują zarówno sygnały dla konstrukcji nieuszkodzonej, jak i przypadków z uszkodzeniem.

#### 4.3. Detekcja uszkodzeń za pomocą SSN

Wykorzystując PCA, wszystkie czasowe przebiegi fali sprężystej, uzyskane dla przypadku nieuszkodzonej i uszkodzonej konstrukcji, zostały przetransformowane poprzez liniową kombinację macierzy mieszającej oraz wybranych składników głównych. Macierz mieszająca, która reprezentuje tu pewne dynamiczne cechy konstrukcji z uszkodzeniem i bez uszkodzenia, została użyta jako dane wejściowe do sieci neuronowej wykrywającej uszkodzenia. Dostępne dane (22 wzorce) podzielone zostały na zbiór 17 wzorców uczących (80%) oraz 5 wzorców walidujących. Do wykrywania uszkodzeń (otworów) wykorzystano autoasocjacyjną sieć neuronową, trenowaną algorytmem Levenberga-Marquardta. Zadaniem tego



Rysunek 3: Porównanie fragmentu oryginalnego i zrekonstruowanego fragmentu przebiegu czasowego fali sprężystej dla przypadku konstrukcji z uszkodzeniem.

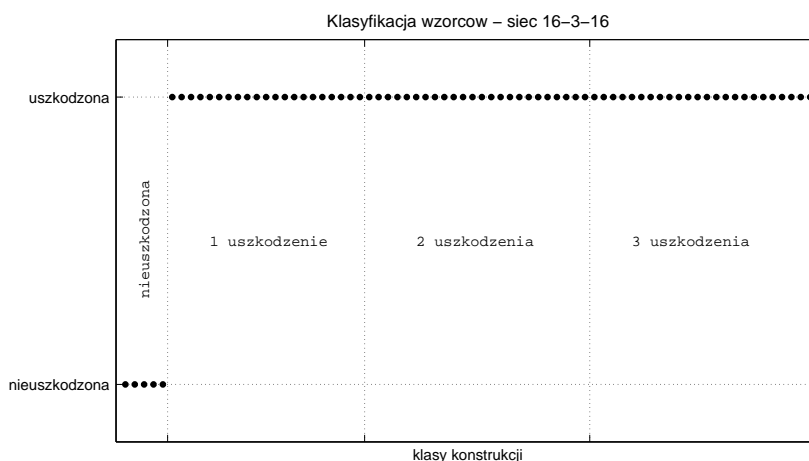
typu sieci neuronowych jest nauczenie się przekształcenia jej wartości wejściowych w identyczne wartości wyjściowe, odwzorowując tym samym zależność parametrów wejściowych oraz odpowiadający im stan konstrukcji. Dlatego więc, jeśli do wytrenowanej sieci neuronowej wprowadzimy dane dla konstrukcji uszkodzonej, wzrośnie wówczas indeks uszkodzenia zdefiniowany jako Euklidesowa odległość pomiędzy docelowym wyjściem, a wartością aproksymowaną przez sieć neuronową [1]

$$NI(\mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| .$$

Dla konstrukcji nieuszkodzonej, poprawnie wytrenowana sieć neuronowa powinna generować wartości  $NI(\mathbf{y}) \approx 0$ . Natomiast dla danych pochodzących z konstrukcji uszkodzonej, indeks uszkodzenia będzie wskazywał wartość różną od zera, sygnalizując tym samym wystąpienie anomalii.

Sieci auto-asocjacyjne składać się mogą z jednej lub kilku warstw ukrytych. Na potrzeby rozważanego zadania klasyfikacji przyjęto za wystarczające sieci neuronowe z jedną tylko warstwą ukrytą. Na jej architekturę składało się 16 neuronów w warstwie wejściowej, 3 neurony w warstwie ukrytej oraz 16 wyjść (16-3-16). Wielkość warstwy wejściowej jak i wyjściowej podyktowana została długością wektora wejściowego (ilością składników głównych), natomiast liczba neuronów warstwy ukrytej dobrana została doświadczeniowo, dążąc przy tym do dostatecznie precyzyjnego rozdziału klas konstrukcji bez uszkodzenia oraz z uszkodzeniem.

Po zakończeniu procesu uczenia, do SSN wprowadzono zbiór wartości walidujących (dla przypadku konstrukcji bez uszkodzenia) oraz zbiór testujący (dla wszystkich przypadków uszkodzenia). Otrzymane w ten sposób wartości wyjściowe porównane zostały wykorzystując indeks uszkodzenia. Wynik przeprowadzonej detekcji za pomocą SSN pokazany został na Rys. 4. Jak widać wynik dla wybranej pojedynczej wytrenowanej sieci neuronowej daje w tym przypadku 100% skuteczność podziału wzorców na dwie klasy: nieuszkodzoną i uszkodzoną. W Tabeli 2 znaleźć można dodatkowo łączny wynik dla 50 przeprowadzonych powtórzeń trenowania SSN. Otóż w całej serii testów zdarzały się *falszywe alarmy*



Rysunek 4: Klasyfikacja wyników za pomocą sieci neuronowej 16-3-16 (walidacja i testowanie).

Tabela 2: Błędy klasyfikacji sieci 16-3-16.

Klasy rzeczywiste	Wynik wybranej sieci		Łączny wynik serii powtórzeń	
	nieuszkodzona	uszkodzona	nieuszkodzona	uszkodzona
nieuszkodzona	100%	0%	97.2%	2.8%
uszkodzona	0%	100%	0%	100%

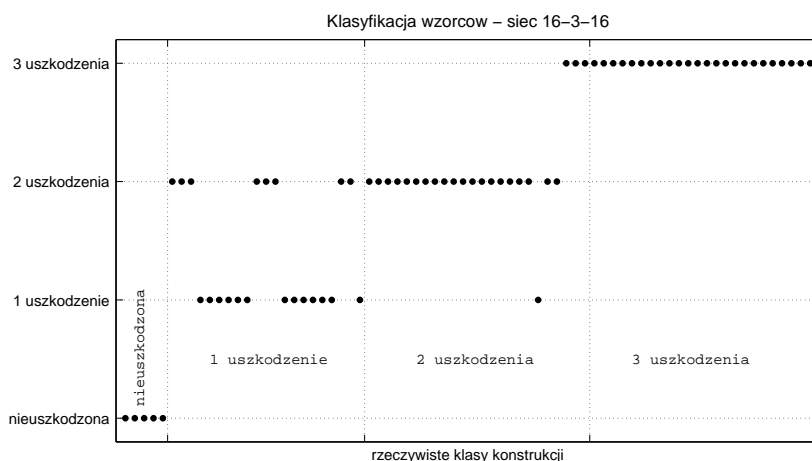
w odniesieniu do pojedynczych nieuszkodzonych wzorców walidujących. Oznacza to, że konstrukcja w stanie nieuszkodzonym została błędnie potraktowana jako uszkodzona. Jest to oczywiście sytuacja bezpieczna, która nie powoduje ryzyka awarii konstrukcji. Dużo gorszy scenariusz występowałby w przypadku, gdyby stan awaryjny nie został wykryty i nie podjęto by żadnych działań zapobiegawczych.

Bazując na rozkładzie otrzymanych rezultatów, można pokusić się także o próbę rozdzielania wzorców dla każdego przypadku uszkodzenia. Graficzny wynik takiej klasyfikacji pokazany został na Rys. 5. Jakkolwiek rozdzielanie wzorców uszkodzonych od nieuszkodzonych było i jest perfekcyjne, to jednak rozdzielanie poszczególnych klas obarczone jest pewnym błędem. Przyjęte kryterium pozwala poprawnie wydzielić przypadki z trzema uszkodzeniami, lecz wzorce dla przypadku z jednym i dwoma uszkodzeniami są ze sobą wymieszane. Statystyczna ocena wyników przedstawionej klasyfikacji przedstawiona została w Tabeli 3.

## 5. WNIOSKI

Przedstawione w pracy wyniki badań laboratoryjnych oraz neuronowej identyfikacji uszkodzeń pozwalają stwierdzić, że:

- w analizowanych przypadkach wykazano użyteczność zastosowania zjawiska propagacji fal do identyfikacji uszkodzeń oraz monitorowania stanu konstrukcji,



Rysunek 5: Próba rozdzielenia poszczególnych klas konstrukcji - walidacja i testowanie dla sieci 16-3-16.

Tabela 3: Błędy neuronowej klasyfikacji: testowanie.

Klasy rzeczywiste	Predykcja (sieć 16-3-16)			
	nieuszkodzona	1 uszkodzenie	2 uszkodzenia	3 uszkodzenia
nieuszkodzona	<b>100%</b>	0%	0%	0%
1 uszkodzenie	0%	<b>89.2%</b>	10.8%	0%
2 uszkodzenia	0%	1.4%	<b>94.5%</b>	4.1%
3 uszkodzenia	0%	0%	0%	<b>100%</b>

- ekstrakcja parametrów sygnału i redukcja cech za pomocą PCA okazała się efektywnym narzędziem przetwarzania czasowych przebiegów fal sprężystych,
- zastosowanie SSN w zadaniu detekcji uszkodzenia pozwala na poprawny podział wzorców na klasy konstrukcji z uszkodzeniem i bez uszkodzenia,
- wykorzystanie SSN jako klasyfikatora typu uszkodzenia daje poprawne wyniki, jednak są one obarczone błędem klasyfikacji rzędu 10%.

## LITERATURA

- [1] M.R. Hernandez-Garcia, M. Sanchez-Silva, Learning Machines for Structural Damage Detection. N.D. Lagaros, Y. Tsompanakis eds. *Intelligent Computational Paradigms in Earthquake Engineering*, 158–187, 2007.
- [2] K. Worden, J.M. Dulieu-Barton, An Overview of Intelligent Fault Detection in Systems and Structures, *Structural Health Monitoring*, **3**, 85-98, 2004.

- 
- [3] Z. Waszczyszyn, L. Ziemiański, Parameter Identification of Materials and Structures, *CISM Courses and Lectures*, **469**, 256–340, 2005.
- [4] S. Osowski, *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*, WNT, Warszawa 1996.
- [5] W. Staszewski, C. Boller, G. Tomlinson, *Health Monitoring of Aerospace Structures*, John Wiley & Sons, 2004.
- [6] K. Kuźniar, Z. Waszczyszyn, Neural Networks and Principal Component Analysis for Identification of Building Natural Periods, *J. Comp. in Civ. Engrg.*, **20** (6), 431-436, 2006.
- [7] V. Giurgiutiu, Tuned Lamb Wave Excitation and Detection with Piezoelectric Wafer Active Sensors for Structural Health Monitoring, *Journal of intelligent material systems and structures*, **16**, 291-305, 2005.
- [8] B.C. Lee, W. Staszewski, Lamb wave propagation modelling for damage detection: II. Damage monitoring strategy, *Smart Material Structures*, **16**, 260–274, 2007.
- [9] P. Nazarko, L. Ziemiański, Application of neural networks and structural wave propagation phenomenon to quantitative damage evaluation. *Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, Rethymno, Crete, Greece, June 13–16, 2007.

## **ANALIZA SIŁ ODDZIAŁYWANIA W UKŁADZIE OPERATOR – RĘCZNA SZLIFIERKA**

**Stefan Piotrowski, Jacek Snamina**

Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Krakowska  
al. Jana Pawła II 37a, 31-864 Kraków  
e-mail: js@mech.pk.edu.pl

---

**Abstract:** *The paper presents the analysis of dynamic interaction between a hand-arm and a hand-held grinder. A model of the system has been introduced that consists of a discrete model of a grinder and a simply biodynamic model of the human hand-arm. Basic equations describing the motion of the system were introduced. The random vibration (PSD) analysis was done. Some general conclusions were presented and several recommendations on how the vibration level could be reduced.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Ręczne szlifierki są powszechnie stosowane w wielu zakładach pracy w różnych działach gospodarki. W zależności od potrzeby szlifierki wyposaża się w ściernice tarczowe, trzpieniowe ściernice kształtowe, frezy, szczotki druciane itp. Ze względu na konstrukcję, wśród ręcznych szlifierek można wyróżnić pewne grupy: szlifierki proste, w których oś obrotu narzędzia skrawającego pokrywa się z osią silnika napędowego umieszczonego w korpusie, szlifierki kątowe, w których oś obrotu narzędzia przebiega pod kątem w stosunku do osi silnika, szlifierki wahliwe mocowane obrotowo na przegubie, szlifierki napędzane wałkiem giętkim.

Wspólną wadą wszystkich szlifierek ręcznych są duże drgania, na jakie narażony jest operator podczas pracy. W przypadku większości prac warsztatowych i ślusarskich nie stwarzają one istotnego problemu, gdyż czas ekspozycji na drgania jest krótki. W sytuacji natomiast, gdy szlifierki wykorzystywane są w procesie produkcji przez pełną 8-godzinną zmianę, drgania działające na operatora stanowią poważne zagrożenie dla zdrowia. Potwierdzają to liczne przypadki choroby wibracyjnej występującej u operatorów szlifierek ręcznych.

Drgania i hałas są najczęściej występującym czynnikiem szkodliwym w środowisku pracy. Dziesiątki tysięcy pracowników zatrudnionych głównie przy obsłudze ręcznych narzędzi z napędem mechanicznym narażonych jest na drgania. Stąd duże znaczenie mają prace, których celem jest ocena i dokumentacja stanu zagrożenia drganiami a także wszelkie działania zmierzające do zmniejszenia lub wyeliminowania drgań działających na ludzi.

Obróbka ręczna narzędziem z napędem mechanicznym np. szlifierką, analizowana w aspekcie drgań przenoszonych na operatora jest procesem bardzo złożonym. Analizie na-

leży poddać wiele zjawisk oraz wiele źródeł drgań towarzyszących obróbce [1]. Spośród nich można wymienić kilka istotnych z punktu widzenia wibroizolacji.

- Stabilność położenia równowagi jest niezbędna dla prawidłowej pracy. Jej zakłócenia obserwuje się najczęściej przy obróbce silnie zakrzywionych powierzchni ściernicami kształtowymi lub frezami oraz przy szlifowaniu ściernicami tarczowymi o dużym momencie bezwładności. Ten drugi przypadek niestabilności jest wywołany przez swoisty wpływ momentu żyroskopowego na siły skrawania, a można go wyeliminować stosując rozwiązania według patentu [3].
- Stany przejściowe występujące przy rozpoczynaniu lub przerywaniu pracy oraz przy nagłej zmianie warunków obróbki są charakterystyczne dla obróbki ręcznej. Ich udział w pełnym czasie pracy jest zwykle duży, a czasem wręcz trudno mówić o stanie ustalonym. Drgania związane z procesami przejściowymi mają niskie częstotliwości. Model oddziaływań operatora używany do opisu tych zjawisk powinien uwzględnić pewne możliwości sterowania procesem.
- Odrywanie się narzędzia skrawającego od przedmiotu obrabianego zidentyfikowane zostało jako podstawowe źródło drgań o dużych poziomach mierzonych w pasmach 8 i 16 Hz w pewnych przypadkach obróbki. Drgania te są związane z właściwościami dynamicznymi układu operator – narzędzie – przedmiot obrabiany i mają wybitnie niekorzystny wpływ na warunki pracy a także na jakość i wzajemność obróbki. Można je wyeliminować stosując układy wibroizolacji o odpowiednio dobranej strukturze i parametrach [4, 6].
- Drgania o częstotliwości roboczej narzędzia są nie ukierunkowane. Dotyczy to wszystkich obrabiarek ręcznych o obrotowym ruchu narzędzia skrawającego. Drgania wywoływane są błędami kształtu i niewyważeniem narzędzia skrawającego, biciem wrzeciona itp. Największe problemy stwarzają tego typu drgania w szlifierkach pracujących ściernicami tarczowymi o dużych średnicach. Stosowane metody wibroizolacji to eliminatory śrutowo-oliwowe [7], klasyczne tłumiki dynamiczne [4] i układy amortyzacji.
- Drgania wysokoczęstotliwościowe mają liczne źródła zarówno w narzędziu jak i w procesie obróbki. Zwykle w paśmie oktawowym 1000 Hz lub nieco wyżej mieści się częstotliwość zmian sił skrawania, a więc intensywność drgań wiąże się z wydajnością obróbki. Można jednak stosunkowo prostymi metodami ograniczyć przekazywanie tych drgań na operatora.

## **2. BIOMECHANICZNE MODELE ODDZIAŁYWANIA W UKŁADZIE OPERATOR - NARZĘDZIE**

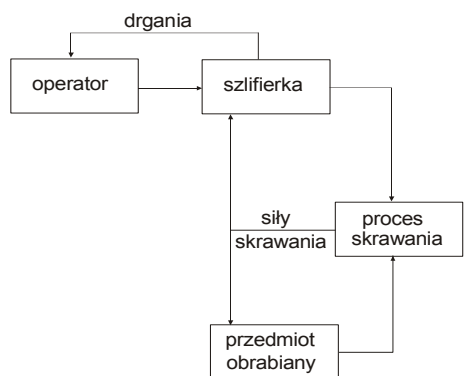
W literaturze przedstawiono wiele biomechanicznych modeli ręki operatora [8-11, 14]. Różnią się one zarówno strukturą, jak i parametrami. Porównanie najczęściej spotykanych modeli przedstawiono w pracy [19]. Ręka i ramię operatora zwykle modelowane są układami pasywnymi o mniej lub bardziej różnej strukturze. Prócz modeli liniowych wprowadzono modele nieliniowe [13, 15] oddziaływania w układzie ręka operatora – narzędzie. Obecnie coraz częściej sięga się do aktywnych modeli biomechanicznych, zbudowanych na bazie znanych w automatyce układów sterowania [16, 17]. Wybór odpowiedniego modelu zależy



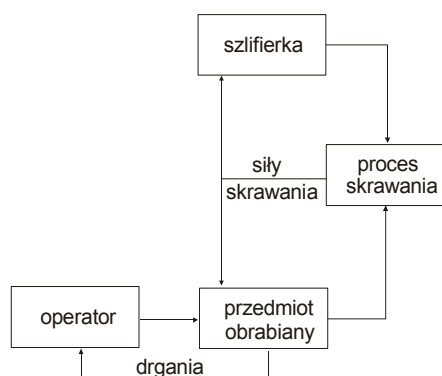
od parametrów drgań działających na rękę, jak również od potrzeb prowadzonych badań. Pomimo istnienia wielu opracowanych już modeli oddziaływania operatora na narzędzie, dobór najbardziej odpowiedniego nie jest zadaniem łatwym. Wiąże się to z szerokim zakresem częstotliwości, który przy rozwiązywaniu zagadnienia wibroizolacji jest narzucony przez normy (5.6 Hz - 1400 Hz), a także z dużą zmiennością statycznych sił docisku narzędzia oraz zacisku dłoni jak również kierunku działania wymuszeń, co jest cechą charakterystyczną dla pracy szlifierkami. Zwracają na to uwagę liczne prace badawcze podważając tym samym przypisywaną niektórym modelom cechę uniwersalności w zastosowaniach [12]. Fakty te zmuszają do ostrożności w doborze modeli dynamicznych ręki operatora. W niektórych przypadkach zachodzi konieczność doświadczalnej weryfikacji poprawności wykorzystywanych modeli.

### 3. MODEL UKŁADU OPERATOR – NARZĘDZIE – PRZEDMIOT OBRABIANY

Dynamikę szlifierki podczas pracy należy rozpatrywać w pełnym układzie operator- szlifierka-przedmiot obrabiany. W praktyce istnieją dwa sposoby obróbki przedmiotów ręcznymi szlifierkami. Pierwszy sposób polega na tym, że przedmiot jest zamocowany lub spoczywa swobodnie, a narzędzie trzymane jest przez operatora w rękach. W drugim sposobie przedmiot obrabiany trzymany jest w rękach, natomiast szlifierka zamocowana jest w uchwycie. W pierwszym przypadku drgania szlifierki, a w drugim drgania przedmiotu przenoszone są na rękę operatora. Schemat blokowy wzajemnych oddziaływań dla pierwszego sposobu obróbki przedstawiono na Rys. 1, a dla drugiego sposobu na Rys. 2.



Rysunek 1: Schemat blokowy oddziaływań (pierwszy sposób obróbki)



Rysunek 2: Schemat blokowy oddziaływań (drugi sposób obróbki)

W zagadnieniu modelowania rzeczywistego układu można wyróżnić problemy związane z modelowaniem jego części składowych: szlifierki, operatora i procesu skrawania.

#### 3.1. Modelowanie procesu skrawania

Model procesu skrawania obejmuje zależność pomiędzy ruchem narzędzia skrawającego i przedmiotu obrabianego a siłami skrawania. W przypadku obróbki ręcznej, parametry, od

których zależą siły skrawania, a więc grubość i szerokość warstwy skrawanej, posuw itp. nie są zdeterminowane, a możliwości sterowania nimi przez operatora są ograniczone. Dlatego większość modeli sił skrawania używanych do opisu obróbki maszynowej nie nadaje się do zastosowania w przypadku obróbki ręcznej. Często wykorzystywane proste opisy sił skrawania występujących przy ręcznym szlifowaniu np. [2] pozwalają wyjaśnić wiele zjawisk, jednak nie wystarczają do opisu bardziej złożonych procesów [18]. W przypadku frezowania można korzystać z modelu opisanego w [5], stworzonego pod kątem obróbki ręcznej. Różnorodność oddziaływania pomiędzy przedmiotem obrabianym a narzędziem skrawającym podczas obróbki ręcznymi szlifierkami skłania do modelowania siły oddziaływania jako sumy składowej zdeterminowanej oraz składowej będącej procesem stochastycznym.

### 3.2. Model układu szlifierka - operator

Ręczną szlifierkę można przedstawić jako dwie bryły sztywne: korpus oraz wirnik z wrzecionem i ściernicą. Ruch szlifierki jest wobec tego złożeniem ruchu korpusu jako bryły sztywnej i ruchu obrotowego zespołu wirnika względem korpusu. Biorąc pod uwagę cel budowy modelu przyjęto dodatkowo następujące uproszczenia:

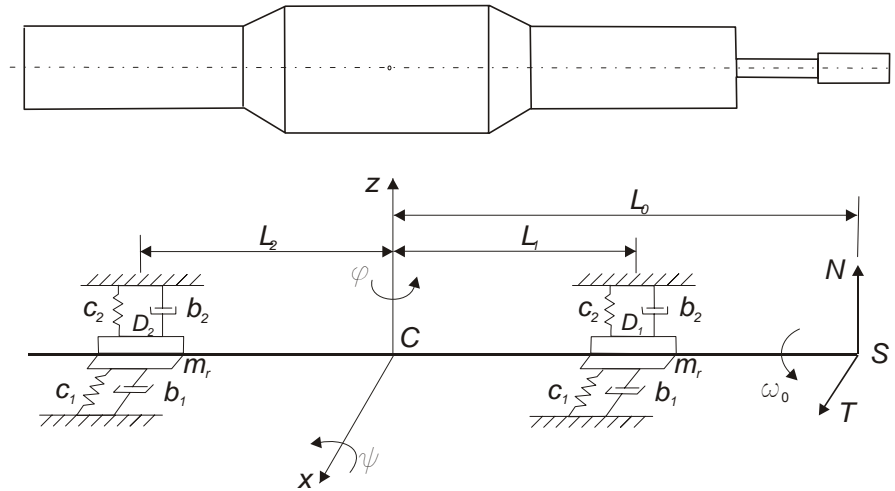
- Pominięto drgania skrętne korpusu wokół osi szlifierki. Drgania te, mogące powstawać w fazie rozruchu, nie odgrywają istotnej roli ze względu na ich krótkotrwałość. W stanie ustalonym zmienność sił skrawania nie może spowodować większych drgań skrętnych korpusu.
- Pominięto ruch szlifierki w kierunku jej osi. W zasadzie rozpatrywane źródła drgań nie wywołują ruchu w kierunku osiowym. Wyjątek stanowi przypadek obróbki frezem o ostrzach skośnych, kiedy pojawia się niezerowa składowa siły skrawania w tym kierunku. Doświadczenie pokazuje, że nawet wtedy drgania w kierunku osi narzędzia nie decydują o ocenie stanu zagrożenia wibracyjnego. Możliwość zaniebdania ruchu w kierunku osiowym uzasadnia także brak sprzężeń z innymi formami ruchu.

Schematyczny rysunek szlifierki oraz szkic zawierający prosty model szlifierki wraz z elementami modelującymi oddziaływanie operatora przedstawiono na Rys. 3. Na rysunku zaznaczono i opisano charakterystyczne punkty układu (C środek masy układu, S punkt kontaktu narzędzia z obrabianym przedmiotem, D<sub>1</sub>, D<sub>2</sub> punkty kontaktu narzędzia z dłońmi operatora), odległości ( $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ), parametry modelu oddziaływania operatora na szlifierkę ( $c_1$ ,  $c_2$  sztywności w kierunku poziomym i pionowym,  $b_1$ ,  $b_2$  współczynniki tłumienia w kierunku poziomym i pionowym,  $m_r$  masa zastępcza) oraz siły powstające w wyniku obróbki ( $N$  siła odporowa,  $T$  siła obwodowa).

Stan ruchu szlifierki można opisać wprowadzając następujący wektor stanu  $\mathbf{u} = [x_c, z_c, \varphi, \psi]^T$ , którego współrzędne, zaznaczone na Rys. 3, są związane z przemieszczeniem środka masy układu szlifierka – operator oraz obrotami wokół osi prostopadłych do szlifierki. Równania ruchu układu mają postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest macierzą mas,  $\mathbf{B}$  jest macierzą tłumienia,  $\mathbf{Z}$  jest macierzą sił żyroskopowych związanych z obracającym się zespołem wirnik- narzędzie,  $\mathbf{F}$  jest wektorem wymuszeń pochodzących od procesu szlifowania.



Rys. 3. Schemat układu

W ogólnym schemacie obliczeń należy uwzględnić zależność pomiędzy wprowadzonym wektorem stanu  $\mathbf{u}$  a wektorem  $\mathbf{u}_D = [x_{D1}, x_{D2}, z_{D1}, z_{D2}]^T$  przemieszczeń w punktach uchwytu szlifierki przez operatora, która może być zapisana jako:

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{C}\mathbf{u}, \quad (2)$$

gdzie  $\mathbf{C}$  jest macierzą transformacji (macierzą wyjścia).

Wektor  $\mathbf{u}_D(t)$  jest podstawą do obliczenia wektora  $\mathbf{F}_D = [F_{xD1}, F_{xD2}, F_{zD1}, F_{zD2}]^T$  sił oddziaływania szlifierki na dłoń operatora:

$$\mathbf{F}_D = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{u}}_D + \mathbf{B}_D \dot{\mathbf{u}}_D + \mathbf{K}_D \mathbf{u}_D, \quad (3)$$

gdzie  $\mathbf{M}_D$ ,  $\mathbf{B}_D$ ,  $\mathbf{K}_D$ , są odpowiednio macierzami mas, tłumienia i sztywności związanymi z modelem operatora.

Zgodnie z ogólnie przyjętym opisem sił skrawania przyjęto w obliczeniach, że pomiędzy siłą odporową  $N$  a siłą obwodową  $T$  skrawania istnieje proporcjonalność:

$$T = \mu N. \quad (4)$$

Wówczas wektor sił  $\mathbf{F}$  wymuszających drgania szlifierki (1), pochodzących od procesu szlifowania, można zapisać w postaci:

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{N}, \quad (5)$$

gdzie macierz kolumnowa  $\mathbf{W}$  zawiera współczynniki określające oddziaływanie bezpośrednie i pośrednie (poprzez siłę obwodową) siły odporowej na ruch układu szlifierka-operator. Rozpatrywany układ jest wobec tego układem o jednym wejściu. Zgodnie z uwagami z poprzedniego rozdziału siły skrawania będą rozpatrywane jako sumy składowej zdeterminowanej oraz składowej będącej procesem stochastycznym.

#### 4. ANALIZA ODDZIAŁYWANIA SZLIFIERKI NA OPERATORA

Przedmiotem obliczeń będą siły oddziaływania narzędzia na ręce operatora. W obliczeniach wyznaczone zostaną parametry stochastyczne sił pochodzących od składowej stochastycznej procesu szlifowania. Obliczenia mogą być podstawą do oceny zagrożenia operatora drganiami pojawiającymi się podczas szlifowania oraz wytyczną do konstrukcji układów wibroizolacji.

W obliczeniach zastosowano analizę gęstości widmowej mocy (PSD) łącznie z wyznaczeniem odchyłeń standardowych. Analizie podlega wektor sił oddziaływania  $F_D$  szlifierki na dłonie operatora.

Aby przeprowadzić obliczenia PSD sił oddziaływania szlifierki na operatora wyznaczono transmitancję częstotliwościową układu przyjmując jako wejście układu siłę odporową  $N$ , a jako wyjście wektor sił  $F_D$ . Transmitancja ma postać macierzy kolumnowej. W obliczeniach zastosowano znany, dla sygnałów stacjonarnych, algorytm obliczeń gęstości widmowej mocy sygnałów wyjściowych na podstawie znajomości gęstości widmowej sygnału wejściowego i transmitancji częstotliwościowej układu. Przyjęto, że składowa stochastyczna siła odporowej jest idealnym szumem dolnopasmowym.

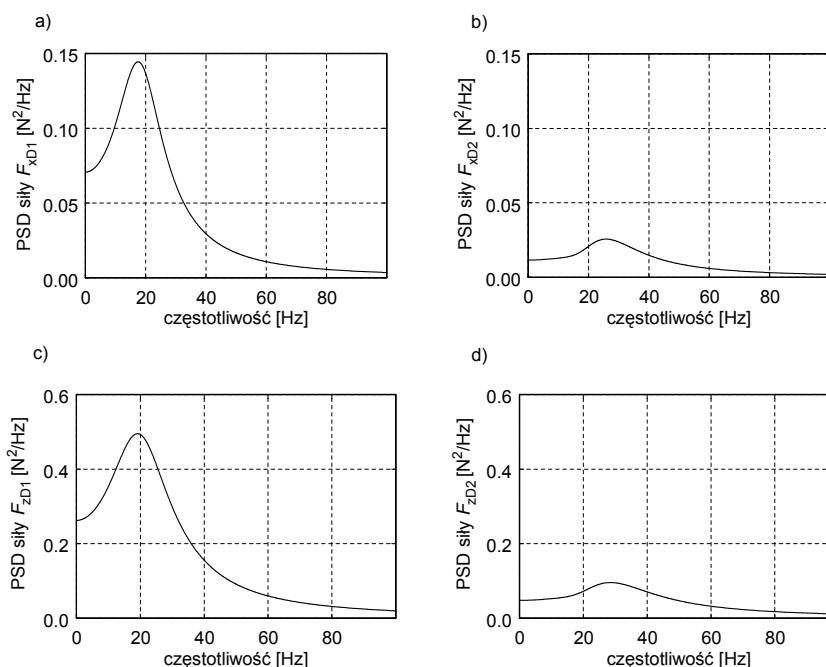
Do obliczeń przyjęto następujące dane:

- Szlifierki: masa 1.68 kg, moment bezwładności względem osi poprzecznej przechodzącej przez środek masy 0.014 kgm<sup>2</sup>, moment bezwładności wirnika z frezem względem osi obrotu 3.5×10<sup>-5</sup> kgm<sup>2</sup>, prędkość obrotowa wirnika 7500 obr/min.
- Modelu operatora: masa zastępcza (dołączona do masy szlifierki) 0.04 kg, sztywność w kierunku poziomym 15 kN/m, sztywność w kierunku pionowym 18 kN/m, współczynnik tłumienia w kierunku poziomym 110 Ns/m, współczynnik tłumienia w kierunku pionowym 130 Ns/m.
- Składowej stochastycznej siły odporowej skrawania: idealny szum dolnopasmowy o gęstości widmowej mocy 0.1 N<sup>2</sup>/Hz w przedziale częstotliwości (0,100) Hz. Wyznaczone na podstawie tych danych odchylenie standardowe wynosi  $\sigma_N=3.16$  N. Współczynnik proporcjonalności pomiędzy obwodową siłą skrawania a siłą odporową  $\mu=0.5$ .

Wykorzystując dane dotyczące szlifierki i dane dotyczące modelu operatora wyznaczono odległości określające położenie punktów przyłożenia rąk operatora oraz położenie środka masy układu:  $L_0=0.24$  m,  $L_1=0.09$  m,  $L_2=0.13$  m.

Wyniki obliczeń gęstości widmowej mocy sił oddziaływania szlifierki na operatora przedstawiono na Rys. 4.

Wykresy gęstości widmowych mocy sił osiągają wartości maksymalne w przedziale częstotliwości (18 Hz – 30 Hz). W tym przedziale zawierają się częstotliwości własne układu. Dla częstotliwości powyżej 90 Hz gęstość widmowa mocy jest stosunkowo mała i nie odgrywa znaczącej roli przy obliczeniu odchylenia standardowego. Wyznaczone na podstawie funkcji gęstości widmowych mocy odchylenia standardowe poszczególnych sił oddziaływania szlifierki na operatora wynoszą:  $\sigma_{F_{x1}}=2.0$  N (kierunek  $x$ , uchwyt w pobliżu narzędzia),  $\sigma_{F_{x2}}=1.0$  N (kierunek  $x$ , uchwyt bardziej odległy od narzędzia),  $\sigma_{F_{z1}}=4.1$  N (kierunek  $z$ , uchwyt w pobliżu narzędzia),  $\sigma_{F_{z2}}=2.1$  N (kierunek  $z$ , uchwyt bardziej odległy od narzędzia).



Rysunek 4: Gęstości widmowe mocy sił oddziaływania szlifierki na operatora: a) kierunek  $x$ , uchwyt w pobliżu narzędzia, b) kierunek  $x$ , uchwyt bardziej odległy od narzędzia, c) kierunek  $z$ , uchwyt w pobliżu narzędzia, d) kierunek  $z$ , uchwyt bardziej odległy od narzędzia.

## 5. WNIOSKI

Przeprowadzona w pracy analiza gęstości widmowej mocy sił oddziaływania szlifierki na operatora pozwala na ocenę badanego narzędzia pod względem przenoszenia sił powstających przy obróbce na operatora. Przedstawione wyniki obliczeń pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- Siły oddziaływania na operatora są znaczne. Odchylenia standardowe sił w uchwycie w pobliżu narzędzia są większe niż odchylenia standardowe składowych stochastycznych odpowiednich sił skrawania.
- Ręka operatora trzymająca uchwyt w pobliżu narzędzia jest znacznie bardziej obciążona niż ręka trzymająca uchwyt bardziej odległy od narzędzia.
- Siły oddziaływania na operatora mają przede wszystkim składowe harmoniczne o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości drgań własnych należących do przedziału (18 Hz – 30 Hz). Składowe powyżej 90 Hz mają mały udział w efektywnym oddziaływaniu na operatora.

Zastosowana w pracy analiza gęstości widmowej mocy może być z powodzeniem wykorzystana do oceny oraz optymalizacji układów wibroizolacji badanej szlifierki. Układ wibroizolacji powinien przede wszystkim obejmować uchwyt w pobliżu narzędzia.

**LITERATURA**

- [1] S. Michałowski, S. Piotrowski, Ocena stanu zagrożenia drganiami podczas pracy ręcznymi szlifierkami z frezami trzpieniowymi. *Prace CIOP* 1983.
- [2] S. Piotrowski, Analiza wpływu zjawisk żyroskopowych na pracę ręcznej szlifierki. *Materiały V Sympozjum Dynamiki Konstrukcji*, Rzeszów, 1983
- [3] S. Piotrowski, *Układ napędu ręcznej szlifierki*, Pat. PRL nr 136871.
- [4] Z. Basista, S. Piotrowski i inni, *Wibroizolowana ręczna obrabiarka o obrotowym ruchu narzędzia*, zgł. pat. PRL.
- [5] Z. Basista, J. Łuczko, M. Markiewicz, Modelowanie procesu frezowania walcowego w przypadku obróbki ręcznymi szlifierkami pneumatycznymi. *Prace CIOP* 1985.
- [6] Z. Basista S. Piotrowski, Możliwości zmniejszenia drgań ręcznych szlifierek pneumatycznych, *Ochrona Zdrowia Hutnika*, 2, 1986.
- [7] S. Bednarz, M. Szepski, Eliminacja wibracji lokalnej w szlifierkach ręcznych. *Mat. IV Sympozjum Techniki Wibracyjnej*, Kraków 1982.
- [8] D. Dieckmann, Ein mechanisches modell für das schwingungserregte hand – arm – system des menschen. *Int. Zeitschr. Angew. Physiol.* 17/68.
- [9] Ju. Vasiliev L. Borisov. O mechaniceckom impedance sognutoj ruki celowieka. *Naucnyje raboty VCNIOT*, Moskwa 1969.
- [10] D. D. Reynolds W. Soedel. Dynamic Response of the hand arm system to a sinusoidal input. *Journal of Sound and Vibration* 1972/21/3.
- [11] G. Meltzer. *A vibration model for the human hand – arm – system*
- [12] P. Krause A. Orban, *Critical assessment of common methods to determine vibrational stress of hand – arm system.*
- [13] S. Rakheja, R. Gurrarn, J. Gouw, Development of linear and nonlinear hav models using optimization and linearization techniques, *J. Biomech.*, 26, 1253-1260, 1993.
- [14] R. Gurrarn, S. Rakheja, A.J. Brammer, Driving-point mech. impedance of the human hand-arm system: Synthesis and model development. *J. S.&Vibr.*, 180, 437-458, 1995.
- [15] V. I. Babitsky, Hand-held percussion machine as discrete non-linear converter, *Journal of Sound and Vibration*, 214 (1), 165-182, 1998.
- [16] R. M. Sanner, M. Kosha, A mathematical model of the adaptive control of human arm motions, *Biological Cybernetics*, 80, 1999, 369-382.
- [17] M. Arif, H. Inooka. Iterative manual control model of human operator, *Biological Cybernetics*, 81, 1999, 445-455.
- [18] C.S. Suh, P.P. Khurjekar, B. Yang. Characterization and identification of dynamic instability in milling operation, *Mech. Syst. and Sign. Proc.*, 16 (5), 2002, 853-872.
- [19] S. Rakheja, J. Z. Wu, R. G. Dong, A. W. Schopper, P. E. Boileau, A comparison of biodynamic models of the human hand-arm system for applications to hand-held power tools, *J. Sound and Vibration*, 249 (1), 55-82, 2002.

## **NEURONOWY FILTR KALMANA W AKTYWNEJ REDUKCJI DRGAŃ KONSTRUKCJI BUDOWLANYCH**

**Maciej Przychodzki, Roman Lewandowski**

Politechnika Poznańska, Instytut konstrukcji Budowlanych  
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań  
e-mail: {maciej.przychodzki, roman.lewandowski}@put.poznan.pl,

---

**Abstract:** *This paper is devoted to research on using artificial neural networks as the neural Kalman filters. The Kalman filters are widely used in the active control of building structures. There are described two types of neural networks worked as Kalman filters: linear neural filters and two-layer feedforward neural networks. The neural Kalman filters were tested in simulations of the active control of the building structure model. The results of numerical computations are presented in this paper.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Problem drgań smukłych, wysokich konstrukcji budowlanych oraz sposoby ich redukcji należą do zagadnień wzbudzających szczególne zainteresowanie środowisk inżynierskich i naukowych w ostatnich latach. Dzięki rozwojowi technologicznemu w budownictwie wysokość obiektów budowlanych przestała być znaczącym ograniczeniem. Jednakże konstruowanie i późniejsza eksploatacja budowli o dużych wysokościach są ściśle powiązane z koniecznością zastosowania rozwiązań technicznych skutecznie ograniczających negatywne wpływy obciążeń środowiskowych wzbudzających drgania konstrukcji. Do najczęstszych tego typu obciążeń dynamicznych należą oddziaływania wiatru bądź wymuszenia kinematyczne spowodowane ruchami tektonicznymi. W przypadku smukłych obiektów budowlanych o znacznych wysokościach nawet działanie wiatru o niewielkiej sile może znacznie ograniczyć komfort ich eksploatacji, a w skrajnych przypadkach doprowadzić do ich uszkodzenia bądź zniszczenia.

Spośród znanych metod ograniczania drgań konstrukcji na szczególną uwagę zasługuje tak zwana aktywna redukcja drgań [1]. Metoda ta oparta jest na klasycznej teorii sterowania wykorzystywanej we współczesnej automatyce. Zasadnicza idea tej metody polega na rozmieszczeniu w obiekcie budowlanym, poddanym losowym wymuszeniom dynamicznym układu wzbudników generujących dodatkowe siły działające na konstrukcję, w celu ograniczenia drgań obiektu do oczekiwanego poziomu. Wartości sił, jakie muszą zostać wygenerowane przez system redukcji drgań obliczane są na podstawie aktualnego stanu dynamicznego konstrukcji. Zatem aby siły regulacji drgań mogły być obliczone poprawnie, wymagana jest znajomość pełnego wektora zmiennych stanu powiązanych ze wszystkimi

stopniami dynamicznej swobody układu. Jednakże w przypadku układów o wielu stopniach swobody pomiar wszystkich zmiennych stanu jest kłopotliwy, często bywa kosztowny, a w wielu przypadkach wprost niemożliwy. Stąd też poszukuje się rozwiązań umożliwiających sprowadzenie liczby mierzonych elementów wektora stanu konstrukcji do niezbędnego minimum. Skutecznym narzędziem wykorzystywanym w tym celu jest tak zwany filtr Kalmana [6]. Filtr ten umożliwia estymację pełnego wektora stanu na podstawie pomiarów wybranych jego elementów. Należy podkreślić, że przy obliczaniu składowych wektora stanu za pomocą filtru Kalmana uwzględniane mogą być również wpływy zewnętrznych oddziaływań losowych oraz zakłóceń pomiarów. Jednak do poprawnego działania filtru konieczna jest znajomość charakterystyk probabilistycznych wspomnianych wcześniej wpływów. Ponadto algorytm obliczeń tej metody wymaga rozwiązania algebraicznego równania Riccati'ego. Niestety dotychczas opracowane metody rozwiązywania tego typu równań nie w każdym przypadku są skuteczne. Dlatego też poszukiwanie innych sposobów estymacji pełnego wektora stanu układu dynamicznego na podstawie danych z pomiarów w ograniczonej liczbie punktów wydaje się być uzasadnione. Jednym z rozwiązań może być zastosowanie jednokierunkowych sztucznych sieci neuronowych. Jak wiadomo dwuwarstwowe sieci neuronowe pozwalają na realizację dowolnego odwzorowania [4]. W przypadku odwzorowań liniowych wystarczające jest zastosowanie jednowarstwowych filtrów neuronowych. W niniejszym opracowaniu omawia się możliwości zastosowania sztucznych sieci neuronowych do estymacji stanu dynamicznego konstrukcji. W algorytmie metody aktywnej redukcji drgań wspomniana sieć neuronowa zastępuje filtr Kalmana.

## 2. AKTYWNA REDUKCJA DRGAŃ

Równanie ruchu konstrukcji traktowanej jako układ dyskretny poddany działaniu obciążeń zewnętrznych oraz sił regulacji drgań można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{f}(t). \quad (1)$$

Symbole  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$  oznaczają odpowiednio macierze mas, tłumienia i sztywności układu, natomiast  $\mathbf{q}$  jest wektorem przemieszczeń. Po prawej stronie równania znajduje się wektor obciążeń zewnętrznych  $\mathbf{f}$  oraz wektor sił regulacji drgań  $\mathbf{u}$ . Symbolami  $\tilde{\mathbf{B}}$  i  $\tilde{\mathbf{D}}$  oznaczone są odpowiednio macierze lokalizacji sił regulacji i obciążeń. Jednakże w sformułowaniu problemu redukcji drgań wygodniej jest korzystać z równania ruchu zapisanego w przestrzeni stanu. Równanie to ma następującą postać [1]:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad (2)$$

gdzie

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

jest  $2n$ -wymiarowym wektorem stanu ( $n$  - liczba stopni swobody dynamicznej). Pozostałe elementy równania (2) są opisywane zależnościami:



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\tilde{\mathbf{D}} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Klasyczne ujęcie zagadnienia aktywnej redukcji drgań oparte jest na teorii matematycznej optymalizacji. Funkcjonał celu, jaki jest przyjmowany do wyznaczenia optymalnych sił regulacji drgań ma postać [1]:

$$J = \int_0^{T_f} [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt, \quad (6)$$

gdzie  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  są macierzami wagowymi kształtującymi relacje kosztów redukcji drgań do jej efektów, co przekłada się na stosunek sił regulacji do zmiennych wektora stanu. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że wektor  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{q}$  nie mogą być określane tylko z warunku minimalizacji funkcjonału  $J$ , ale muszą również spełniać równanie ruchu układu dynamicznego (2). Dlatego stosuje się metodę optymalizacji z ograniczeniami, z wykorzystaniem mnożników Lagrange'a [2]. Szereg przekształceń matematycznych prowadzi do macierzewego równania Riccati'ego o postaci [1]:

$$\mathbf{P}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + 2\mathbf{Q} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Rozwiązaniem równania (7) jest macierz  $\mathbf{P}$ . Ostatecznie wektor sił regulacji drgań oblicza się ze wzoru:

$$\mathbf{u}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{z}(t). \quad (8)$$

Wektor  $\mathbf{u}(t)$  jest zatem wynikiem liniowego odwzorowania wektora stanu układu dynamicznego. W związku z tym poprawne i możliwie dokładne określenie wszystkich elementów wektora  $\mathbf{z}(t)$  ma istotny wpływ na skuteczność aktywnej redukcji drgań.

### 3. NEURONOWY FILTR KALMANA

#### 3.1. Sformułowanie filtru Kalmana do bieżącej estymacji stanu układu

Filtr Kalmana jest najczęściej stosowanym, a zarazem cechującym się wysoką skutecznością, narzędziem do estymacji pełnego wektora stanu układu dynamicznego na podstawie danych z pomiarów wybranych jego elementów. Wyprowadzenie równań filtru Kalmana korzystnie jest rozpocząć od zapisania równań stanu, w których czas traktowany jest jako zmienna dyskretna. W tym ujęciu na osi czasu  $t$  wybiera się chwile  $t_k = k\Delta t$  ( $k=1, 2, \dots$ ), których dotyczą równania stanu z czasem dyskretnym. Chwile  $t_k$  rozumiane są jako chwile pomiaru (próbki) wybranych składowych wektora stanu  $\mathbf{z}(t)$ . Omawiane równania stanu można wyrazić następująco [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{z}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z}(k) + \mathbf{e}(k) \end{aligned} \quad (9)$$

Wektor  $\mathbf{y}(k)$  jest wektorem odpowiedzi dynamicznego układu w chwili  $k$ . Składa się on z  $l$  pomierzonych zmiennych stanu układu. Macierz  $\tilde{\mathbf{C}}$  opisuje lokalizację czujników pomiarowych. Macierze  $\mathbf{G}$  oraz  $\mathbf{H}$  wyznacza się z zależności [6]:

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= e^{A^T}, \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}.\end{aligned}\quad (10)$$

Symbole  $\mathbf{w}(k)$  i  $\mathbf{e}(k)$  występujące w równaniu (9) oznaczają odpowiednio wektory losowych wpływów zewnętrznych i zakłóceń pomiarów. W trakcie wyprowadzania końcowej postaci równań opisujących filtr Kalmana przyjmuje się szereg założeń [6]. Najistotniejsze założenia dotyczą charakterystyk probabilistycznych procesów  $\mathbf{w}(k)$  i  $\mathbf{e}(k)$ . Ostatecznie wektor estymacji stanu dynamicznego układu  $\tilde{\mathbf{z}}(k+1)$  oblicza się ze wzorów [6]:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{z}}(k+1) &= \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{K}_e \left[ \mathbf{y}(k+1) - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k+1) \right], \\ \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{G}\tilde{\mathbf{z}}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k)\end{aligned}\quad (11)$$

gdzie macierz  $\mathbf{K}_e$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}^T \left( \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}^T \right)^{-1}.\quad (12)$$

Występującą we wzorze (12) macierz  $\mathbf{N}$  oblicza się rozwiązując równanie Riccati'ego:

$$\mathbf{N} = \mathbf{T} + \mathbf{G}\mathbf{N}\mathbf{G}^T - \mathbf{G}\mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}^T \left( \mathbf{S} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{N}\tilde{\mathbf{C}}^T \right)^{-1} \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{N}\mathbf{G}^T.\quad (13)$$

Symbolami  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{T}$  oznaczone są odpowiednio macierze kowariancji procesów  $\mathbf{e}(k)$  i  $\mathbf{w}(k)$ .

Reasumując można stwierdzić, że sposób działania filtru Kalmana jest stosunkowo prosty, gdyż sprowadza się do uzupełnienia wartości zmiennych stanu wyliczonych z równania ruchu poprawkami wynikającymi z różnic między wektorami  $\mathbf{y}(k+1)$  i  $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k+1)$  za pośrednictwem macierzy  $\mathbf{K}_e$ . Jednak samo wyznaczenie macierzy  $\mathbf{K}_e$  wymaga znajomości macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{T}$  oraz rozwiązania równania Riccati'ego, co może stanowić dość istotne utrudnienie, zwłaszcza gdy obiektem regulacji jest konstrukcja o dużej liczbie stopni swobody.

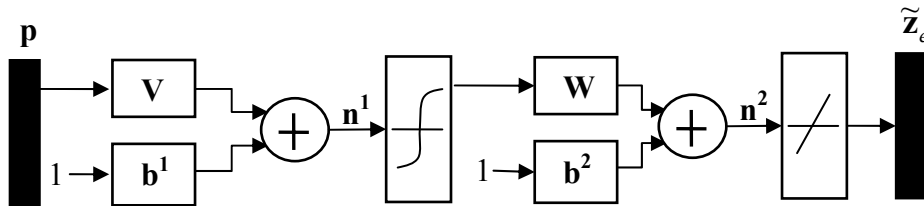
### 3.2. Neuronowy filtr dwuwarstwowy

Jednym z zastosowań sztucznych sieci neuronowych jest aproksymacja funkcji. Jedno-kierunkowe, dwuwarstwowe sieci z nieliniowymi funkcjami aktywacji warstwy ukrytej umożliwiają realizację dowolnego odwzorowania. Ponadto stosowanie sztucznych sieci neuronowych posiada tę istotną zaletę, że nie jest wymagana znajomość matematycznego opisu problemu, ponieważ zdolność sieci do realizacji określonego odwzorowania jest rezultatem procesu uczenia, a nie zaprogramowania z góry ustalonego algorytmu. Dlatego też w przypadku, gdy nie są znane charakterystyki probabilistyczne wpływów zewnętrznych działających na konstrukcję i błędów pomiarowych lub też rozwiązanie równania (13) za pomocą znanych metod jest trudne, sztuczne sieci neuronowe mogą być interesującą alternatywą. W niniejszej pracy klasyczny filtr Kalmana zastępuje się siecią dwuwarstwową z nieliniową funkcją aktywacji warstwy ukrytej, której architektura przedstawiona jest na Rys. 1. Wektor danych wejściowych  $\mathbf{p}(k)$  określony jest zależnością:

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{y}(k) - \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k). \quad (14)$$

Na wyjściu sieci otrzymuje się wektor poprawkowy do estymaty wektora stanu:

$$\tilde{\mathbf{z}}_e(k) = \tilde{\mathbf{z}}(k) - \mathbf{x}(k). \quad (15)$$



Rysunek. 1: Schemat jednokierunkowej, dwuwarstwowej sztucznej sieci neuronowej

Standardowo stosowaną funkcją aktywacji warstwy ukrytej jest funkcja tangensoidalna o postaci [3]:

$$f(n_i^1) = \frac{2}{1 + \exp(-2n_i^1)} - 1. \quad (16)$$

Funkcja aktywacji warstwy wyjściowej jest liniowa.

Aby sieć posiadała zdolność aproksymacji odwzorowania realizowanego przez filtr Kalmana, proces jej uczenia musi być procesem nadzorowanym. Macierze wagowe  $\mathbf{V}$  i  $\mathbf{W}$  oraz wektory wartości progowych neuronów (bias)  $\mathbf{b}^1$  i  $\mathbf{b}^2$  modyfikowane są w każdym kroku uczenia zgodnie z algorytmem wstecznej propagacji błędu [3], [5].

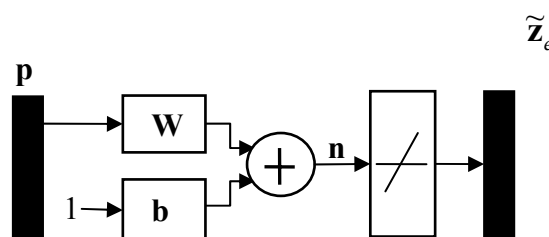
### 3.3. Neuronowy filtr liniowy

Opisane powyżej dwuwarstwowe sieci neuronowe stanowią uniwersalne narzędzie szeroko stosowane do aproksymowania dowolnych funkcji. Jednak proces uczenia według algorytmu wstecznej propagacji błędu jest procesem czasochłonnym i w przypadku obszernego zadania wymaga znacznej mocy obliczeniowej komputera. Dlatego istotne jest każde możliwe uproszczenie architektury sieci które nie pogarsza dokładności jej działania. Odwzorowanie realizowane przez filtr Kalmana w ujęciu klasycznym ma charakter liniowy. Zatem uzasadnione jest zbadanie możliwości zastosowania w miejsce wyżej opisanej sieci dwuwarstwowej znacznie prostszego liniowego filtru neuronowego. Architektura takiej sieci przedstawiona jest na Rys. 2. Zmiany wartości macierzy wagowej  $\mathbf{W}$  i wektora wartości progowych neuronów  $\mathbf{b}$  obliczane są w trakcie nadzorowanego uczenia sieci w taki sposób, aby średni błąd kwadratowy wektora wyjścia sieci  $\tilde{\mathbf{z}}_e$  w stosunku do wzorca uczenia  $\mathbf{d}$  był minimalny [3], [5]:

$$E_i = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (d_{in} - \tilde{z}_{ein})^2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\Delta W_{ij} &= \eta \frac{\partial E_i}{\partial W_{ij}} \\ \Delta b_i &= \eta \frac{\partial E_i}{\partial b_i}\end{aligned}\quad (18)$$

Symbol  $\eta$  oznacza współczynnik uczenia. Ten sposób uczenia sieci w literaturze nazywany jest uczeniem według reguły delty. Funkcja aktywacji neuronów jest w tym przypadku funkcją liniową.



Rysunek 2: Schemat liniowego filtra neuronowego

#### 4. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Działanie neuronowego filtra Kalmana przetestowano dla kilku układów dynamicznych o różnej liczbie stopni dynamicznej swobody. Modelem obliczeniowym konstrukcji jest tak zwana rama ścinana [1]. W niniejszym opracowaniu przedstawiono rezultaty obliczeń numerycznych dla układu o czterech stopniach swobody dynamicznej. Dla tego przypadku wartości parametrów fizycznych i geometrycznych konstrukcji wynosiły odpowiednio:

- masa skupiona na poziomie rygli:  $m=2000 \text{ kg}$ ,
- sztywność słupów:  $EJ=15000 \text{ kNm}^2$ ,
- wysokość kondygnacji:  $h=6,0 \text{ m}$ ,
- rozstaw układów poprzecznych konstrukcji:  $a=6,0 \text{ m}$ .

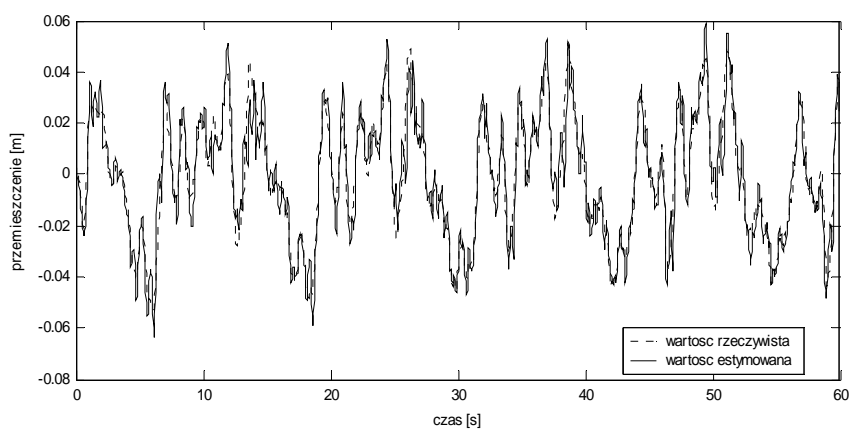
Jako losowe obciążenie zewnętrzne przyjęto oddziaływanie wiatru obliczane według algorytmu opisanego w pracy [7]. Założono, że funkcja gęstości widmowej procesu jest określona wzorem Kaimała. Czujniki pomiarowe zmiennych stanu umieszczono na poziomie drugiego i czwartego rygla rama, natomiast siłowniki układu aktywnej redukcji drgań na pierwszej i drugiej kondygnacji.

Uczenie sieci neuronowych przeprowadzono na zbiorach zawierających wartości zmiennych stanu układu otrzymane z całkowania równań ruchu metodą Eulera. Przy czym zbiór danych wyjściowych sieci oblicza się dla pełnych wektorów stanu, natomiast dane wejściowe obliczane są dla jego wybranych elementów.

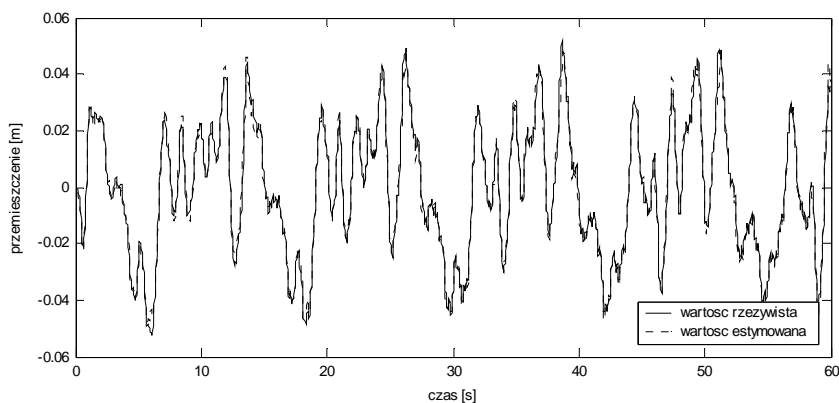
Rysunek 3 przedstawia zestawienie rzeczywistego przebiegu czasowego przemieszczania rygla najwyższej kondygnacji konstrukcji oraz jego estymatę otrzymaną przez zastosowanie filtra w postaci sieci dwuwarstwowej. Uczenie sieci odbywało się na podstawie algorytmu wstecznej propagacji błędu ze składnikiem momentum [5]. Przetestowano również skuteczność działania sieci uczonej według algorytmu wstecznej propagacji błędu ze zmiennym

współczynnikiem uczenia [5]. Rezultaty działania sieci uczonej według tego algorytmu pokazano na Rys. 4.

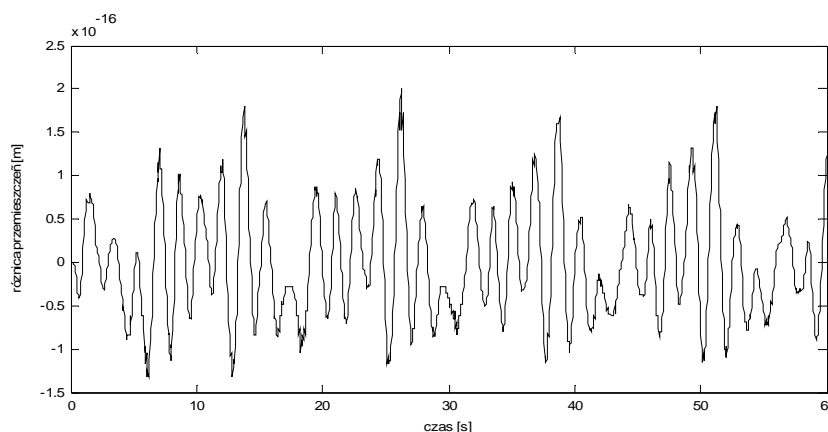
Dla przypadku, gdy odpowiedź dynamiczna była estymowana za pomocą jednowarstwowego filtra neuronowego nie zestawiono przebiegów dynamicznych rzeczywistych przemieszczeń układu i ich estymat, gdyż różnice między nimi nie były widoczne na wykresach. Rys. 5 przedstawia wykres tychże różnic dla przemieszczeń rygla najwyższej kondygnacji. Relacje między pozostałymi zmiennymi stanu obliczonymi bezpośrednio z równań ruchu i ich wartościami określonymi za pomocą sieci neuronowych kształtowały się we wszystkich przypadkach podobnie do tych, które zostały zaprezentowane na rysunkach.



Rysunek 3: Zestawienie przebiegów czasowych rzeczywistych przemieszczeń rygla 4-tej kondygnacji i ich estymat otrzymanych z sieci dwuwarstwowej uczonej wg algorytmu wstecznej propagacji błędu ze składnikiem momentum



Rysunek 4: Zestawienie przebiegów czasowych rzeczywistych przemieszczeń rygla 4-tej kondygnacji i ich estymat otrzymanych z sieci dwuwarstwowej uczonej wg algorytmu wstecznej propagacji błędu ze zmiennym współczynnikiem uczenia



Rysunek 5: Zestawienie różnic między przebiegami czasowymi rzeczywistych przemieszczeń rygla 4-tej kondygnacji i ich estymat otrzymanych z sieci jednowarstwowej

## 5. WNIOSKI

Zaprezentowane wyniki analiz numerycznych jednoznacznie wskazują, że sztuczne sieci neuronowe mogą być stosowane z bardzo dobrym skutkiem jako narzędzia zastępujące klasyczny filtr Kalmana. Przy czym posiadają one tę zaletę, że nie muszą być znane charakterystyki probabilistyczne zewnętrznych oddziaływań losowych na konstrukcję oraz zakłóceń pomiarów. Ponadto stosując to rozwiązanie unika się dość kłopotliwych obliczeń matematycznych związanych z rozwiązywaniem równań macierzowych Riccati'ego. Należy również podkreślić, że architektura sieci jest stosunkowo prosta, a zbytnie jej skomplikowanie wręcz pogarsza końcowe efekty jej działania.

## LITERATURA

- [1] T.T. Soong, *Active Structural Control: Theory and Practice*, Longman Scientific & Technical, 1990.
- [2] D.G. Luenberger, *Teoria Optymalizacji*, PWN, 1974.
- [3] J. Korbicz, A. Obuchowicz, D. Uciński, *Sztuczne Sieci Neuronowe, Podstawy i zastosowania*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, 1994.
- [4] J. Żurada, M. Barski, W. Jędrych, *Sztuczne sieci neuronowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1996.
- [5] H. Demuth, M. Beale, *Neural Network User's Guide* The MathWorks, Inc., 2002.
- [6] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall, 1995.
- [7] R. Lewandowski, *Numeryczna symulacja sił dynamicznych wywołanych działaniem wiatru*, XLVI Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Naukowego PZITB, Wrocław-Krynica, 2000.

## WYBRANE PROBLEMY KONSTRUKCYJNE I BADAWCZE CYLINDRYCZNEGO SPRZĘGŁA ELEKTROREOLOGICZNEGO

**Zbigniew Skup**

Politechnika Warszawska, Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych,  
Instytut Podstaw Budowy Maszyn, 02-524 Warszawa, ul. Ludwika Narbutta 84  
e-mail: zskup@ipbmsimr.pw.edu.pl

---

**Abstract:** *The article describes basic tests of the following: power consumption (supply voltage 1-6 kV, current intensity 5 – 25  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ , power supply 10-100 W), temperature increases as well as technical solutions and construction of the tested electrorheological clutch. Two types of fluid were described: one-phase liquid in the form of "liquid crystals", which does not undergo sedimentation or coagulation, and two-phase liquid in the form of "suspension" containing stabilizing agents. Factors determining rheological parameters of the prototype ER clutch were discussed. The article ends with conclusions and a summary.*

---

### 1. WPROWADZENIE

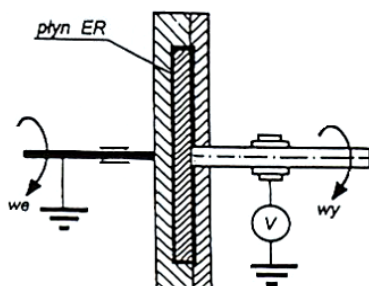
Płyn ER w postaci zawiesiny zmieniającej właściwości pod wpływem pola elektrycznego znany jest w nauce od publikacji Winsłowa [1]. Konkretnymi badaniami i zastosowaniem zajęto się dopiero przed kilkunastoma laty. Zastosowanie płynu umożliwia wygodne sterowanie współczynnikiem lepkości poprzez zmianę pola elektrycznego, w którym ten płyn się znajduje. Pozwala to na prostą zmianę współczynnika tłumienia w układzie dynamicznym, jakim może być układ napędowy [2-8]. Dlatego też fakt ten wskazuje na szerokie potencjalne możliwości zastosowania tego rodzaju płynów w wielu dziedzinach.

Na podstawie wymienionej literatury, płyn ten to nie tylko dyssypator, lecz również akumulator energii, co ma ważne znaczenie w inżynierskich zastosowaniach. W pracach [9-14] jest zamieszczona bogata informacja dotycząca płynu zaś jego zastosowań w pracach [3-6, 8, 15-17]. Płyny elektroeologiczne są dostosowane idealnie do tłumienia półaktywnego. W polu elektrycznym cząsteczki ulegają polaryzacji.

Podstawowe badania obejmują zagadnienia poboru mocy (napięcia zasilania 1-6 kV, natężenie prądu 5-25  $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ , moc zasilania od 10 do 100 W), wymiany ciepła, przyrostu temperatury i rozwiązań technicznych. Występujące problemy związane są z zasilaniem elektrycznym (bardzo wysokie stałe napięcie, przebicia prądowe), wzrostem temperatury (podwojenie napięcia przy każdym skoku temperatury o  $10 \div 12^\circ\text{C}$ ), wrażli-

wość na zanieczyszczenia płynu ER. Przebiecia prądowe powodują zanik pola elektrycznego przy natężeniach pola elektrycznego dla napięcia  $E > 5 \text{ kV/mm}$ .

Sprzęgła elektreologiczne ER z płynem ER cechują się bardzo małym momentem resztkowym w odróżnieniu od sprzęgieł klasycznych mechanicznych lub magnetoreologicznych MR co ważne jest w wielu zastosowaniach. Badacze i teoretycy są zgodni, że przyszłość należy do tego typu rozwiązań. Cenną zaletą jest prostota konstrukcji (Rys.1) w stosunku do dotychczasowych klasycznych rozwiązań technicznych.



Rysunek 1: Schemat sprężła ER

Wzrost lepkości płynu ER pod wpływem pola elektrycznego powoduje wzrost naprężeń ścinających  $\tau$  w płynie ER i tym samym zwiększenie przenoszonego obciążenia w postaci momentu obrotowego (skręcającego) na wale wyjściowym. Sterowanie sprzęgłem elektreologicznym ER można uzyskać w prosty sposób poprzez zastosowanie jako płynu roboczego ER, charakteryzującego się zmianą właściwości reologicznych w obecności pola elektrycznego. W sprzęgle takim odizolowana powierzchnia cylindryczna wimika jako elektroda dodatnia jest pod napięciem. Między tą powierzchnią i obudową tworzy się pole elektryczne obejmujące płyn ER. Zmiana przenoszonego przez sprzęgło ER momentu obrotowego odbywa się przez zmianę napięcia zasilania, co powoduje zmianę natężenia pola elektrycznego a tym samym lepkości cieczy roboczej. W artykule przedstawiono budowę SER, wstępne wyniki badań eksperymentalnych w postaci charakterystyk. Do badań użyto płynów ER, które zostały sporządzone w Instytucie Mechaniki Stosowanej w Politechnice Radomskiej [4] oraz na Wydziale Chemii Politechniki Warszawskiej [10] i Smart Technology Ltd, Birmingham [18].

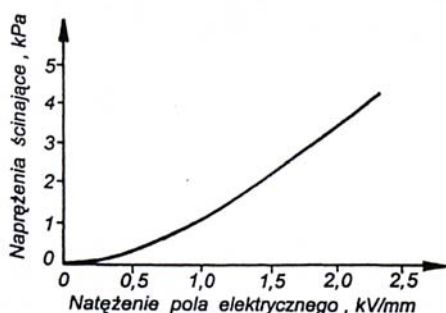
## 2. MATERIAŁY ELEKTREOLOGICZNE

Badania płynów ER dotyczą właściwości: chemicznych, fizycznych, mechanicznych oraz obejmują zagadnienia: poboru mocy, wymiany ciepła, przyrostu temperatury, uszczelnienia. Przewodność płynu ER jest bardzo niska i wzrasta w przybliżeniu w kwadracie natężenia pola elektrycznego i w przybliżeniu dwukrotnie na każde  $12 \text{ }^{\circ}\text{C}$  w zakresie zmian temperatury  $-10 \div 120 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Sztywność np. poduszki zawieszenia może zmieniać się pod działaniem pola elektrycznego w ciągu 2 do 7 sek.

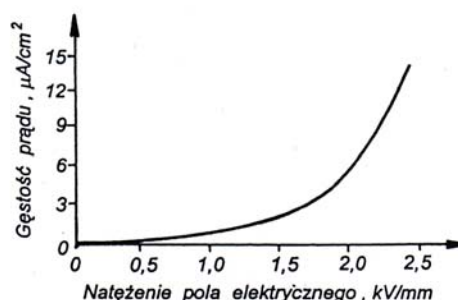
elektreologicznych ER może być uzyskany dla wielu mieszanin różnych olejów i proszków, jednakże najlepsze właściwości otrzymuje się dla zawiesiny polimeru w oleju silikonowym. Płyn ER, którego skład chemiczny oparty jest na bazie polimerów może być



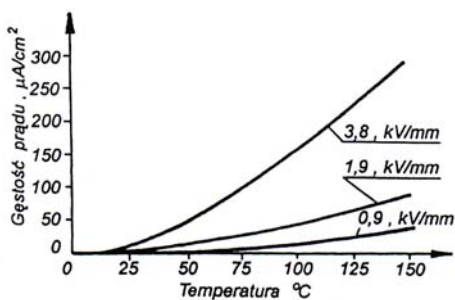
stosowany w zakresie temperatur  $-40 \div 200$  °C. Płyn ER, którego głównymi składnikami są olej lniany i woda wapienna, ma mniejszy zakres pracy  $-10 \div 90$  C, lecz jest znacznie tańszy. Stopień krzepnięcia płynu ER zależy od pola elektrycznego, które ma wpływ na lepkość i wytrzymałość na ścinanie płynu (Rys.2). Wzrost gęstości prądu powoduje wzrost natężenia pola elektrycznego (Rys.3). Płyny ER mają następujące właściwości: są nieściśliwe, nietoksyczne, szybkość zmiany stanu (ciecz-ciało stałe) około 0.001 s. Wzrost temperatury powoduje wzrost gęstości prądu (Rys.4), lecz również obniża dynamiczną granicę plastyczności (Rys.5).



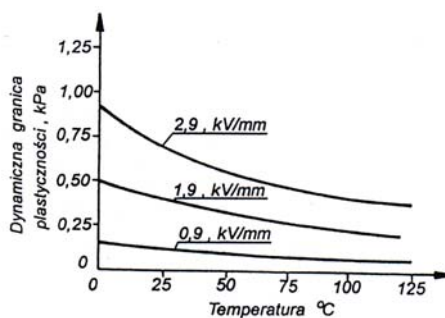
Rysunek 2: Wykres zmian natężenia pola elektr. w funkcji naprężenia ścinającego



Rysunek 3: Wykres zmian natężenia pola elektrycznego w funkcji gęstości prądu



Rysunek 4: Wykres zmian temperatury w funkcji gęstości prądu



Rysunek 5: Wykres zmian temp. w funkcji dynamicznej granicy plastyczności

Zmiany właściwości spowodowane są elektrycznie indukowanym tworzeniem się włókien cząsteczek półprzewodnikowych w płynie. Cząsteczki płynu zachowują się jak dielektryki i dlatego też tworzą łańcuchy cząsteczek w kierunku pola elektrycznego. Kiedy płyn ER poddamy ścinaniu z pewną prędkością to dodatkowa energia potrzebna jest do zerwania więzów między cząsteczkami, jak również do przezwyciężenia sił tnących towarzyszących lepkiemu efektom. Grubość warstwy płynu jest rzędu od 1 do 5 mm i wyznaczana jest odległością elektrod, napięciem zasilania oraz wartością przeniesionego obciążenia. Po

wyłączeniu napięcia zasilania opisywane próby wykazywały stałość właściwości reologicznych nawet po kilkudziesięciu tysiącach przełączeń. Dwufazowy materiał ER w postaci zawiesiny można opisać matematycznie modelem Binghama [7, 9] z naprężeniem ścinania  $\tau$ . Materiały ER typu zawiesiny mogą być stosowane zarówno przy naprężeniach ścinających (stycznych) jak i normalnych do powierzchni elektrod, gdzie wykorzystuje się zjawisko wyciskania materiału o zmiennych właściwościach. Druga grupa materiałów ER (jednofazowych) w postaci ciekłych kryształów charakteryzujących się mniejszym wzrostem lepkości do orientacji igielkowych molekuł kryształu pod działaniem pola elektrycznego. Materiały te można zamodelować traktując je jako ciało Kelvina-Voigta o parametrach będących funkcją przyłożonego napięcia do elektrod.

Do napełnienia prototypowego SER zastosowano krajowe płyny ER - (A) (wykonany przez Zespół autora pracy [4]), (B) i (C) (wykonany przez Zespół autorów pracy [10]). Skład objętościowy płynów: (A) - 35% skrobia, 65% olej transformatorowy, (B) - czysta chemicznie skrobia i olej transformatorowy, (C) - 25% poliuretan, 75% olej silikonowy. Porówna się również właściwości płynów (A), (B) i (C) z właściwościami płynu ER - D, produkcji angielskiej o symbolu LID 3354s firmy Smart Technology Ltd przedstawiono w Tabeli 1 [4, 10, 18]. Ze względu na ciągłe mieszanie się płynu w pracującym SER nie stosowano substancji stabilizujących.

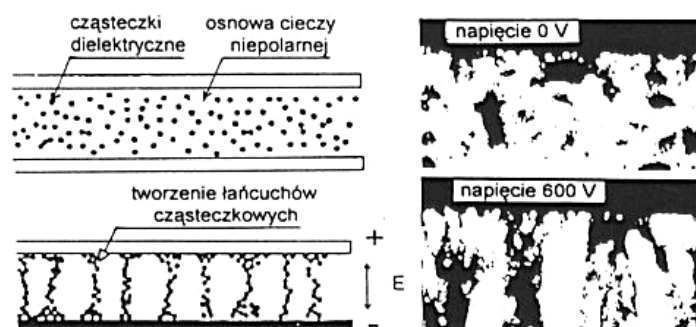
Tabela 1: Porównanie właściwości płynów ER

Typ płynu	Upływ- ność $\mu A / cm^2$	Gęstość $kg / m^3$	Lepkość $s / m^2$	Naprężenie ścinające kPa	Próg efektu $V$	Skład objętościowy płynu
(A)	1.1	910	$15 \cdot 10^{-6}$	0.24	800	35% skrobia, 65% olej transformatorowy
(B)	26.5	1040	$24 \cdot 10^{-6}$	0.35	1000	25% poliuretan 75% olej silikonowy
(D)	20	1460	110 mPa.sec	3.0	4000	37.5% polymer formaldehydowy, 39.5% polymer chloro-fluoronowy, 23% olej silikonowy

Gatunek zastosowanego płynu ER w urządzeniu ER dla spełnienia jego głównego przeznaczenia odgrywa podstawową rolę. Zachowanie się podczas eksploatacji urządzenia ER zależy od wielu czynników takich jak skład chemiczny komponentów, ich struktura, właściwości fizyko-chemiczne, podatność na oddziaływanie pola elektrycznego itp. Produkcja dostępnego na rynku płynu ER nie jest zadawalająco opanowana ze względu na wysokie wymagania eksploatacyjne. Powszechnym problemem w różnego rodzaju płynów ER jest niepożądane zjawisko "sedymentacji". Dostęp do płynów ER na rynku światowym jest skromny i ograniczony szczególnie na rynku krajowym. Wcześniej wiodącym producentem przez wiele lat była amerykańska firma Lord Corporation Ltd. Obecnie zaniechano produkcji tego płynu, kontynuując wytwarzanie płynów magnetoreologicznych MR. W Europie od kilku lat znane są płyny angielskie o nazwie ER Fluid Developments Ltd, niemieckie RWE.

W Japonii produkowane są płyny ER i MR przez firmy Bridgestone Corporation, Nippon Shokubai Co. Ltd, głównie na potrzeby zabezpieczeń przed wstrząsami sejsmicznymi. Ważnym czynnikiem, który decyduje o właściwościach eksploatacyjnych płynów ER jest wybór sterowania. Świadczy to o tym, że niektóre firmy wytwarzające płyny jednocześnie proponują zakup odpowiedniego sterownika zapewniającego optymalne wykorzystanie własności płynu.

W sprzęgłach i hamulcach najczęściej stosuje się dwa rodzaje płynów ER tj. płyny dwufazowe oraz jednofazowe (homogeniczne). Płyny dwufazowe są "zawiesinami" dielektrycznych cząsteczek w niepalnych cieczach, które przejawiają odwracalne zmiany w odpowiedzi reologicznej, gdy umieszczone są w polu elektrycznym. Fazę ciekłą tworzy często olej silikonowy nie przewodzący prądu elektrycznego, zaś fazę stałą tworzą łatwo polaryzujące się cząsteczki mineralne, organiczne lub polimery o średnicy od 2 do 10  $\mu\text{m}$  pod wpływem oddziaływania na nie pola elektrycznego. Wzrost naprężenia stycznego (ścinającego) płynów ER pod działaniem pola elektrycznego spowodowany jest łączeniem się spolaryzowanych cząsteczek stałych i tworzeniem łańcuchów ograniczających ruch płynu (Rys.6).



Rysunek 6: Schemat struktury płynu ER bez oddziaływania i z oddziaływaniem pola elektrycznego

Płyny dwufazowe zawierają także substancje stabilizujące, które utrudniają wytrącanie się (sedymentację) fazy stałej z powodu występujących sił odśrodkowych, bezwładności, grawitacji. Procentowy udział fazy stałej wynosi wagowo od 60% do 85% zaś objętościowo od 20% do 40%.

Płynami jednofazowymi są "ciekle kryształy" dla których wzrost naprężenia ścinającego (wzrost lepkości płynu ER) pod wpływem działania pola elektrycznego spowodowany jest zmianą orientacji molekuł w odniesieniu do kierunku przepływu płynu. Materiał ER w wyniku działania pola elektrycznego przekształca się z płynu w żel. W płynach jednofazowych nie występują niekorzystne zjawiska (koagulacja, sedymentacja, elektroforeza, wzajemne ścieranie się cząsteczek) związane z obecnością cząsteczek stałych. Płyny jednofazowe są jednak rzadziej stosowane niż dwufazowe ze względu na ich bardzo wysoką cenę. W płynach ER poddanych działaniu pola elektrycznego pod wpływem wysokiego napięcia od 1 kV do 5 kV/mm naprężenie ścinające  $\tau$  waha się w granicach 0.5-10 kPa.

### 3. KONSTRUKCJA SPRZĘGŁA ER

Wymagania stawiane nowoczesnym maszynom i urządzeniom związane są z dążeniem do wzrostu wydajności, komfortu użytkowania i niezawodności powodują konieczność poszukiwania nowych rozwiązań konstrukcyjnych. Jednym ze sposobów udoskonalania maszyn jest stosowanie nowych materiałów konstrukcyjnych.

W sprzęgłach i hamulcach część napędzająca i napędzana połączone są za pomocą płynu ER, zaś moment obrotowy lub hamowania (hamulec) przenoszony jest poprzez naprężenia ścinające  $\tau$  powstające w płynie na skutek oddziaływania pola elektrycznego.

W zależności od kształtu powierzchni roboczych rozróżnia się dwa rozwiązania konstrukcyjne sprzęgieł i hamulców tj. tarczowe i cylindryczne.

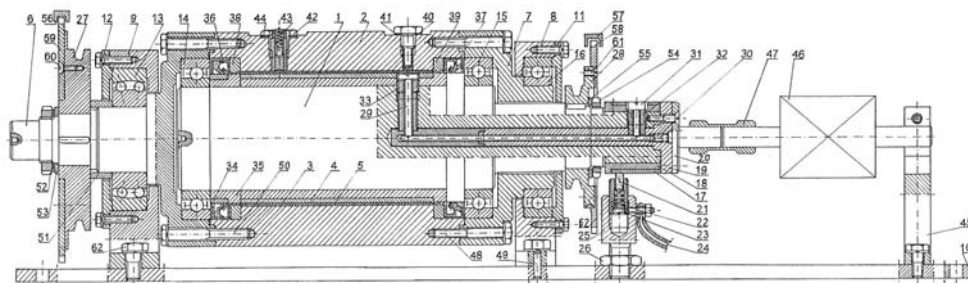
Z konstrukcyjnego punktu widzenia najważniejszymi elementami lub wielkościami decydującymi o właściwym działaniu urządzeń jak amortyzatory, tłumiki, poduszki zawieszonych, sprzęgła, hamulce są:

- wielkość szczeliny lub szczeliny dla przepływu płynu ER,
- sposób realizacji prowadzenia i uszczelnienia tłoka, tłoczyska, wirnika,
- sposób realizacji przepływu przez otwory w tłoku, szczelinę utworzoną pomiędzy tłokiem i elementem pośrednim lub cylindrem, wirnikiem a obudową,
- rozwiązanie problemu doprowadzenia przewodów zasilających i elektrod, inne (jak uszczelnienia, przebicia prądowe, łożyskowanie, opory ruchu).

Ważnym zagadnieniem dla optymalnego działania wymienionych urządzeń jest prawidłowe rozwiązanie problemów dotyczących właściwego i odpowiedniego doboru materiałów konstrukcyjnych i uszczelnień zapewniających szczelność i jak najmniejszy współczynnik tarcia współpracujących ze sobą elementów uszczelnień. Dla prawidłowej pracy omawianej grupy urządzeń, zastosowanie właściwego materiału ma wpływ na wartość natężenia pola elektrycznego oddziałującego na płyn ER i kształtującego jego właściwości. Istotne jest również spełnienie wymaganych wymogów technologicznych. Dotyczy to głównie starannej obróbki mechanicznej współpracujących ze sobą elementów, jakości powierzchni, właściwego, doboru pasowań i tolerancji w zależności od rozwiązania konstrukcyjnego urządzenia. Kompleksowe i spójne rozwiązanie wszystkich powyżej wymienionych grup zagadnień może zapewnić poprawną i bezawaryjną eksploatację urządzenia. Dla pracy urządzeń ER ważną rolę odgrywa odprowadzanie ciepła wydzielającego się w wyniku ruchu postępowego lub obrotowego elementów urządzenia i współpracy pierścieni uszczelniających z elementami ruchomymi.

Spośród wielu opracowanych koncepcji, zdecydowano się na rozwiązanie konstrukcyjne badanego sprzęgła elektreologicznego ER przedstawionego na Rys. 7. Rozwiązanie konstrukcyjne prototypowego ER powinno zapewnić prostą i niezawodną w działaniu konstrukcję oraz wymagania dotyczące:

- a) uszczelnienia,
- b) przebicia prądowego,
- c) temperatury,
- d) oporów przepływu,
- e) poboru mocy,
- f) bezpieczeństwa działania i eksploatacji.



Rysunek 7: Rozwiązanie konstrukcyjne badanego sprzęgła SER: 1) Wirnik, 2) obudowa sprzęgła (elektroda ujemna), 3) elektroda dodatnia, 4) tuleja izolująca, 5) warstwa płynu ER, 6) czop z obudową lewej części łożyskowania wirnika, 7) obudowa łożyskowania prawej części wirnika, 8) obudowa prawej części łożyskowania obudowy sprzęgła, 9) obudowa lewej części łożyskowania obudowy sprzęgła, 10) podstawa stanowiska badawczego, 11) pokrywa prawego łożyskowania obudowy sprzęgła, 12) pokrywa prawego łożyskowania obudowy sprzęgła, 13) łożysko kulkowe dwurzędowe wahlwe nr 1310, 14), 15), 16) łożyska kulkowe jednorzędowe nr 6016 zz, 17) zewnętrzny pierścień komutatora, 18) tuleja izolacyjna komutatora, 19), 32), 33) tuleje izolatorów elektrod doprowadzających napięcie, 20) łącznik momentomierza, 21) szczotka węglowa, 22) sprężyna dociskowa szczotki, 23) wkręt regulacyjny napięcie sprężyny, 24) przewód wysokonapięciowy, 25) obudowa szczotkotrzymacza, 26) nakrętka blokująca, 27) koło pasowe napędowe, 28) koło pasowe napędzające, 29), 30), 31) dodatnie elektrody doprowadzające napięcie, 34), tuleja pierścienia uszczelniającego, 35) tuleja uszczelnacza, 36), 37) pierścienie uszczelniające dwuwargowe, 38), 39) tekstolitowe pierścienie uszczelniające, 40) specjalna śruba napelniania płynu ER, 41) uszczelka, 42) specjalna śruba odpowietrzania układu, 43) zawór odpowietrzający, 44) uszczelka, 45) uchwyt mocowania momentomierza, 46) momentomierz, 47) sprzęgło tulejowe, 48), 50) śruby łączące obudowy łożysk z obudową (korpusem) sprzęgła, 49) kołki ustalające, 51) tuleja dystansowa, 52), 54) nakrętki specjalne, 53), 55) podkładki, 56), 57) czujniki optyczne pomiaru prędkości obrotowych, 58), 59) specjalne tarcze pomiarowe prędkości obrotowych, 60), 61) wkręty mocujące, 62) śruba regulacyjna położenie szczotki węglowej

W celu otrzymania prostej konstrukcji przyjęto, że oddziaływanie na płyn roboczy ER będzie tylko na obwodzie wewnętrznej części obudowy 1 (Rys.7) oraz zewnętrznej części 2 wirnika 3, zaś przepływ płynu w polu elektrycznym ma kierunek obwodowy wirnika. Powierzchnia 4 jako elektroda "dodatnia" obwodu wirnika 2 zasilana jest za pomocą szczotki 5 współpracującej z komutatorem 6 poprzez specjalny układ popychaczy 7 odizolowanych od wirnika za pomocą tulejek 8 wykonanych z tekstolitu. Elektrode "ujemną" stanowi obudowa 1 z podstawą 10. Tuleja zewnętrzna 11 wirnika 2 przewodząca prąd elektryczny wykonana jest z mosiądzu i odizolowana jest elektrycznie od części metalowej wirnika za pomocą tulei wykonanej z tekstolitu. Tuleje łączone są ze sobą za pomocą odpowiednio dobranego wcisku i specjalnego kleju. Przestrzeń w postaci pierścienia o długości 152 mm. Utworzonego przez średnicę wewnętrzną obudowy 1,  $\Phi = 104$  mm i średnicę zewnętrzną wirnika 2,  $\Phi = 100$  mm wypełniona może być płynem ER o objętości 100 ml. Wirnik 2 łożyskowany

jest za pomocą dwóch łożysk kulkowych 12 oraz uszczelniony przez zmianę średnicy wirnika i uszczelniacze dwuwargowe 13. Obudowa 1 wykonująca ruch obrotowy ułożyskowana jest w łożysku wahlowym 14 i łożysku sztywnym kulkowym 15. Konstrukcja sprzęgła ER przewiduje modernizację stanowiska badawczego polegającą na tym, że sprzęgło ER może stać się sprzęgłem magnetoreologicznym MR. Aby to zrealizować należy wykonać specjalne podtoczenie części zewnętrznej tulei obudowy 1 oraz zamontować cewkę indukcyjną wytwarzającą pole elektromagnetyczne. Moce zasilania wzmacniaczy dla sprzęgła ER i MR są porównywalne. Pomiędzy sprzęgłami jest taka różnica, że sprzęgło MR zasilane jest napięciem niskim rzędu 12 V, zaś prądem o znacznie większej wartości i rzędu 1,5-3 A.

#### **4. CZYNNIKI WPLYWAJĄCE NA KSZTAŁT CHARAKTERYSTYK REOLOGICZNYCH PROTOTYPOWEGO SPRZĘGŁA ER**

Zbudowane stanowisko badawcze pozwoli na przeprowadzenie badań eksperymentalnych sprzęgła ER. Na ich podstawie można będzie sporządzić charakterystyki dla oceny przenoszenia obciążenia na wale wyjściowym badanego sprzęgła. Ich przebiegi mogą zależeć od wielu czynników i parametrów, które zestawzić można w dwóch grupach. Do pierwszej z wymienionych grup należy zaliczyć:

- rodzaj zastosowanego płynu ER,
- wymiary geometryczne sprzęgła ER, w tym przede wszystkim średnica i długość wirnika sprzęgła,
- sposób realizacji przepływu płynu ER,
- rodzaj materiału z którego wykonana jest elektroda wirnika,
- wielkość szczeliny przez którą przepływa płyn ER.

Do drugiej grupy należą parametry eksploatacyjne, które mogą wpływać na kształt wspomnianych charakterystyk tj.:

- -wartość napięcia prądu przepływającego przez płyn w szczelinie,
- wielkość powierzchni elektrody dodatniej,
- prędkość obrotowa wirnika,
- temperatura pracy płynu.

Wszystkie wymienione czynniki mogą znacząco wpływać na kształt charakterystyk reologicznych ilustrujących właściwości sprzęgła. Zamiana pracy momentu tarcia na ciepło, rejestrowana na zewnętrznej powierzchni obudowy sprzęgła może także w znaczący sposób wpływać na zmianę otrzymanych charakterystyk reologicznych.

W analizowanym sprzęgle istnieją dwie przyczyny powodujące nagrzewanie się podczas pracy. Pierwszym źródłem ciepła są opory mechaniczne. Drugim źródłem ciepła są procesy zamiany pracy momentu tarcia płynu ER na energię cieplną. Ilość wydzielającego się w tych procesach ciepła jest znaczna, zwłaszcza w warunkach, gdy sprzęgło pracuje w sposób ciągły, jest obciążone cyklicznie. Mierzone podczas pracy sprzęgła, zmienne wartości temperatur, zapisane w funkcji czasu, zostaną przedstawione jako przykład na rysunkach. Otrzymane z pomiarów rezultaty badań pokażą jednocześnie jak wartość przenoszonego obciążenia

zmienia się wraz ze zmianą temperatury. Rejestrację prezentowanych wartości temperatur ustali się na podstawie pomiaru temperatury, która będzie mierzona za pomocą termopar, zamocowanych w obudowie sprzęgła i mających bezpośredni kontakt z płynem roboczym ER. Rozkład temperatur na obudowie sprzęgła będzie można uzyskać na podstawie zapisu z kamery termowizyjnej.

## 5. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Konstrukcja sprzęgła ER ma głównie na celu:

- a) ocenę możliwości zmian prędkości obrotowych i momentów obrotowych,
- b) ocenę poprawności rozwiązania technicznego np. szczelności, odporności na przebicia elektryczne, zmniejszenie oporów ruchu, trwałości,
- c) ocenę stosowanych inteligentnych roboczych płynów ER, pod kątem wymagań stawianych płynom ER.

Uzyskane wyniki stanowiąc będą podstawę do wprowadzania modyfikacji istniejącego rozwiązania i zastosowania w praktyce w układach napędowych układów mechanicznych. Na podstawie przeprowadzonych rozważań i badań doświadczalnych prototypowego sprzęgła ER można sformułować następujące wnioski:

- a) w fazie projektowania sprzęgła ER z płynem ER należy opierać się na charakterystykach reologicznych otrzymanych w wyniku badań innych tego typu urządzeń,
- b) zastosowanie płynu ER w sprzęgle ER umożliwi oddziaływanie na wartość przenoszonego momentu obrotowego za pomocą zmiany napięcia zasilania,
- c) z przedstawionych rozważań teoretycznych i eksperymentów można spodziewać się, że możliwy jest dla obecnie wytwarzanych inteligentnych płynów ER sposób wykorzystania w zastosowaniach praktycznych różnych układów mechanicznych. Dotyczy to oczywiście pewnego obszaru i zakresu zastosowań z pewnymi ograniczeniami,
- d) praktyczne zastosowanie inteligentnego płynu ER wymaga wielu badań teoretycznych i doświadczalnych, rozwiązania wielu problemów technicznych jak trwałość płynu ER, odprowadzenia ciepła (sposobu stabilizacji temperatury), sterowania, pokonania niepożądanego zjawiska sedymentacji płynu ER.

## LITERATURA

- [1] Winslow W. M., Induced Fibration of Suspensions, *Journal of Applied Physics*, vol. 20, pp. 1137-1140, 1949.
- [2] Carlson J., Catanzarite D., Clair K., Commercial Electrorheological Fluid Devices, 5<sup>th</sup> International Conference "ER, MR Suspensions and Associated Technology", Sheffield, 1995.
- [3] Inoue A., Ryu U., Nishimura S., Caster-walker with Intelligent Brakes Employing ER Fluid Composed of Liquid Crystalline Polysiloxane, *Proceedings of the 8th International Conf. on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions*, Nice, France 9-13 July 2001, World Scientific Publishing Co., 23-29, 2002.

- [4] Kęsy Z., Zastosowanie cieczy magnetoreologicznej i elektoreologicznej do sterowania przekładnią hydrokinetyczną, VIII Seminarium „Napędy i Sterowanie 2002”, Gdańsk 2002.
- [5] Lindler J. E., Wereley N. M., Parametric Analysis and Testing of an Electrorheological Fluid Damper, *Smart Structures and Integrated Systems*, Proceedings of SPIE, vol. 3668, pp. 474-486, 1999.
- [6] Papadopoulos C. A., Brakes and Clutches Using ER Fluids, *Mechatronics*, no. 8, pp. 719-726, 1998.
- [7] Stevens N, Sproston J., Stanway R., An Experimental Study of Electrorheological Torque Transmission, *Transaction of the ASME*, vol. 110, pp. 182-188, 1988.
- [8] Wereley N., Pang L., Kamath G., Idealized Hysteresis Modeling of Electrorheological and Magnetorheological and Dampers, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 9, pp. 642-649, 1998.
- [9] Gavin H., P., Annular Poiseuille Flow of Electrorheological and Magnetorheological Materials, *Journal of Rheology* 45(4), pp. 983-994, 2001.
- [10] Krztoń-Maziapa A., Ciszewska M., Płocharski J., Ciecze Elektoreologiczne, materiały, zjawiska, zastosowania, *Polimery* 11-12, 2003.
- [11] Lee H., G., Choi S. B., Han S., S., Kim J., H. and Suh M., S., Bingham and Response Characteristics of ER Fluids in Shear and Flow Modes, In Proceedings of the 7<sup>th</sup> International Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions, Honolulu, Hawaii, July 19-23, pp. 523-530, 1999.
- [12] Ławniczak A., Milecki A., Ciecze elektro i magnetoreologiczne oraz ich zastosowanie w technice, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 1999.
- [13] Weiss K., Carlson J., Nixon D., Viscoelastic Properties of Magneto and Electrorheological Fluids, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 5, pp. 772-775, 1994.
- [14] Weiss K. D., Coulter J. P., Carlson J. D., Electrorheological Materials and their Usage in Intelligent Material Systems and Structure, Part I, II; Mechanisms, Formulations and Properties, In Proceedings of the Recent Advances in Adaptive and Sensory Materials and their Applications, C. A., Rogers and Lancaster, Technomic Publishing Company, Inc., pp. 1-17, 1992.
- [15] Gavin H., P., Electrorheological Dampers for Structural Vibration Suspension, PhD Dissertation, Department of Civil and Environmental Engineering University of Michigan, 1997.
- [16] Monkman G. J., Exploitation of Compressive Stress in Electrorheological Coupling, *Mechatronics*, vol. 7, no. 1, pp. 27-36, 1997.
- [17] Milecki A., Zastosowanie cieczy elektoreologicznych i magnetoreologicznych w serwonapędach elektrohydraulicznych, *Hydraulika i Pneumatyka*, nr. 5, 1998.
- [18] Smart Technology Ltd., [www.smarttec.co.uk](http://www.smarttec.co.uk).



## **DYNAMIKA DACHÓW PŁYWAJĄCYCH W ZBIORNIKACH NA CIECZCE OD WPLYWÓW SEJSMICZNYCH**

**Ryszard Sygulski, Anita Kaczor**

Instytut Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Poznańska  
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań  
e-mail: {ryszard.sygulski, anita.kaczor}@ikb.poznan.pl

---

**Abstract:** *Seismic response of a floating roof covering a cylindrical liquid storage tank is considered. The analysed problem is a coupled problem of the fluid-structure type. A boundary integral equation is used to describe a hydrodynamic pressure of a liquid in the tank. The bottom of the tank and the floating roof surface are discretized using the triangular curvilinear 6-node boundary elements. The BEM is used to find the fluid mass matrix. The flexibility matrix of the roof is calculated using the finite element method computer program. Hydrostatic lift is modeled by analogy to forces of the Winkler foundation. The liquid is assumed to be inviscid and incompressible, the bottom of the tank is treated as rigid. The floating roof of a real structure consisting of a pontoon and a plate is analysed. Having found the natural frequencies and their corresponding mode shapes, the modal analysis of the vibrations of the roof excited horizontally by an earthquake is performed. The equation of motion is integrated using Newmark method. Numerical results of the liquid free surface waves and vibration of the floating roof in a storage tank subjected to real earthquake accelerograms are presented.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

W pracy analizuje się drgania swobodne i wymuszone wpływami sejsmicznymi dachu pływającego w cylindrycznym zbiorniku na cieczce.

Tego typu zbiorniki stosuje się często w przemyśle naftowym do magazynowania ropy i produktów ropopochodnych. Zastosowanie dachów pływających spoczywających bezpośrednio na cieczy ma na celu ograniczenie strat spowodowanych parowaniem magazynowanych produktów ropopochodnych. Konstrukcja dachu składa się z pierścieniowego pontonu i wewnętrznej cienkiej płyty (membrany) zamocowanej do pontonu. Płyta często usztywniona jest żebrami. Dachy te nazywane są dachami pontonowo-membranowymi. W przypadku zbiorników o dużych rozpiętościach stosuje się dachy pływające dwupłytowe, zbudowane z dwóch płyt połączonych usztywniającymi przeponami kratowymi. Dachy pływające mają średnicę mniejszą od średnicy płaszczki zbiornika. W przestrzeni pomiędzy płaszczką i dachem umieszcza się system uszczelnień zapewniających szczelność zbiornika [1]. W pracy przyjęto założenie, że uszczelnienie jest elastyczne i pomija się siły tarcia.

Problematyka dynamiki zbiorników na cieczy od wpływów sejsmicznych została szeroko omówiona w pracy [2].

Zagadnienia swobodnego falowania cieczy w zbiornikach o kształtach regularnych (cylindrycznych, prostopadłościennych) mają rozwiązania w postaci analitycznej. Dla zbiorników o dowolnym kształcie stosuje się metody numeryczne (najczęściej metodę elementów skończonych, metodę elementów brzegowych, metodę różnic skończonych).

Drgania swobodne sprzężone w zbiorniku cylindrycznym w kontakcie z membraną i jednorodną płytą analizowano w pracy [3] metodami analitycznymi.

Dynamikę dachów pływających w zbiornikach od działania porywów wiatru analizowano w pracy [4]. Do rozwiązania problemu zastosowano szeregi Fouriera-Bessela.

W niniejszej pracy ciśnienie hydrodynamiczne cieczy na ściany zbiornika zostało opisane brzegowym równaniem całkowym. Do jego rozwiązania zastosowano metodę elementów brzegowych [5]. Zastosowano trójkątne, krzywoliniowe, sześciowęzłowe izoparametryczne elementy brzegowe. Drgania swobodne oraz wymuszone dachu pływającego porównano z drganiami powierzchni swobodnej cieczy (zbiornik bez dachu). Analizowano horyzontalne wymuszenie sejsmiczne, które poprzez dno przekazuje się na całą konstrukcję. Przedstawiono wyniki wybranych analiz numerycznych drgań, przy obciążeniu akcelerogramem rzeczywistego trzęsienia ziemi (El Centro 1940).

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

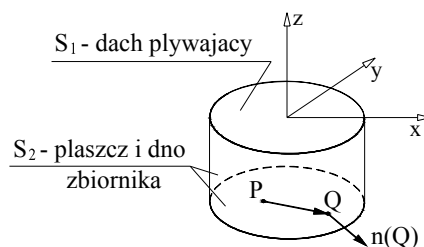
Rozważa się zbiornik cylindryczny ze swobodną powierzchnią cieczy  $S_1$  oraz powierzchnią  $S_2$ , na którą składa się powierzchnia płaszcza i dna zbiornika (Rys. 1). Na powierzchni cieczy spoczywa dach pływający. W przyjętym modelu obliczeniowym zakłada się, że ciecz jest nieściśliwa i nielepka. Potencjał małych zaburzeń pola prędkości cieczy  $\Phi(x, y, z, t)$  spełnia równanie Laplace'a:

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

Rozważa się małe drgania cieczy i dachu pływającego. Płaszcz zbiornika i jego dno traktuje się jako nieodkształcalne.

Warunki brzegowe na powierzchni  $S$  są warunkami typu Neumanna:

- $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial w_n}{\partial t}$  na powierzchni  $S_2$ , (2)



Rysunek 1: Zbiornik z dachem pływającym

$$\bullet \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial w_1}{\partial t} \quad \text{na powierzchni } S_1, \quad (3)$$

gdzie  $w_1$  – przemieszczenia dachu pływającego,  $w_n$  – przemieszczenia ścian zbiornika w kierunku normalnym, wywołane trzęsieniem ziemi. Warunki brzegowe na powierzchni  $S_1$  są warunkami sprzężenia dachu pływającego i cieczy.

Ciecz w zbiorniku znajduje się w polu grawitacyjnym i na powierzchnię dachu działa ciśnienie hydrostatyczne od wyporu cieczy:

$$p_s = -\rho g w_1, \quad (4)$$

gdzie  $\rho$  – gęstość cieczy,  $g$  – przyspieszenie ziemskie.

Hydrodynamiczne ciśnienie  $p_h$  działające na powierzchnię  $S$  określa równanie:

$$p_h = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (5)$$

Rozwiązanie równania (2) można przedstawić w postaci potencjału warstwy pojedynczej i podwójnej. Po wykorzystaniu (3) i (5) przyjmuje ono postać następującego brzegowego równania całkowego [5]:

$$C(P)p_h(P) = -\rho \int_S \ddot{w}(Q)\Phi^*(P,Q)dS(Q) - \int_S p_h(Q) \frac{\partial \Phi^*(P,Q)}{\partial n(Q)} dS(Q), \quad (6)$$

gdzie:  $C(P)$  - współczynnik, który dla gładkiej powierzchni jest równy 0.5,

$\Phi^*(P,Q) = \frac{1}{4\pi r(P,Q)}$  - rozwiązanie podstawowe równania (1).

### 3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Hydrodynamiczne ciśnienie cieczy jest opisane przez brzegowe równanie całkowite (6). Do jego rozwiązania zastosowano metodę elementów brzegowych. Powierzchnię  $S$  zbiornika (dach pływający, płaszcz i dno) zdyskretyzowano izoparametrycznymi, trójkątnymi, sześciowęzłowymi, krzywoliniowymi elementami brzegowymi. Po dyskretyzacji równanie (6) w zapisie macierzowym przyjmie postać:

$$\mathbf{C}\mathbf{p}_h = -\rho \mathbf{A}\ddot{\mathbf{w}} - \mathbf{B}\mathbf{p}_h \quad (7)$$

gdzie:  $\mathbf{p}_h = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_{1h} \\ \mathbf{p}_{2h} \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{Bmatrix}$ ,  $\mathbf{p}_h$  – wektor ciśnienia hydrodynamicznego,  $\mathbf{p}_{1h}$  - działającego

na dach,  $\mathbf{p}_{2h}$  – działającego na ściany i dno zbiornika,  $\mathbf{w}$  – wektor przemieszczeń węzłów elementów,  $\mathbf{w}_1$  – dachu,  $\mathbf{w}_2$  – ścian i dna zbiornika,  $\mathbf{C}$  – diagonalna macierz współczynników  $C$ ,  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  – macierze kwadratowe  $[N \times N]$ ,  $N$  – liczba węzłów wszystkich elementów,  $M$  – liczba węzłów elementów dachu pływającego. Obliczenia elementów macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  omówiono w pracy [6].

Z równania (7) otrzymujemy:

$$\mathbf{p}_h = -\rho \mathbf{H}\ddot{\mathbf{w}}, \quad (8)$$

gdzie:  $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1^+ \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C} + \mathbf{B}$ , a  $\mathbf{B}_1^+$  - macierz pseudoodwrotna do macierzy  $\mathbf{B}_1$ .

Macierz  $\mathbf{B}_1$  jest osobiwa, dlatego obliczamy macierz pseudoodwrotną Moore'a-Penrose'a, używając procedury SVD [7].

Zależność pomiędzy siłami hydrodynamicznymi działającymi na węzły a hydrodynamicznym ciśnieniem działającym na powierzchnię elementów można zapisać w postaci:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{p}_{1h}, \quad (9)$$

gdzie:  $\mathbf{T}_1$  - macierz transformacji,  $\mathbf{P}_1$  - wektor sił hydrodynamicznych.

Wykorzystując równania (8) i (9), wektor sił hydrodynamicznych działających na węzły elementów dachu pływającego można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{P}_1 = -\mathbf{M}_f \ddot{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{P}_{1S}, \quad (10)$$

gdzie:  $\mathbf{M}_f = \rho \mathbf{T}_1 \mathbf{H}_{11}$  - macierz mas cieczy,  $\mathbf{P}_{1S} = -\rho \mathbf{T}_1 \mathbf{H}_{12} \ddot{\mathbf{w}}_n$  - wektor obciążenia.

Działanie cieczy na drgający dach składa się z sił hydrostatycznego wyporu i z sił bezwładności cieczy. Siły hydrostatycznego wyporu cieczy są analogiczne do sił reakcji podłoża sprężystego typu Winklera.

Macierz podatności dachu pływającego (płyta spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera) została obliczona za pomocą programu metody elementów skończonych PL-WIN, w którym zastosowano trójkątne i czworokątne płytowe elementy skończone. Węzły elementów skończonych dachu pokrywały się z węzłami elementów brzegowych cieczy. Elementy macierzy podatności płyty obliczano jako przemieszczenia pionowe węzłów elementów od jednostkowych sił węzłowych.

Równanie ruchu dachu pływającego można zapisać w postaci:

$$\mathbf{I} \mathbf{w}_1 + \mathbf{D}(\mathbf{M} + \mathbf{M}_f) \ddot{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{D} \mathbf{P}_{1S}, \quad (11)$$

gdzie:  $\mathbf{D}$  - macierz podatności płyty,  $\mathbf{M}$  - macierz mas płyty,  $\mathbf{I}$  - macierz jednostkowa. Macierz mas płyty przyjęto w postaci diagonalnej (masy skupione w węzłach).

Częstości kołowe i postacie drgań własnych dachu uzyskamy po rozwiązaniu poniższego równania:

$$(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{0}, \quad (12)$$

gdzie:  $\mathbf{E} = \mathbf{D}(\mathbf{M} + \mathbf{M}_f)$ ,  $\lambda = 1/\omega^2$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}_1$  - wektor amplitud przemieszczeń węzłów dachu pływającego,  $\omega$  - częstość kołowa drgań własnych.

Do rozwiązania równań ruchu drgań wymuszonych wpływami sejsmicznymi (11) zastosowano transformację modalną. Dokonano podstawienia:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{Q} \mathbf{q}, \quad (13)$$

gdzie:  $\mathbf{q}$  - wektor współrzędnych modalnych,  $\mathbf{Q}$  - macierz unormowanych wektorów własnych.

Układ równań ruchu we współrzędnych modalnych przyjmuje teraz postać:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{P}_{1S}, \quad (14)$$

gdzie:  $\mathbf{\Omega} = \text{diag}(\omega_i)$ ,  $\mathbf{Z} = \text{diag}(\zeta_i)$ ,  $\zeta_i$  - współczynnik tłumienia  $i$ -tej postaci drgań.

Równania (14) rozwiązano metodą Newmarka (średniego przyspieszenia).

Ciśnienia hydrodynamiczne działające na płytę i ściany zbiornika na podstawie równania (8) można obliczyć z zależności:

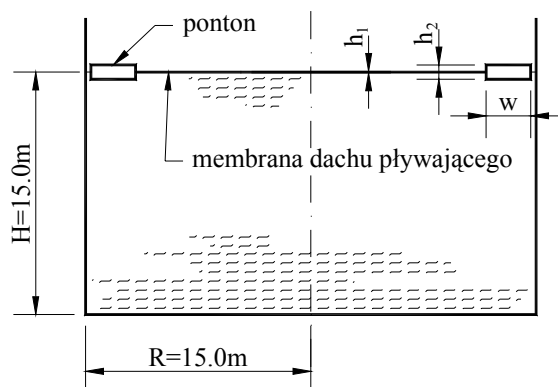
$$\mathbf{p}_{1h} = -\rho (\mathbf{H}_{11} \ddot{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{H}_{12} \ddot{\mathbf{w}}_n), \quad (15)$$

$$\mathbf{p}_{2h} = -\rho (\mathbf{H}_{21} \ddot{\mathbf{w}}_1 + \mathbf{H}_{22} \ddot{\mathbf{w}}_n). \quad (16)$$

#### 4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

##### 4.1. DRGANIA SWOBODNE

Analizowano drgania swobodne cieczy i dachu pływającego w zbiorniku cylindrycznym o średnicy 30.0m, napełnionym cieczą o gęstości  $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$  do wysokości  $H=15.0 \text{ m}$ . Membrana dachu pływającego wykonana jest z blachy stalowej o grubości  $h_1=5\text{mm}$ , wymiary pontonu brzegowego są następujące: szerokość  $w=2.5 \text{ m}$ , wysokość  $h=0.8 \text{ m}$ , ścianki pontonu wykonane są z blachy o grubości 5 mm, wzmocnionej żebrami. Ponton zamodelowano zastępczą płytą izotropową o grubości  $h_2=0.24 \text{ m}$ . Przyjęto masę jednostkową membrany:  $50.0 \text{ kg/m}^2$ , a pontonu:  $150 \text{ kg/m}^2$ .



Rysunek 2: Budowa zbiornika z dachem pływającym

Do obliczenia macierzy mas cieczy wykorzystano trójkątne, krzywoliniowe, sześciowęzłowe izoparametryczne elementy brzegowe. Do dyskretyzacji powierzchni zbiornika zastosowano łącznie 176 elementów brzegowych, w tym: do dyskretyzacji dachu - 56 elementów, ścian bocznych i dna - 120 elementów. Liczba stopni swobody węzłów elementów dachu pływającego wynosiła 129, a całkowita liczba stopni swobody zadania 418.

Do obliczania macierzy podatności płyty na podłożu sprężystym został wykorzystany program komputerowy PL-WIN, w którym zastosowano trójkątne i czworokątne płytowe elementy skończone. Węzły elementów skończonych pokrywały się z węzłami elementów brzegowych. Całkowita liczba elementów skończonych płyty po dyskretyzacji wynosiła 132.

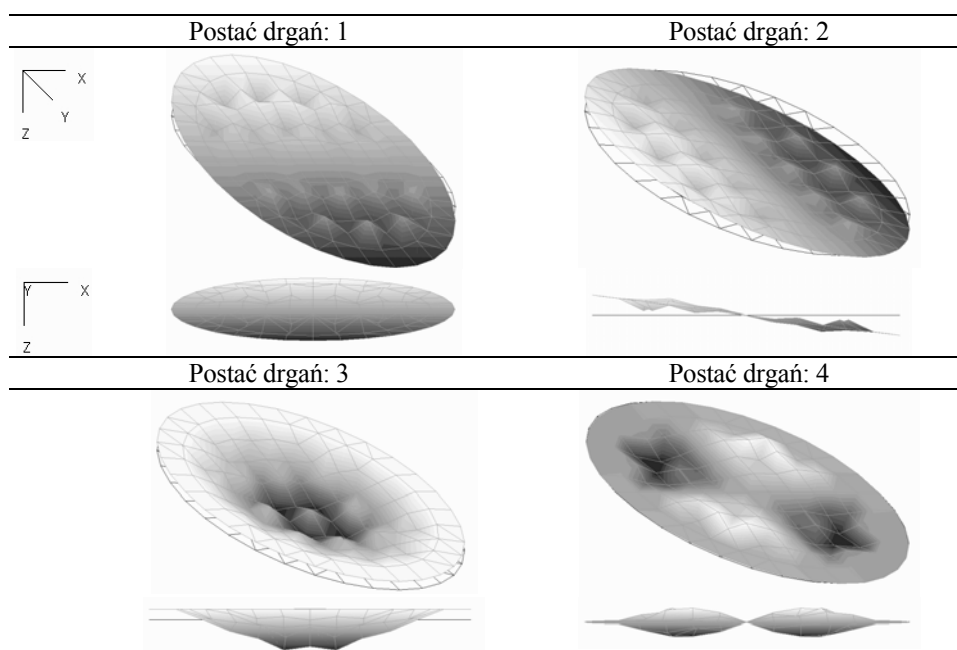
Wykonano obliczenia częstości kołowych i postaci drgań własnych dachu pływającego w zbiorniku napelnionym cieczą oraz obliczenia częstości kołowych i postaci drgań swobodnego falowania cieczy (zbiornik bez dachu pływającego).

Wyniki obliczeń sześciu pierwszych częstości drgań własnych zamieszczono w Tabeli 1, a odpowiadające im postaci drgań własnych dachu pontonowego zestawiono w Tabeli 2. Postacie drgań swobodnego falowania cieczy w zbiorniku bez dachu pokazano w Tabeli 3.

Tabela 1: Częstości drgań własnych dachu pływającego i powierzchni swobodnej cieczy w zbiorniku cylindrycznym

Postać	Częstości drgań własnych dachu pływającego	Częstości drgań własnych powierzchni swobodnej cieczy
	[rad/s]	[rad/s]
1	1.0030	1.0680
2	1.0048	1.0681
3	1.4553	1.4054
4	1.6905	1.4054
5	1.7045	1.5737
6	1.7127	1.6499

Tabela 2: Postacie drgań własnych pontonowego dachu pływającego



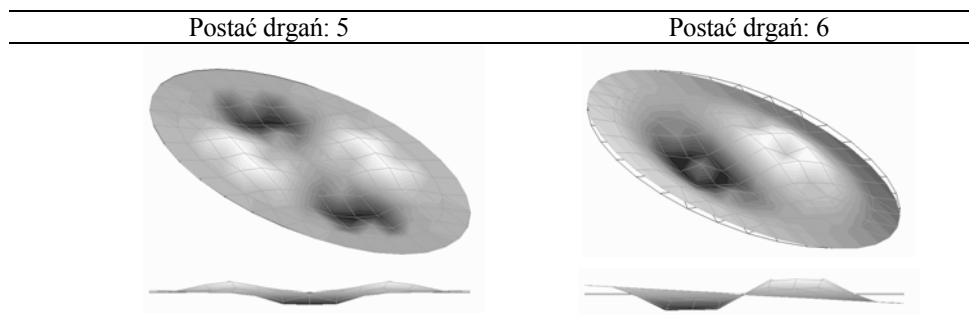
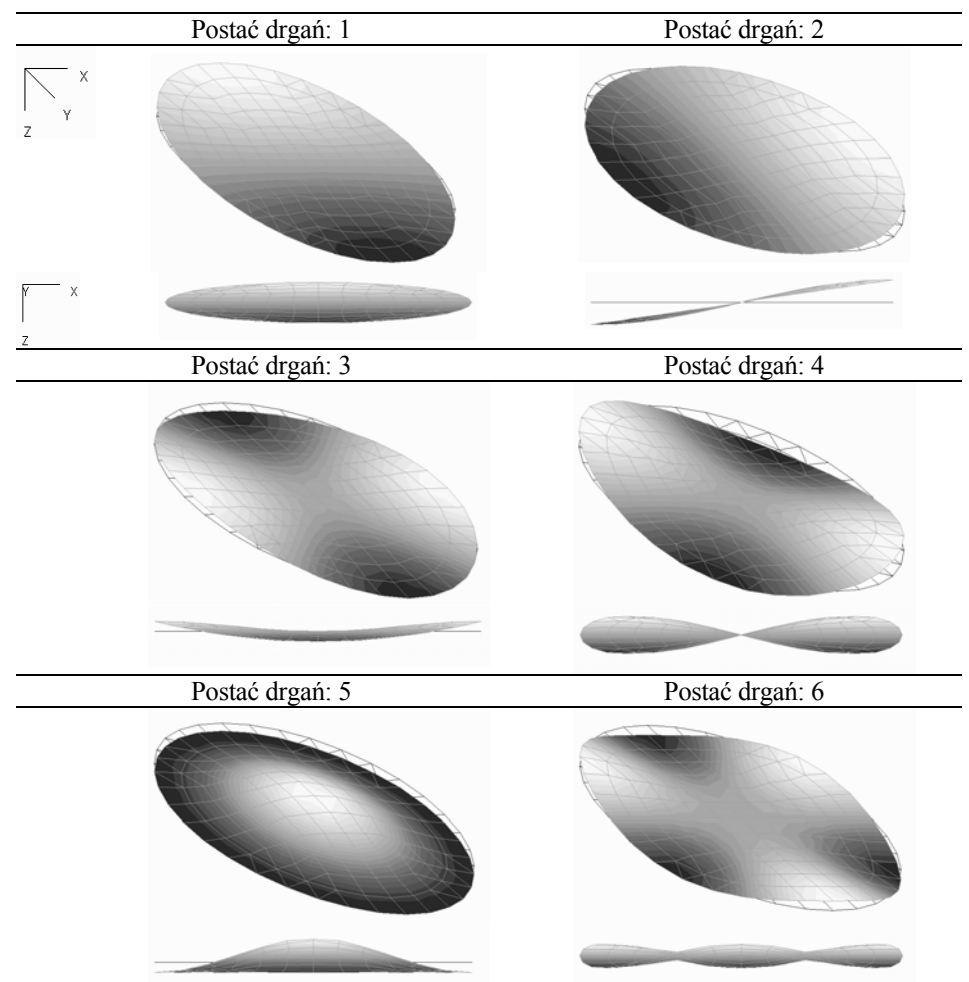
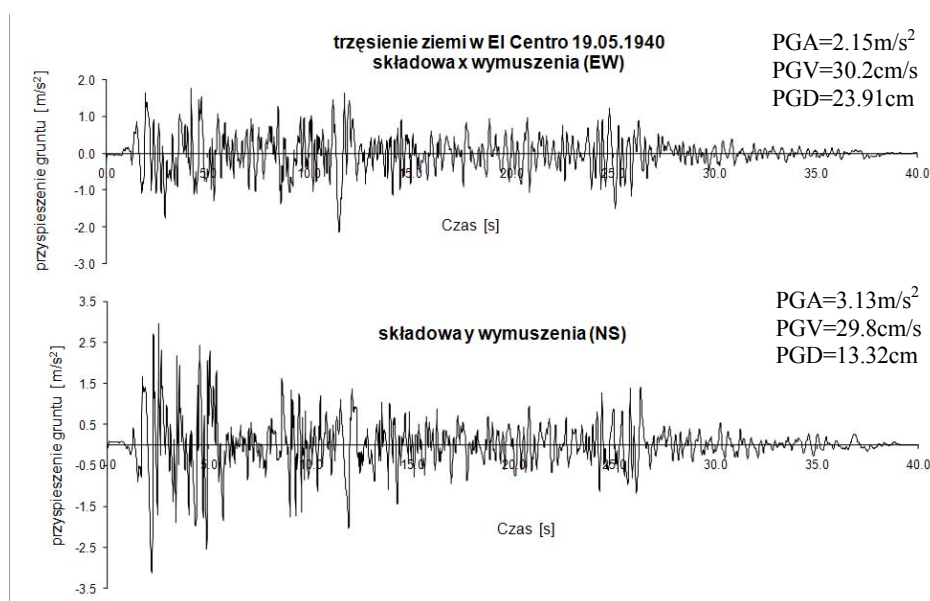


Tabela 3: Postacie drgań własnych powierzchni swobodnej cieczy



#### 4.2. DRGANIA OD WYMUSZENIA SEJSMICZNEGO

Analizowano zbiornik cylindryczny o wymiarach i konstrukcji przedstawionej w p.4.1, poddany wymuszeniu sejsmicznemu. Wykorzystano przykładowy akcelerogram z trzęsienia ziemi El Centro z roku 1940. Przebieg zmian przyspieszenia gruntu (składowe horyzontalne w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach) przedstawia Rysunek 3. Wstrząsy o sile 6.95 w skali Richtera trwały 40 sekund, przyspieszenia gruntu pomierzone w odstępach czasowych  $dt=0.01s$ .



Rysunek 3: Przebieg zmiany przyspieszeń poziomych gruntu w trakcie trzęsienia ziemi El Centro 1940 w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach

Do transformacji modalnej równania ruchu płyty przyjęto 70 podstawowych postaci drgań własnych ( $\omega_1=1.003\text{rad/s}$  do  $\omega_{70}=9.119\text{rad/s}$ ), dalsze zwiększanie liczby postaci drgań nie powodowało zauważalnych zmian w rozwiązaniu. Tłumienie przyjęto na poziomie 2% tłumienia krytycznego, jednakowe dla wszystkich postaci.

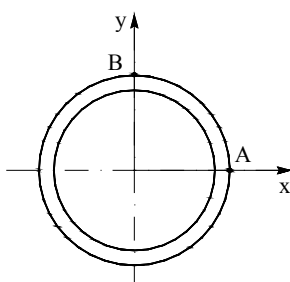
Poniżej przedstawiono wybrane wyniki analiz numerycznych problemu. W Tabeli 4 zestawiono wartości maksymalnych przemieszczeń dachu pływającego i powierzchni swobodnej cieczy (zbiornik bez dachu) wywołanych składową  $x$  oraz składową  $y$  obciążenia sejsmicznego. Jest widoczne, że obecność dachu wpływa stabilizująco na ruch cieczy w zbiorniku. Maksymalne przemieszczenia w zbiorniku z dachem są mniejsze o około 25%.

Rys. 5 przedstawia przebieg wychyleń wybranych węzłów A i B (por. Rys. 4) w zbiorniku z dachem i bez dachu (przemieszczenia sumaryczne).

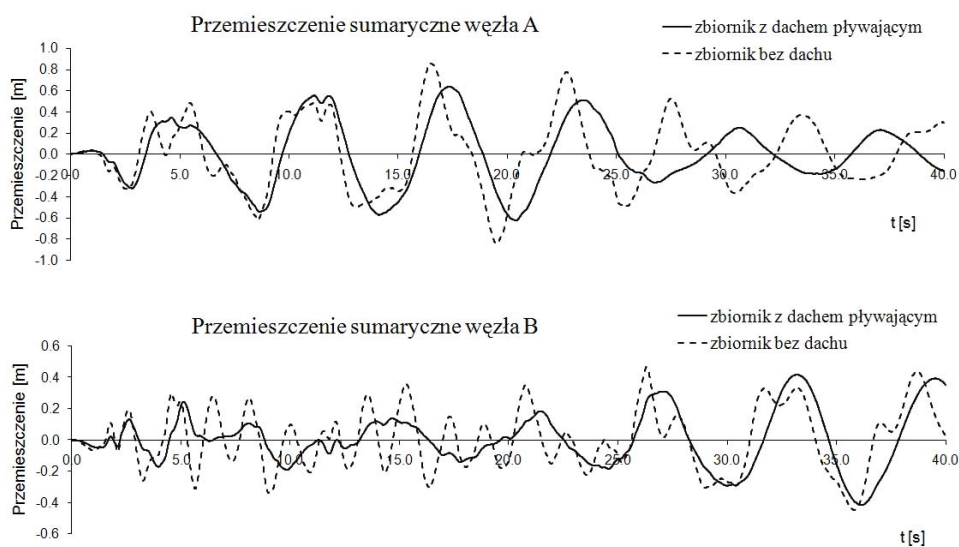


Tabela 4: Maksymalne przemieszczenia węzłów dachu pływającego i powierzchni swobodnej cieczy

	Składowa $x$ wymuszenia		Składowa $y$ wymuszenia	
	w [m]	t [s]	w [m]	t [s]
Dach pływający	0.63309	17.35	-0.41676	33.20
Powierzchnia swobodna cieczy	0.85490	16.51	-0.46766	26.31

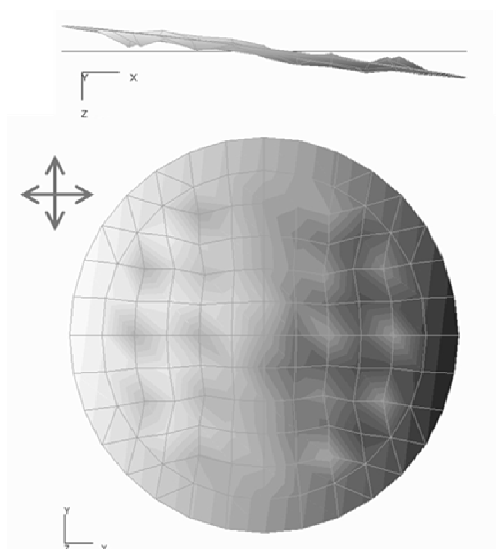
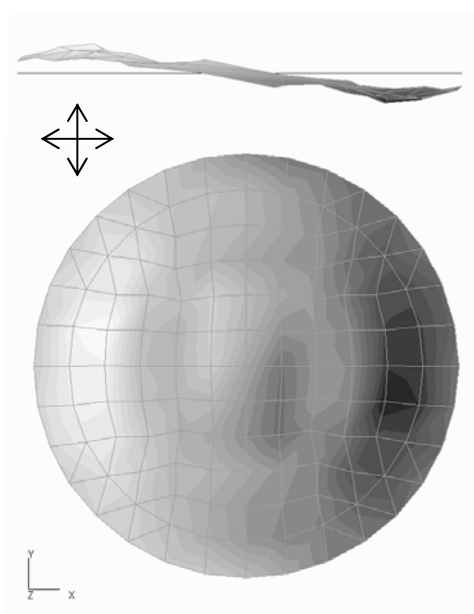


Rysunek 4: Rzut płyty

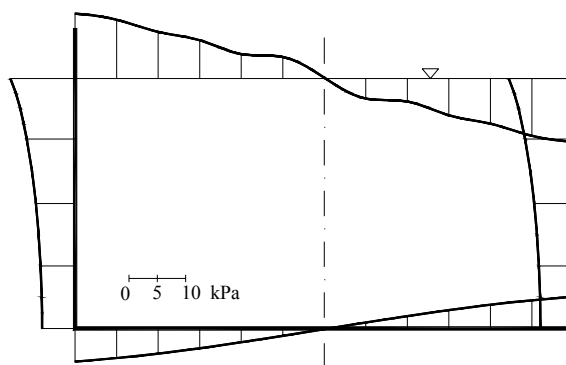


Rysunek 5: Przebieg czasowy wychyleń wybranych węzłów

Sumaryczne wychylenia dachu w chwili  $t=17.35s$  (od składowej  $x$  i składowej  $y$  obciążenia sejsmicznego) pokazano na Rys. 6, natomiast na Rys. 7 - analogiczne wychylenia powierzchni swobodnej cieczy (zbiornik bez dachu).

Rysunek 6: Sumaryczne wychylenia dachu w chwili  $t=17.35s$ Rysunek 7: Sumaryczne wychylenia powierzchni swobodnej cieczy (zbiornik bez dachu) w chwili  $t=17.35 s$

Rozkład ciśnień hydrodynamicznych na ściany, dno i dach pływający zbiornika w chwili  $t=17.35s$  ilustruje Rys.8.



Rysunek 8: Rozkład ciśnień hydrodynamicznych w zbiorniku z dachem pływającym od składowej x trzęsienia ziemi, w chwili  $t=17.35s$

## 5. WNIOSKI

- Analizowano zadanie sprzężonych drgań dachu pływającego i cieczy; zastosowano metodę elementów brzegowych do obliczenia macierzy mas cieczy i metodę elementów skończonych do wyznaczenia macierzy podatności płyty pływającej; podejście to okazało się bardzo efektywne ze względu na nieduży wymiar zadania,
- porównano drgania dachu pływającego i powierzchni swobodnej cieczy (zbiornik bez dachu); stwierdzono stabilizujący wpływ dachu na ruch cieczy,
- obliczono i porównano częstotliwości i postacie drgań własnych dachu i powierzchni swobodnej cieczy (zbiornik bez dachu), dla obu tych przypadków najniższe częstotliwości drgań własnych mają podobne wartości.

## LITERATURA

- [1] Ziółko, J.: *Zbiorniki metalowe na ciecze i gazy*. Arkady, Warszawa 1986.
- [2] Rammerstorfer, F.G, Scharf, K., Fisher, F.D.: *Storage tanks under earthquake loading*. Applied Mechanics Reviews, vol. 43, no 11, 1990, p. 261-282.
- [3] Bauer, H.F.: *Coupled frequencies of a liquid in a circular cylindrical container with elastic liquid surface cover*. Journal of Sound and Vibration, 180(5), 1995, p. 689-704.
- [4] Sawicki, A.: *Dynamika dachów pływających*. Rozprawy Inżynierskie, 23, 2, 1975 p. 275-298.

- 
- [5] Brebia, C.A., Telles, C.F., Wrobel, L.,C.: *Boundary Element Techniques*. Springer 1984.
  - [6] Sygulski, R.: *Vibrations of pneumatic structures interacting with air*, Computer and Structures, 49 (1993), p. 867 – 876.
  - [7] Forsythe, G.E., Malcolm, M.A., Moler, C.B.: *Computer Method for Mathematical Computations*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

## **DRGANIA I STATECZNOŚĆ KOLUMN SPOCZYWAJĄCYCH NA PODŁOŻU TYPU WINKLERA REALIZUJĄCYCH WYBRANE PRZYPADKI OBCIĄŻENIA KONSERWATYWNEGO**

**Janusz Szmidla**

Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: szmidla@imipkm.pcz.czyst.pl

---

***Abstract:** The results of theoretical and numerical research into the stability and transversal vibrations of columns rested on Winkler type elastic base, are discussed in the paper. Systems realizing load by a force directed towards the positive pole and load by following force directed towards the positive pole are taking into account. The equations of motion and the boundary conditions of the considered columns are determined on the basis of the total mechanical energy. The solution to the problem of the statics and dynamics of the systems leads to the relationships on the basis of which the value of a critical load of the systems and the course of changes in the frequency of free vibrations in relation to the external load are determined. Vibration and stability results show the influence of chosen parameters that characterise the considered columns.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Zagadnieniu stateczności i drgań swobodnych kolumn spoczywających na podłożu sprężystym typu Winklera poświęcono szereg publikacji naukowych, w których analizowano zakres zmian parametrów podłoża na wartość obciążenia krytycznego oraz przebieg zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. W przypadku kolumn, które tracą stateczność w wyniku rosnących amplitud drgań oscylacyjnych (układy typu flutter), ograniczono się głównie do modelu kolumny Beck'a [1] poddanej działaniu obciążenia niekonserwatywnego: śledzącego lub podśledzącego. S.Y. Lee, J. C. Liu i K.C. Hsu [2] zbadali wpływ podłoża sprężystego na stateczność kolumny przy obciążeniu siłą podśledzącą. Wykazali, że wraz ze wzrostem modułu sprężystości podłoża wzrasta wartość siły krytycznej. T. E. Smith oraz G. Herrmann [3] stwierdzili, że parametr sprężystości podłoża dla kolumny Beck'a zmienia przebieg częstości drgań własnych układu. Nie zmienia się jednak wartość obciążenia krytycznego układu. Podobne rezultaty badań dla kolumny o liniowo zmiennej masie uzyskał w publikacji [4] C. Sundarajan. Badania dotyczące stateczności kolumny poddanej działaniu obciążenia śledzącego, leżącej częściowo na podłożu sprężystym typu Winklera opisano w pracy [5]. Autorzy I. Elishakoff oraz X. Wang analizując szereg wyników

znaleźli optymalną długość podłoża w odniesieniu do długości kolumny, dla której uzyskali maksymalną wartość obciążenia krytycznego.

W zakresie obciążenia konserwatywnego, przy którym kolumny, tracą stateczność w wyniku wybożenia (układy typu dywergencyjnego), w publikacji [6] T.M. Atanackovic oraz B. N. Novakovic przedstawili rozwiązania odnośnie do optymalizacji kształtu kolumny obustronnie sztywno zamocowanej, obciążonej siłą konserwatywną i spoczywającej na podłożu sprężystym typu Winklera. N. Rajasekhara Naidu, G. Venkateswara Rao [7] zajmowali się zagadnieniem stateczności układów smukłych dla nieliniowego podłoża. Wykonano obliczenia dla różnych warunków brzegowych, co pozwoliło na określenie wpływu zamocowania na parametr obciążenia krytycznego oraz parametr częstości drgań własnych. D. Thambiratnam, Y. Zhuge [8] przeprowadzili analizę, jaki wpływ na dokładność rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych belki spoczywającej na podłożu sprężystym Winklera ma sposób modelowania podłoża. Dyskretyzacja, czyli zastąpienie podłoża równolegle zamocowanymi sprężynami nie wpłynęła w znaczącym stopniu na wyniki obliczeń numerycznych. W pracy [9] J. Dario Aristizabal-Ochoa wykazał, że podłoże ma większy wpływ na wartość obciążenia krytycznego kolumny o końcach swobodnych niż dla kolumn, których brzegi zostały przytwierdzone za pomocą sprężyn rotacyjnych i translacyjnych, imitujących różnego typu zamocowanie zarówno przegubowe jak i sztywne.

W przypadku obciążenia konserwatywnego istnieją układy realizujące obciążenie swoiste (por. [10, 11]). Wymieniony typ obciążenia konserwatywnego realizowany jest poprzez obciążenie siłą uogólnioną skierowaną do bieguna (por. [10-12]) oraz siłą śledzącą skierowaną do bieguna (por. [10, 11, 13]), przy czym biegun może być dodatni bądź ujemny. Rozpatrywane przypadki obciążenia swoistego, które zostało odkryte przez L. Tomskiego (por.[10, 11]), łączą cechy obciążenia uogólnionego (por. [14]) lub śledzącego [1], oraz obciążenia siłą skierowaną do bieguna (por. [15, 16]). W przypadku obciążenia skierowanego do bieguna (por. [10, 11, 15, 16]), kierunek działania zewnętrznej siły obciążającej układ przechodzi przez stały punkt położony na nieodkształconej osi kolumny, leżący poniżej (biegun dodatni) lub powyżej (biegun ujemny) swobodnego jej końca. Obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna (dodatniego lub ujemnego) (por. [10, 11, 13]) zrealizowane jest siłą skupioną, której kierunek działania pokrywa się ze styczną do kąta ugięcia kolumny i przechodzi przez stały punkt (biegun) znajdujący się na nieodkształconej osi. Omawiane przypadki obciążenia konserwatywnego realizowane są poprzez głowice wymuszające i przejmujące obciążenie zbudowane z elementów liniowych (por.[10, 11, 17, 18]) lub elementów o zarysie kołowym (stała krzywizna), (por.[10, 11, 17]).

Wymienione przypadki obciążenia swoistego charakteryzuje określony przebieg krzywych na płaszczyźnie: obciążenie - częstość drgań własnych (por. [10, 11]), różniący się od zmian wartości własnych dla układów typu dywergencyjnego oraz flutterowego. Biorąc pod uwagę przebieg zmian częstości drgań własnych, układy realizujące obciążenie swoiste (por. [10, 11]) R. Bogacz i L. Tomski nazwali układami typu dywergencyjnego pseudoflatterowego [19].

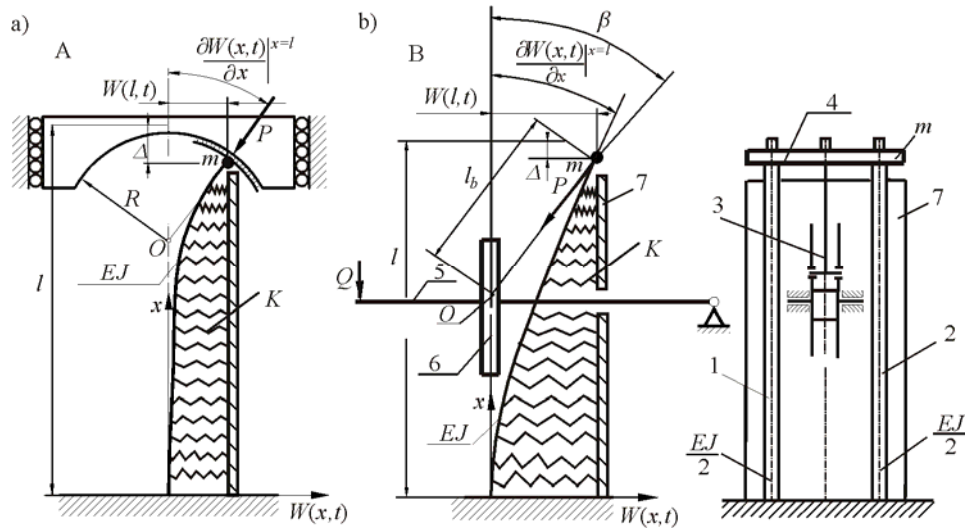
Rozważając wpływ sztywności sprężystego podłoża typu Winklera na stateczność układów typu dywergencyjnego pseudoflatterowego w publikacji L. Tomskiego i współautorów [20], przeprowadzono analizę drgań i stateczności kolumny obciążonej siłą uogólnioną skierowaną do bieguna dodatniego (por. [10-12]) w przypadku trzech rozwiązań konstrukcyjnych głowic realizujących wymienione obciążenie. Wykazano, że uwzględnione na części długości kolumn podłoże sprężyste nie wpływa w istotny sposób na zmianę nachylenia

krzywych częstości drgań własnych, podnosi natomiast znacznie wartość obciążenia krytycznego układu. W pracach [21, 22] przedstawiono wyniki badań teoretycznych oraz numerycznych odnośnie do stateczności oraz drgań poprzecznych geometrycznie nieliniowej kolumny wspornikowej, leżącej częściowo na podłożu sprężystym typu Winklera, realizującej obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego (por. [10, 11, 13]). Uwzględniając rozwiązania zagadnienia statyki oraz dynamiki układu opisano zależności na podstawie których, wyznaczono wartość obciążenia bifurkacyjnego oraz przebieg zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Biorąc pod uwagę asymetrię sztywności na zginanie oraz ściskanie kolumny geometrycznie nieliniowej, wyodrębniono dodatkowo obszary lokalnej i globalnej utraty stateczności, przy uwzględnieniu sztywności podłoża typu Winklera. Wykazano, że podłożo sprężyste obok wstępnego sprężenia jest sposobem na zwiększenie wartości siły bifurkacyjnej kolumny powyżej granicy lokalnej utraty prostoliniowej postaci równowagi statycznej.

W niniejszej pracy prezentuje się wyniki prac teoretycznych i numerycznych odnośnie do stateczności i drgań poprzecznych kolumn spoczywających na podłożu sprężystym typu Winklera, realizujących obciążenie siłą skierowaną do bieguna dodatniego oraz obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego. Dla przedstawionych schematów fizycznych kolumn określa się ich całkowitą energię mechaniczną. Na podstawie zasady Hamiltona wyznacza się równania ruchu oraz warunki brzegowe rozpatrywanych układów. Biorąc pod uwagę statyczne kryterium stateczności (metoda energetyczna) przedstawia się zakres wartości obciążenia krytycznego w zależności od parametrów geometrycznych i fizycznych kolumn oraz geometrii głowic realizujących wymienione przypadki obciążenia. Uwzględniając kinetyczne kryterium stateczności (metoda drgań) prezentuje się wyniki symulacji numerycznych odnośnie do przebiegów zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego przy wybranych parametrach układów.

## 2. MODELE FIZYCZNE KOLUMN I ICH KLASYFIKACJA

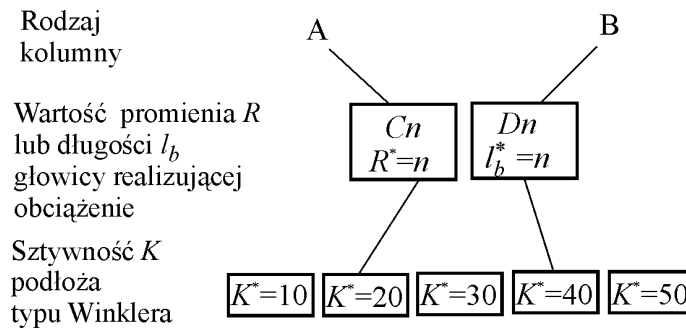
Na Rys. 1a-b przedstawiono modele fizyczne kolumn realizujących obciążenie: siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego (układ A – rys.1a) oraz siłą skierowaną do bieguna dodatniego (układ B – Rys. 2b). Kolumny zbudowane są z dwóch prętów (1, 2) o symetrycznym rozkładzie sztywności na zginanie  $EJ$ , ściskanie  $EA$  oraz masy przypadającej na jednostkę długości  $\rho A$ . Pręty każdej z kolumn są sztywno zamocowane z jednej strony ( $x=0$ ) oraz połączone na swobodnym końcu układu ( $x=l$ ) za pomocą ciała (4) o masie  $m$  w ten sposób, że przemieszczenia wzdłużne, poprzeczne oraz kąty ugięć prętów są jednakowe. W modelach kolumn uwzględniono podłożo sprężyste typu Winklera o liniowym współczynniku sztywności  $K$ , które jest rozłożone wzdłuż całej długości prętów układów. Obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego (por. [10, 13, 14]) - (układ A) realizowane jest poprzez głowicę wywołującą i przejmującą obciążenie przy wariacie konstrukcyjnym głowic zbudowanych z elementów kołowych o stałej krzywiznie. Kierunek działania zewnętrznej siły obciążającej przechodzi przez stały punkt  $O$  i jest styczny do linii ugięcia swobodnego końca ( $x=l$ ) prętów układu. W przypadku układu B (por. [10, 11, 15, 16]) kolumna obciążona jest siłą  $Q$  poprzez przeszywnioną belkę (5) oraz ciągnio (3) o długości  $l_b$ , którego kąt względem nieodkształconej osi kolumny  $x$  ma wartość  $\beta$ . Kierunek obciążenia zewnętrznego  $P$  przechodzi przez stały punkt  $O$ , leżący na nieodkształconej osi kolumny. Zmienne położenie bieguna  $O$  uzyskuje się poprzez układ mechaniczny (6). Elementy głowic



Rysunek 1: Modele fizyczne kolumn spoczywających na podłożu sprężystym typu Winklera realizujących obciążenie: a) siłą śledzącą skierowaną do bieguna, b) siłą skierowaną do bieguna

realizujących omawiane przypadki obciążenia [10-13, 23-25] są obiektami rzeczywistymi (por. [17, 18]), stosowanymi w badaniach eksperymentalnych układów smukłych.

Przyjmując zmienną wartość sztywności  $K$  sprężystego podłoża typu Winklera oraz zmienne wartości parametrów  $R$  i  $l_b$  głowicy realizujących rozpatrywane przypadki obciążenia układów, wprowadza się oznaczenia kolumn, które uwzględniają ich wybrane wartości odnośnie do parametrów geometrycznych i fizycznych.



Rysunek 2: Diagram opisujący nazwy kolumn

Nazwy kolumn wraz z ich charakterystyką zaprezentowano na Rys. 2, przy czym wartość współczynników  $R^*$  i  $l_b^*$  oraz  $K^*$  odnosi się odpowiednio do całkowitej długości kolumn oraz całkowitej sztywności na zginanie  $EJ$  układów :



$$R^* = \frac{R}{l}, \quad l_b^* = \frac{l_b}{l}, \quad K^* = \frac{Kl^4}{EJ}. \quad (1a-c)$$

Zgodnie z przyjętym algorytmem przykładowe oznaczenia rozważanych w niniejszej pracy kolumn są następujące:

A(C0.5, K\*20) – kolumna realizująca obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego, przy parametrze głowicy: wymuszającej i przejmującej obciążenie  $R^* = 0.5$ , spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera o współczynniku sztywności  $K^* = 20$ .

B(D0.7, K\*30) – kolumna realizująca obciążenie siłą skierowaną do bieguna dodatniego, przy parametrze głowicy wymuszającej obciążenie  $l_b^* = 0.7$ , spoczywająca na podłożu sprężystym typu Winklera o współczynniku sztywności  $K^* = 30$ .

### 3. ENERGIA MECHANICZNA UKŁADÓW, RÓWNANIA RUCHU, WARUNKI BRZEGOWE

Energia kinetyczna  $T$  rozważanych w pracy kolumn jest sumą energii kinetycznej prętów kolumn oraz masy skupionej  $m$ :

$$T = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{m}{2} \left[ \frac{\partial W(l,t)}{\partial t} \right]^2. \quad (2)$$

Całkowita energia potencjalna układów składa się z energii sprężystości zginania, sztywności podłoża sprężystego typu Winklera oraz energii od składowych obciążenia zewnętrznego:

- układ A

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{K}{2} \int_0^l [W(x,t)]^2 dx + \frac{PR}{2} \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} \right]^2, \quad (3a)$$

-układ B

$$V = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx + \frac{K}{2} \int_0^l [W(x,t)]^2 dx + \frac{P}{2} \frac{W^2(l,t)}{l_b}. \quad (3b)$$

Zagadnienie stateczności i drgań poprzecznych dla omawianych przypadków obciążenia konserwatywnego formułuje się stosując zasadę Hamiltona (por.[26]). Zastosowania omawianej zasady można znaleźć także w pracach L. Tomskiego i współautorów (por. [10-13, 20-25]). W przypadku układów konserwatywnych można zapisać:

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0. \quad (4)$$

Równanie ruchu odpowiadające za rozwiązanie zagadnienia drgań swobodnych jest następujące:

$$EJ \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + KW(x,t) + \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5)$$

Warunki brzegowe odnośnie do punktu zamocowania kolumn ( $x = 0$ ) przyjmują postać:

$$W(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (6a-b)$$

W zależności od konstrukcji głowicy wymuszającej i przejmującej obciążenie oraz jej parametrów geometrycznych pozostałe warunki brzegowe niezbędne do rozwiązania zagadnienia brzegowego wynoszą:

- układ A

$$W(l,t) = R \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} \quad (7a-b)$$

$$\left. \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} - \frac{1}{R} \left. \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} - \frac{m}{EJ} \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial t^2} = 0$$

-układ B

$$\left. \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0 \quad (7c-d)$$

$$\left. \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} + P \left[ \left. \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} - \frac{W(l,t)}{l_b} \right] - \frac{m}{EJ} \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial t^2} = 0$$

#### 4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Równanie (5) po wykonaniu operacji rozdzielenia zmiennych funkcji  $W(x, t)$  względem czasu  $t$  i współrzędnej przestrzennej  $x$ , przyjmuje postać:

$$y^{IV}(x) + \lambda y''(x) + (K_1 - \Omega)y(x) = 0, \quad (8)$$

gdzie:

$$y(x) = W(x,t)\cos(\omega t), \quad \lambda = \frac{P}{EJ}, \quad \Omega = \frac{\rho A \omega^2}{EJ}, \quad K_1 = \frac{K}{EJ}. \quad (9a-d)$$

Celem uzyskania przebiegu zmian wartości częstości drgań własnych  $\omega$ , w funkcji obciążenia zewnętrznego  $P$  rozważanych kolumn, spoczywających na podłożu Winklera należy stosować trzy rozwiązania równania (8). Wynika to z zależności pomiędzy siłą zewnętrzną  $P$ , wartością współczynnika  $K$ , definiującego wartość sztywności podłoża sprężystego oraz częstością drgań własnych  $\omega$ . Otrzymuje się:

$$- \text{przy } \omega \leq \sqrt{\frac{K}{\rho A} - \frac{P^2}{4\rho A EJ}}$$

$$y(x) = D_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + D_2 e^{-\alpha x} \sin(\beta x) + D_3 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + D_4 e^{-\alpha x} \cos(\beta x), \quad (10a)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-\lambda + 2\sqrt{K_1 - \Omega}}}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\lambda + 2\sqrt{K_1 - \Omega}}}{2}, \quad (10b-c)$$

- przy  $\sqrt{\frac{K}{\rho A} - \frac{P^2}{4\rho A EJ}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{K}{\rho A}}$

$$y(x) = D_1 \cos(\alpha x) + D_2 \sin(\alpha x) + D_3 \cos(\beta x) + D_4 \sin(\beta x), \quad (11a)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \Omega - K_1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \Omega - K_1}}, \quad (11b-c)$$

- przy  $\omega \geq \sqrt{\frac{K}{\rho A}}$

$$y(x) = D_1 \cosh(\alpha x) + D_2 \sinh(\alpha x) + D_3 \cos(\beta x) + D_4 \sin(\beta x), \quad (12a)$$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \Omega - K_1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + \Omega - K_1}}, \quad (12b-c)$$

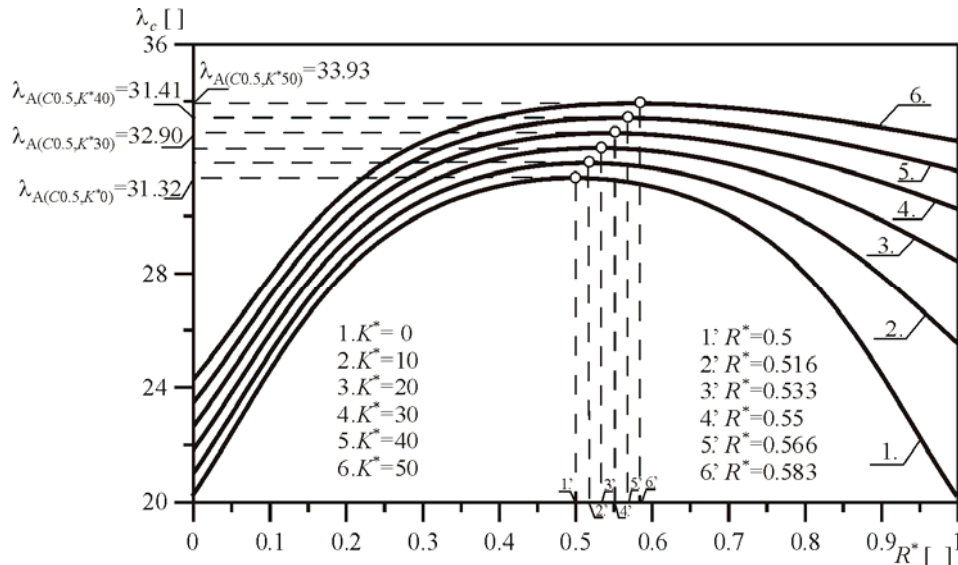
Równanie przestępne na wartości własne uzyskuje się, podstawiając rozwiązania (10a, 11a, 12a) równania ruchu do warunków brzegowych (6a-b) oraz (7a-b) lub (7c-d), po uprzednim rozdzielaniu zmiennych względem czasu  $t$  i współrzędnej przestrzennej  $x$  (9a).

## 5. DRGANIA SWOBODNE I STATECZNOŚĆ KOLUMN

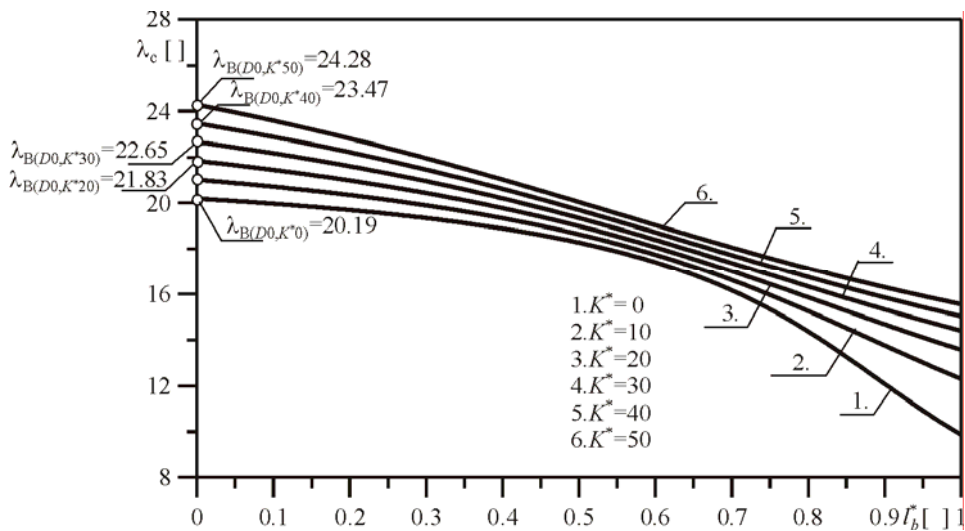
Biorąc pod uwagę rozwiązanie zagadnienia brzegowego przedstawia się wyniki odnośnie do stateczności i drgań poprzecznych kolumny realizującej obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego (układ A) oraz obciążonej siłą skierowaną do bieguna dodatniego (układ B), spoczywających na podłożu sprężystym typu Winklera. Wyznacza się wartość obciążenia krytycznego kolumn w funkcji zmian parametrów geometrycznych głowicy realizujących obciążenie ( $R^*$ ,  $l_b^*$ ) przy przyjętej sztywności sprężystego podłoża typu Winklera  $K^*$ . Określa się również przebieg częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Wartość obciążenia zewnętrznego, masy skupionej na swobodnym końcu kolumn oraz otrzymane wartości obciążenia krytycznego i częstości drgań własnych, podaje się bezwymiarowo i odnosi się do całkowitej stałej długości układu, stałej sztywności na zginanie oraz całkowitej masy jednostkowej przypadającej na jednostkę długości kolumny.

$$\lambda_c = \frac{Pl_c^2}{EJ}, \quad \lambda^* = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \Omega^* = \frac{\rho A \omega^2 l^4}{EJ}, \quad m^* = \frac{m}{\rho A l}, \quad (13a-d)$$

Na Rys. 3 oraz 4 określono zmianę krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c$  kolumn przy przyjętym zakresie zmian wartości parametru głowicy realizującej obciążenie  $R^*$  (układ A) lub  $l_b^*$



Rysunek 3: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji wartości parametru  $R^*$  głowicy realizującej obciążenie (układ A)

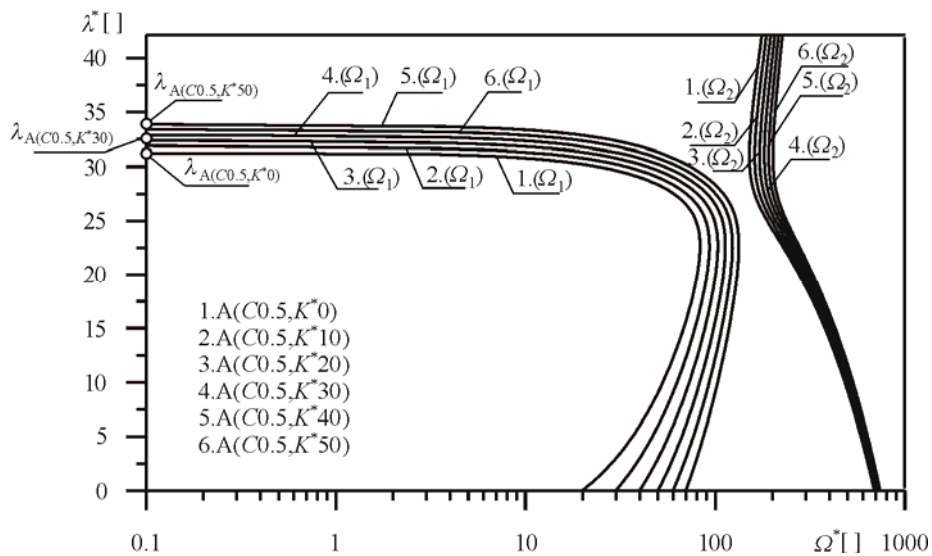


Rysunek 4: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji wartości parametru  $l_b^*$  głowicy wymuszającej obciążenie (układ B)

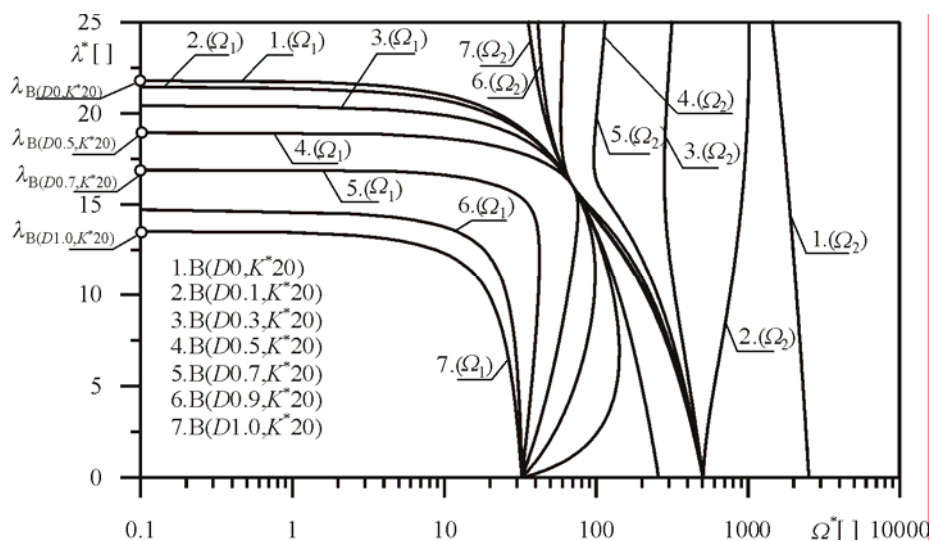
(układ B). Dla każdego z układów wykonano obliczenia dla wybranych wartości sprężystości  $K^*$  sztywnego podłoża typu Winklera. Uwzględnienie w modelu fizycznym kolumn sprężystego podłoża powoduje zwiększenie wartości obciążenia krytycznego. W przypadku kolumny obciążonej siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego, każda

z krzywych zmian obciążenia krytycznego charakteryzuje się występowaniem maksymalnej wartości krytycznego parametru obciążenia przy określonych wartościach parametru głowicy realizującej obciążenie  $R^*$  (punkty 1' - 6'). W pracach [10, 13] wykazano, że przy parametrze  $K^* = 0$ , wartość ekstremalna obciążenia krytycznego występuje dla parametru głowicy  $R^* = 0.5$ . Dodatkowo przy  $R^* = 0$  oraz  $l_b^* = 0$  kolumny realizują przypadek obciążenia Eulera (por. [16]).

W zakresie badań rozważanych kolumn wykonano obliczenia numeryczne odnośnie do częstości drgań własnych układów. Przykładowe krzywe zmian wartości własnych dla wybranych parametrów sprężystości podłoża  $K^*$  oraz parametrów głowic ( $R^*$ ,  $l_b^*$ ) realizujących zadane przypadki obciążenia konserwatywnego przedstawiono na Rys. 5 oraz Rys. 6. Wyznaczono przebieg zmian dwóch podstawowych krzywych częstości drgań własnych w formie bezwymiarowej ( $\Omega_1, \Omega_2$ ) w funkcji parametru obciążenia  $\lambda^*$ . Przebieg przedstawionych zmian wartości własnych jest charakterystyczny dla układów typu dywergencyjnego (krzywe 6, 7 – Rys. 6) lub dywergencyjnego – pseudoflatterowego [10] (Rys. 5, krzywe 1 ÷ 4 – Rys. 6). Wartość krytycznego obciążenia dla każdego z przebiegów zmian częstości drgań własnych określony jest przy parametrze  $\Omega^* = 0$ .



Rysunek 5: Krzywe na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  - parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$ , przy parametrze C0.5 ( $R^* = 0.5$ ) i różnych wartościach parametru sztywności podłoża  $K^*$  (układ A)



Rysunek 6: Krzywe na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  - parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$ , przy parametrze sztywności podłoża  $K^*=20$  i różnych wartościach parametru  $l_b^*$  (układ B)

## 6. WNIOSKI

W pracy przedstawiono sposób rozwiązania zagadnienia stateczności i drgań swobodnych kolumn realizujących obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego oraz siłą skierowaną do bieguna dodatniego, spoczywających na podłożu sprężystym typu Winklera. Biorąc pod uwagę modele fizyczne kolumn, określono całkowitą energię układów, na podstawie której wyznaczono odpowiednie zależności, odnośnie do równań ruchu i warunków brzegowych rozpatrywanych struktur. Rozwiązanie odpowiednich równań ruchu umożliwiło uzyskanie zakresu zmian obciążenia krytycznego oraz zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Wykazano, że podłoże sprężyste podnosi wartość obciążenia krytycznego, przy czym wzrost krytycznego parametru obciążenia zależy od parametrów geometrycznych głowic realizujących zadane przypadki obciążenia konserwatywnego. Uzyskane przebiegi zmian częstości drgań własnych umożliwiły zaliczenie rozpatrywanych kolumn do jednego z dwóch typów: dywergencyjnego lub dywergencyjnego pseudoflatterowego, w zależności od parametrów fizycznych i geometrycznych kolumn oraz głowic wywołujących i przejmujących obciążenie.

*Praca wykonana w ramach Badań Statutowych BS – 1-101/302/99/P*

## LITERATURA

- [1] Beck M., Die knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten Stabes. *ZAMP* 4, 225-228, 476-477, 1953.

- [2] Lee S.Y., Lin J. C., Hsu K.C., Elastic instability of a beam resting on an elastic foundation subjected to a partially tangential force, *Computers and Structures*, **59**, 6 983-988, 1996.
- [3] Smith T., E. Herrmann G., Stability of a beam on an elastic foundation subjected to a follower force, *Journal of Applied Mechanics*, 628-629, 1972.
- [4] Sundarajan C., Stability of columns on elastic foundations subjected to conservative and nonconservative forces. *Journal of Sound and Vibration* **37**, 79-85, 1974.
- [5] Elishakoff I., Wang X., Generalization of Smith-Herrmann problem with the aid of computerized symbolic algebra, *Journal of Sound and Vibration*, **117**, 3, 537-542, 1987.
- [6] Atanackovic T. M., Nowakovic B. N., Optima shape of an elastic column on elastic foundation. *European Journal of Mechanics A/Solids*, **25**, 154-165, 2006.
- [7] Rajasekhara Naidu N., Venkateswara Rao G., Free vibration and stability behavior of uniform beams and columns on nonlinear elastic foundation, *Computers & Structures* **58**, 6, 1213-1215, 1996.
- [8] Thambiratnam D. Zhuge Y., Free vibrations analysis of beams on elastic foundation, *Computers Structures*, **60**, 6, 971-980, 1996.
- [9] Aristizabal-Ochoa, J. Dario, Classical Stability of Beam-Columns with Semi Rigid Connections on Elastic Foundation, *16<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference*, Seattle, USA, July 18-21, 2003.
- [10] Tomski L., Szmidla J., *Drgania swobodne i stateczność kolumn poddanych obciążeniu swoistemu – sztywne węzły konstrukcyjne układu wymuszającego i przejmującego obciążenie, rozdział 3, Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo - Techniczna”, Warszawa, s. 68 – 133, 2004.
- [11] Tomski L., *Obciążenia układów oraz układy swoiste, rozdział 1, Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. TOMSKIEGO, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 17 – 46, 2007.
- [12] Tomski L., Szmidla J., Vibration and Stability of Column Subjected to Generalised Load by a Force Directed Towards a Pole, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **42**, 1, 163 - 193, 2004.
- [13] Tomski L., Szmidla J., Gołębiowska-Rozanow M., Vibrations and Stability of a Two-Rod Column Loaded by The Sector of a Rolling Bearing, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **42**, 4, s. 905 – 926, 2004.
- [14] Gajewski A., Życzkowski M., Optimal structural design under stability constraints, *Dordrecht, Kluwer Academic Publishers*, 103-107, 1988.

- [15] Gajewski A., Życzkowski M., Optimal Design of Elastic Columns Subject to the General Conservative Behaviour of Loading. *ZAMP*, **21**, 806-818, 1970.
- [16] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*, New York: Mc Graw- Hill, 1961.
- [17] Kasprzycki A., *Opis techniczny struktur obciążających kolumny, rozdział 2, Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. TOMSKIEGO, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 47 -60, 2007.
- [18] Tomski L., Szmidla J., Gołębiowska-Rozanow M., Kasprzycki A., Rozwiązania konstrukcyjne układów smukłych poddanych obciążeniu poprzez rozciągany element, *XXII Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Gdynia-Jurata*, 341-346, 2005.
- [19] Bogacz R., Imiełowski Sz., Tomski L., Optimization and Stability of Columns on Example of Conservative and Nonconservative Systems. *Machine Dynamics Problems*, **20**, 35-47, 1998.
- [20] Tomski L., Przybylski J., Podgórska-Brzdękiewicz I., Stability and Vibration of a Cantilever Column Lying on the Elastic Foundations Loaded by Generalized Load, *Stability of Structures VIII th Symposium, Zakopane*, 277- 282, 1997.
- [21] Szmidla J., *Drgania i stateczność kolumny geometrycznie nieliniowej spoczywającej częściowo na podłożu sprężystym typu Winklera, rozdział 8, Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. TOMSKIEGO, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 251 – 294, 2007.
- [22] Szmidla J., Drgania i stateczność kolumny geometrycznie nieliniowej spoczywającej częściowo na podłożu sprężystym typu Winklera, obciążonej siłą śledzącą skierowaną do bieguna, *I Kongres Mechaniki Polskiej*, Warszawa 28-31 Sierpień 2007.
- [23] Tomski L., Szmidla J., Theoretical and Experimental Investigations of the Natural Vibrations of the Divergence and Divergence Pseudoflutter Type Systems, *PAMM* **4**, **1**, 418-419, 2004.
- [24] Tomski L., Szmidla J., Free Vibrations of a Column Loaded by Stretched Element, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **44**, **2**, 279-298, 2006.
- [25] Tomski L., Uzny S., Free vibration and the stability of a geometrically non-linear column loaded by a follower force directed towards the positive pole, *International Journal of Solids and Structures*, **45**, **1**, 2008, 87-112.
- [26] Meirovitch L., Analytical methods in vibration, *Macmillan Company, New York*, 42 – 45, 1967.



## OPTYMALIZACJA KSZTAŁTU KOLUMN REALIZUJĄCYCH WYBRANE PRZYPADKI OBCIĄŻENIA EULERA ZA POMOCĄ ZMODYFIKOWANEGO ALGORYTMU SYMULOWANEGO WYŻARZANIA

**Janusz Szmidla<sup>1</sup>, Anna Wawszczak<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: szmidla@imipkm.pcz.czyst.pl

<sup>2</sup> Politechnika Częstochowska, Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: a.wawszczak@gmail.com

---

***Abstract:** In this paper, we present the shape optimization method applied to slender's systems (columns) subjected to Euler's loads. The method used to describe the problem, consist in dividing column into elements. These elements are described by their length (the same for every element) and variable diameter. Total potential energy is determined for two systems varying in loading method. Equation of motion and boundary conditions are determined by taking into account energetic method (the minimum of potential energy). Solution of boundary value problem leads to setting transcendental equation for the value of critical load. It is assumed that volume and total length of column are constant. Basing on this assumption, the shape's optimization comes down to matching diameters of particular system's elements. The maximum value of critical load is obtained for each set of diameters. The modified simulated annealing algorithm is used to finding maximum of critical force, which is described by function of several variables. Applied in the algorithm neighbourhood generator changes its behaviour with temperature function. Taking into account the method of column's mounting, the results of numeric calculations for chosen values of structures mounting's elasticity coefficient are presented.*

---

### 1. WPROWADZENIE

Optymalizacja kształtu układów smukłych ma na celu wyznaczenie najmniejszej masy układu dla przyjętej wartości obciążenia krytycznego lub polega na rozwiązaniu zagadnienia odwrotnego, czyli poszukiwaniu maksymalnego obciążenia krytycznego dla zadanej stałej masy układu. W zakresie obciążenia konserwatywnego, dla którego wystarczy zastosowanie metody energetycznej określania stateczności, dobór optymalnego kształtu kolumn przed-

stawiono w pracach [1-9]. W publikacjach [1-3] rozważano zagadnienie optymalnego doboru kształtu kolumn wspornikowych, realizujących przypadki obciążenia Eulera, przyjmując utwierdzony, przegubowo podparty lub swobodny ich koniec. W pracy [1] wyznaczono kształt kolumny przegubowo podpartej na obu końcach, uwzględniając stałą długość i objętość układu. Przy założeniu że zmiana przekroju poprzecznego po długości układu daje powierzchni wypukłą najlepsze wyniki uzyskano dla przekroju poprzecznego o kształcie trójkąta równobocznego, najgrubszego w połowie długości układu i zbieżnego do jego końców. Wyznaczono obciążenie wyboczeniowe o 61.2 % większe w stosunku do kolumny o stałym przekroju kołowym. W publikacji [2] optymalny kształt kolumny wybrano spośród pewnej klasy prętów stożkowych (kształtowanie parametryczne). W publikacji [3] dla kolumny zbudowanej z dwóch segmentów o przekroju kołowym, przyjmując stałą objętość i długość układu, uzyskano poprawę wartości obciążenia krytycznego o 21 %. Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna (por. [10]) opisano w pracach [4-6, 8]. Wyznaczono [4, 5] równanie różniczkowe ugiętej linii pręta optymalnego przy zastosowaniu dwóch metod Tchentsova [7] lub metodą energetyczną. W pierwszym przypadku poszukiwano minimum funkcjonału objętości pręta. W przypadku metody energetycznej wyznaczenie optymalnego kształtu pręta polegało na określeniu ekstremum funkcjonału przy stałej objętości rozważanego układu. Funkcjonał to wzór na siłę krytyczną wyprowadzony z rozważań energetycznych, zakładających, że energia potencjalna układu przy ugiętym położeniu równowagi musi być minimalna. Zagadnienie optymalizacji rozwiązano dla kolumny jednorodnej, dla której moduł Younga jest stały wzdłuż długości układu oraz kolumny niejednorodnej. W tym przypadku moduł sprężystości podłużnej opisano funkcją wzdłuż długości kolumny. Rozważania teoretyczne i numeryczne wykonano dla trzech klas kolumn (kolumny: płaskozbieżnej, o stałej szerokości i zmiennej wysokości przekroju, wszechstronnie równomiernie zbieżnej), których kształt i sposób wyboczenia opisano pewnym parametrem. W pracy [6] ujęto rozwiązania zagadnienia optymalnego kształtowania kolumn w zakresie sprężystym oraz w zakresie sprężysto plastycznym. Poszerzenie tej tematyki można znaleźć również w pracy [8], w której omówiono problem optymalnego kształtowania kolumny, wykonanej z materiału nieliniowo – sprężystego lub sprężysto-plastycznego z nieograniczoną granicą plastyczności, realizującej obciążenie siłą skierowaną do bieguna.

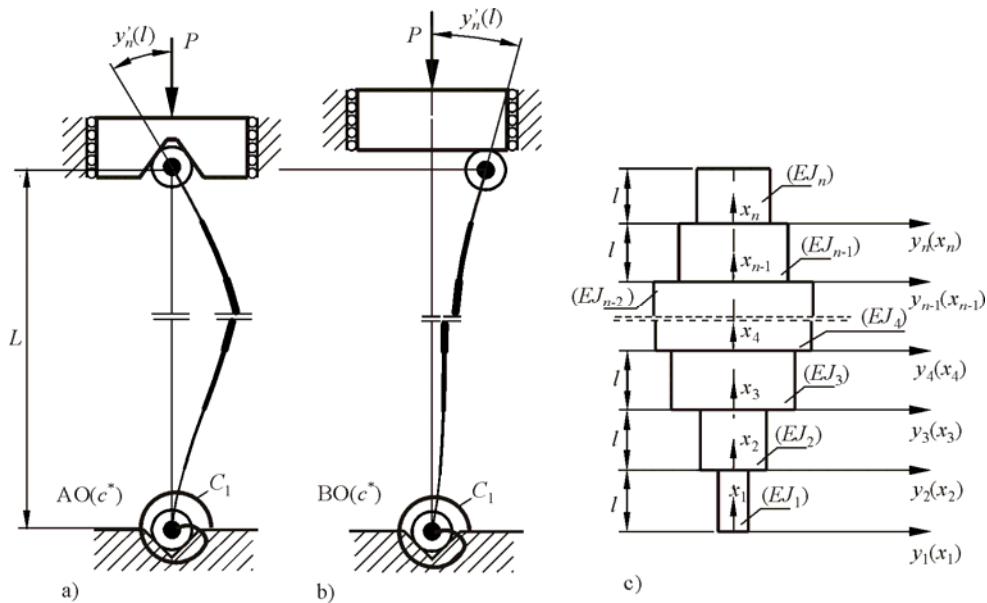
Oprócz wymienionych przypadków obciążenia można wyróżnić jeszcze publikacje [3, 9], w których zaprezentowano wyniki rozważań teoretycznych dotyczących zagadnienia optymalizacji smukłych układów sprężystych realizujących obciążenie uogólnione [9] lub obciążenie uogólnione z siłą skierowaną do bieguna dodatniego [3]. Dla obciążenia uogólnionego, omówionego w pracy (por. [11]), poszukiwano identycznie jak w publikacjach [4, 5] minimum funkcjonału objętości pręta. Przy obciążeniu uogólnionym z siłą skierowaną do bieguna dodatniego (przypadek obciążenia swoistego, odkrytego przez L. Tomskiego (por. [12]) dla kolumny zbudowanej z dwóch segmentów o przekroju kołowym przy warunku stałej objętości i długości układu, uzyskano wzrost obciążenia krytycznego o 10.3 % odnośnie do identycznej kolumny o stałym przekroju kołowym.

## 2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

W niniejszej pracy rozważa się problem optymalizacji kształtu układów smukłych (kolumn) ograniczając się do obciążenia konserwatywnego typu Eulera (por. [13, 14]). Nie bierze się pod uwagę obciążenia niekonserwatywnego (por. [15]). Przy obciążeniu Eulera siła

ściskającą kolumnę ma stały punkt zaczepienia i stały kierunek działania, niezmienny się podczas wybożenia (obciążenie zachowawcze). Dla dwóch wariantów układów różniących się sposobem obciążenia określa się ich całkowitą energię potencjalną. Biorąc pod uwagę metodę energetyczną (minimum energii potencjalnej) wyznacza się zależności odnośnie do równań ruchu oraz warunków brzegowych (por.[14]). Rozwiązanie zagadnienia brzegowego prowadzi do wyznaczenia równania przestępnego na wartość obciążenia krytycznego. Optymalizacja kształtu kolumny sprowadza się do podziału kolumny na segmenty, opisane poprzez ich długość i średnicę. Wyznacza się takie wartości parametrów geometrycznych poszczególnych segmentów układu, dla których otrzymuje się maksymalną wartość obciążenia krytycznego. Do znalezienia maksimum siły krytycznej, która jest funkcją wielu zmiennych, wykorzystuje się zmodyfikowany przez autorów niniejszej pracy algorytm symulowanego wyżarzania. Uwzględniając sposób zamocowania kolumn przedstawia się wyniki obliczeń numerycznych dla wybranych wartości współczynnika sprężystości zamocowania układów.

Na Rys. 1a-b przedstawiono modele fizyczne kolumn optymalizowanych, realizujących rozważane przypadki obciążenia Eulera. Kolumna jest sprężysto zamocowana ( $C_1$  – współczynnik sprężystości zamocowania) z jednej strony ( $x_1=0$ ) oraz obciążona siłą skupioną  $P$  o stałym kierunku działania na końcu układu ( $x_n=l$ ).



Rysunek 1: Modele fizyczne kolumn realizujące obciążenie Eulera

Obciążenie realizowane jest poprzez strukturę obciążającą, składającą się z głowicy wywołującej i przejmującej obciążenie (por. [16]). Głowica wywołująca obciążenie zbudowana jest z dwóch elementów liniowych (układ A – Rys.1a) lub z jednego elementu liniowego (układ B – Rys.1b). Głowicę przejmującą obciążenie stanowi element kołowy (łożysko toczne). Elementy głowic realizujących omawiane przypadki obciążenia Eulera są obiektami

rzeczywistymi (por. [16]), stosowanymi w badaniach eksperymentalnych układów smukłych (por. [17, 18]).

Przyjęta w pracy metoda opisu zagadnienia, polega na podziale kolumny (Rys. 1c) na mniejsze segmenty (o indeksach  $i = 1..n$ ) o przekroju kołowym i sztywności na zginanie ( $EJ_i$ ), ( $J_i$  jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego  $i$  – tego segmentu kolumny względem osi obojętnej zginania), opisane przez długość  $l_i$  i średnicę  $d_i$  oraz przemieszczenie poprzeczne  $y_i(x_i)$ .

Przyjmuje się następujące założenia i oznaczenia stosowane w pracy:

- stałą całkowitą długość kolumny optymalizowanej oraz pryzmatycznej  $L$ ,
- stałą długość segmentów kolumny optymalizowanej  $l_i = l, L = n l$ ,
- stałą wartość modułu sprężystości podłużnej  $E$  oraz gęstości materiału wszystkich segmentów kolumny,
- stałą wartość gęstości materiału,
- stałą sumaryczną objętość wszystkich segmentów opisujących kształt kolumny optymalizowanej oraz stałą objętość kolumny pryzmatycznej,
- bezwymiarowy współczynnik sprężystości zamocowania  $c^*$ :

$$c^* = \frac{C_1 L}{EJ}, \quad (1)$$

gdzie  $J$  jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego kolumny porównawczej względem osi obojętnej zginania.

Optymalizacja kształtu sprowadza się do doboru średnic poszczególnych segmentów układu, przy których uzyskuje się maksymalną wartość obciążenia krytycznego. Takie założenie sprawia, że poszukuje się globalnego maksimum funkcji siły krytycznej, która jest funkcją wielu zmiennych (średnice oraz długości poszczególnych segmentów kolumny).

$$P_{max} = f(d_1, d_2, \dots, d_n, \frac{L}{n}). \quad (2)$$

Zgodnie z przyjętym opisem wprowadza się przykładowe oznaczenia rozważanych w niniejszej pracy kolumn:

- AO( $c^*=10$ ), BO( $c^*=10$ ) – kolumny optymalizowane o skokowo zmiennej po długości układu sztywności na zginanie, przy współczynniku sprężystości zamocowania  $c^* = 10$ , realizujące obciążenie Eulera.
- AP( $c^*=5$ ), BP( $c^*=5$ ) – kolumny o stałej po długości układu sztywności na zginanie  $EJ$  (porównawcze), przy współczynniku sprężystości zamocowania  $c^* = 5$ , realizujące obciążenie Eulera.

### 3. ENERGIA POTENCJALNA UKŁADÓW, RÓWNANIA PRZEMIESZCZEŃ, WARUNKI BRZEGOWE

Całkowita energia potencjalna  $V$  układów składa się z energii sprężystości zginania oraz energii (pracy) siły wzdłużnej  $P$ :

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{(EJ_i)^2}{2} \int_0^l [y_i''(x_i)]^2 dx_i - \frac{P}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^l [y_i'(x_i)]^2 dx_i + \frac{C_1}{2} [y_1'(0)]^2. \quad (3)$$

Zgodnie z metodą energetyczną określania stateczności poszukuje się takiego obciążenia układu, przy którym jego energia potencjalna  $V$  przestaje być dodatnio określona, czyli:

$$\delta V = 0. \quad (4)$$

Po obliczeniu wariacji energii potencjalnej i uwzględnieniu relacji (4) otrzymuje się:

- równania przemieszczeń

$$y_i^{IV}(x_i) + k_i^2 y_i''(x_i) = 0, \quad (5)$$

- warunki brzegowe odnośnie do punktu zamocowania kolumn ( $x_1 = 0$ ):

$$y_1(0) = 0, y_1''(0) - c_1 y_1'(0) = 0, \quad (6a-b)$$

- warunki ciągłości:

$$\begin{aligned} y_j(l) &= y_{j+1}(0), y_j'(l) = y_{j+1}'(0) \\ (EJ_j) y_j''(l) &= (EJ_{j+1}) y_{j+1}''(0), (EJ_j) y_j'''(l) = (EJ_{j+1}) y_{j+1}'''(0) \end{aligned} \quad (7a-d)$$

- warunki brzegowe dla ( $x_n = l$ ) przy przegubowym podparciu (układ A- wzory (8a-b)) lub na swobodnym końcu (układ B – wzory (8c-d)):

$$y_n(l) = y_n''(l) = 0, \quad (8a-b)$$

$$y_n''(l) = 0, y_n'''(l) + k_n^2 y_n'(l) = 0, \quad (8c-d)$$

gdzie:  $j=1..(n-1)$ ,  $c_1 = C_1/(EJ_1)$ ,  $k_i^2 = P/(EJ_i)$ .

Rozwiązania ogólne równań (6) są funkcją:

$$y_i(x_i) = A_i \sin(k_i x_i) + B_i \cos(k_i x_i) + C_i x_i + D_i. \quad (9)$$

Rozwiązania (9) równań przemieszczeń (5) oraz odpowiednie warunki brzegowe opisane wzorami (6a-b), (7a-d) oraz wzorami (8a-b) lub (8c-d) prowadzą do równania przestępnego na obciążenie krytyczne.

#### 4. SYMULOWANE WYŻARZANIE

Metoda symulowanego wyżarzania, to algorytm heurystyczny należący do klasy algorytmów niedeterministycznych [19, 20]. Metoda ta jest modyfikacją algorytmu wspinaczki ("hill climbing"). Przebieg działania algorytmu wymaga zdefiniowania czterech parametrów: początkowej reprezentacji rozwiązania, generatora losowych zmian w rozwiązaniu (funkcja sąsiedztwa), funkcji oceny (kosztu) oraz „schematu chłodzenia” (ang. *annealing schedule*). Dodatkowy parametr  $T$  zwany „temperaturą”, nie jest bezpośrednio związany ze zmiennymi decyzyjnymi zadania optymalizacji, a jedynie steruje działaniem algorytmu. Wartość parametru  $T$  wpływa jedynie na prawdopodobieństwo przejścia z jednego punktu w przestrzeni

poszukiwania do innego [20] i dobierana jest w sposób zależny od danego zagadnienia optymalizacyjnego.

W rozważanej metodzie nowe rozwiązanie wybrane poprzez modyfikację rozwiązania bieżącego, jest akceptowane zawsze, gdy poprawia wartość funkcji oceny rozwiązania  $f$  określonej wzorem (2). W przeciwnym przypadku akceptacja następuje z pewnym prawdopodobieństwem równym:

$$p_a = \exp\left(-\frac{\Delta f}{T}\right), \quad (10)$$

gdzie  $\Delta f$  jest różnicą funkcji oceny.

Rdzeniem algorytmu jest procedura nazywana Metropolis [19], która symuluje „proces wyżarzania” w danej „temperaturze”  $T$ . W procedurze Metropolis wykonywana jest, określona przez parametr  $M$  liczba iteracji dla tej samej wartości parametru  $T$ . Następnie „temperatura” jest zmniejszana zgodnie z przyjętym „schematem chłodzenia”. Liczba  $M$  iteracji w kolejnych wywołaniach procedury Metropolis jest zwiększana o 20 %.

## 5. ZMODYFIKOWANA METODA SYMULOWANEGO WYŻARZANIA

Przedstawiona w pracy zmodyfikowana metoda symulowanego wyżarzania, poza zmianą wartości parametrów  $T$  i  $M$ , zakłada dodatkowo modyfikację działania funkcji generującej sąsiednie rozwiązanie (funkcja sąsiedztwa). W klasycznym algorytmie symulowanego wyżarzania nowe rozwiązanie jest generowane za pomocą stałej procedury [21]. W niniejszej pracy funkcja sąsiedztwa zmienia swoje działanie wraz ze zmianą parametru „temperatury”. Modyfikacji ulega współczynnik zmiany objętości  $\alpha$  oraz maksymalna różnica indeksów modyfikowanych segmentów. Parametry te, podobnie jak  $T$  i  $M$ , są modyfikowane po każdym wykonaniu procedury Metropolis.

Kolejną wprowadzoną modyfikacją algorytmu symulowanego wyżarzania jest, dokonywana razem ze zmianą wartości wymienionych parametrów, zmiana liczby segmentów  $n$  wchodzących w skład układu smukłego. Każdy segment kolumny dzielony jest na dwa segmenty o długościach równych połowie długości dzielonego segmentu. Średnice obu segmentów są równe średnicy dzielonego segmentu. W rozważanych w pracy przykładach kolumn pierwotnie zastosowano podział układu na dwa segmenty. Liczba segmentów  $n$ , na którą podzielony jest układ smukły zmienia się w postępie geometrycznym o ilorazie równym dwa do zadanej wartości  $n_{\max}$  (maksymalna liczba segmentów). Podział wykonywany jest po każdym wykonaniu Metropolis step, do momentu, gdy długość segmentu  $l$  jest większa od długości minimalnej  $l_0$ :

$$l_0 = \frac{L}{n_{\max}}. \quad (11)$$

Wprowadzenie takiej modyfikacji algorytmu spowodowało znaczne przyspieszenie procesu optymalizacji kształtu. Dzięki pierwotnemu podziałowi na niewielką liczbę segmentów możliwe jest szybkie ustalenie zgrubnego kształtu kolumny. W końcowej fazie obliczeń, kiedy długość segmentów jest mała, niewielkie zmiany kształtu powodują jego wygładzenie.

### 5.1. Funkcja sąsiedztwa

Bardzo istotnym elementem algorytmu symulowanego wyżarzania jest losowy wybór nowego, sąsiedniego rozwiązania. Zastosowana metoda wyboru nowego kształtu polega na "przeniesieniu" pewnej części objętości, opisanej współczynnikiem  $\alpha$ , z losowo wybranego segmentu (o indeksie  $i$ ) do innego segmentu kolumny (o indeksie  $k$ ), wybranego również w sposób losowy. Odbywa się to przez zmianę średnic wybranych segmentów ( $d_i, d_k$ ) na nowe średnice ( $d_i', d_k'$ ). Długości segmentów  $l$  pozostają niezmiennione. Dzięki zastosowaniu takiego rozwiązania spełnione jest przyjęte w pracy kryterium stałej objętości kolumn.

Nowe średnice segmentów obliczane są ze wzorów:

$$d_i' = \sqrt{(1-\alpha)d_i}, \quad d_k' = \sqrt{d_k + \alpha d_i}, \quad (12a-b)$$

gdzie:  $i, k \in (0..n)$  – indeksy segmentów, które są zmieniane,  $\alpha \in (0..1)$  – współczynnik zmiany objętości.

Warto zauważyć, że po "przeniesieniu" np. 5% objętości z jednego segmentu do drugiego, a następnie odwrotnie, uzyskany kształt nie zawsze będzie taki sam jak przed wykonaniem tych operacji. Sprawia to, że algorytm nie może zrobić "kroku wstecz".

Zastosowana w pracy funkcja wyboru sąsiedniego rozwiązania zmienia swoje działanie razem z funkcją zmiany parametru „temperatury”. Zmianie podlega maksymalna dopuszczalna różnica indeksów segmentów, których średnice ( $d_i, d_k$ ) są zmieniane oraz współczynnik zmiany objętości  $\alpha$  określający, jaka część objętości danego segmentu (o indeksie  $i$ ) zostanie przeniesiona do innego segmentu (o indeksie  $k$ ). Segment, którego objętość jest zwiększana (średnica  $d_k'$ ) jest dowolnym, wybranym w sposób losowy segmentem kolumny. Segment opisany parametrem średnicy  $d_i'$ , którego objętość jest zmniejszana jest również wybierany w sposób losowy, lecz w tym przypadku na wybór narzucone są pewne ograniczenia. W początkowej fazie optymalizacji wybór tego segmentu może być zupełnie dowolny, natomiast w końcowej fazie możliwy jest wybór tylko jednego z dwóch segmentów sąsiadujących z segmentem, którego objętość jest zwiększana ( $i = k \pm 1$ ). Drugi zmienny parametr, współczynnik zmiany objętości  $\alpha$ , na początku obliczeń przyjmuje pewną zadaną wartość. Wartość ta maleje wraz ze spadkiem parametru  $T$  dopóki nie osiągnie określonej na wstępie wartości minimalnej  $T_{\min}$ . Zastosowanie takiego rozwiązania, w połączeniu z podziałem kolumny na coraz mniejsze segmenty, znacznie przyspiesza proces optymalizacji, zwłaszcza na początku obliczeń.

### 5.2. Funkcja zmiany parametru „temperatury”.

Niezwykle istotną sprawą w symulowanym wyżarzaniu jest odpowiednie dobranie sposobu obniżania parametru  $T$ . Zbyt gwałtowne obniżanie „temperatury” odbija się negatywnie na dokładności algorytmu, zbyt powolne zaś zwiększa czas obliczeń [22]. Parametr  $T$  wykorzystywany jest przy wyznaczaniu prawdopodobieństwa akceptacji (por. wzór (10)) gorszego rozwiązania. Prawdopodobieństwo to jest również zależne od różnicy funkcji oceny  $\Delta f$ . W klasycznym algorytmie symulowanego wyżarzania, gdzie działanie funkcji generacji sąsiedztwa jest stałe przez cały czas działania algorytmu, wartości średnie  $\Delta f$  w każdym Metropolis są porównywalne. Zastosowanie zmiennych parametrów generacji sąsiedztwa, oraz zmiana liczby segmentów  $N$  układu, powoduje, że średnia wartość  $\Delta f$  maleje z każdym wykonaniem Metropolis. Dla analizowanych przypadków średnia wartość  $\Delta f$  malała prawie

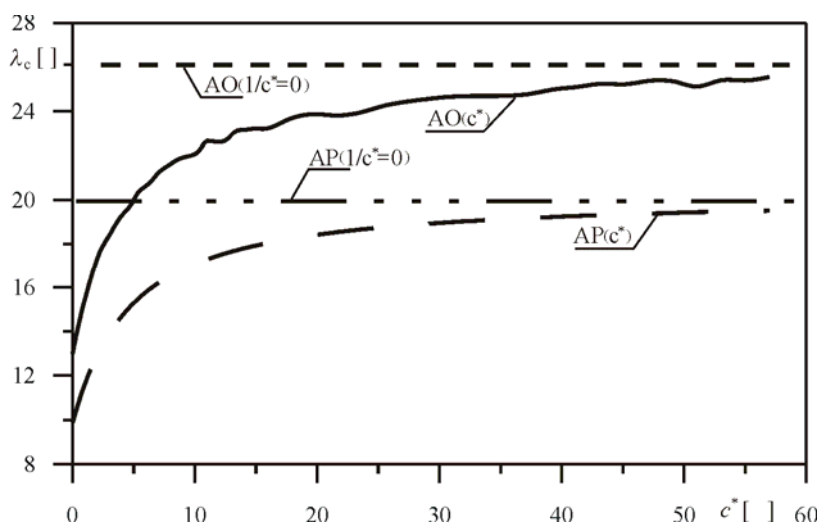
dokładnie dwukrotnie w każdym kolejnym Metropolis. Zmianę tą należy uwzględnić w „schemacie chłodzenia”. Aby wartość wyrażenia  $(-\Delta f / T)$  we wzorze (10) zachowywała się zgodnie z przewidywaniami wartość parametru  $T$  powinna być dodatkowo zmniejszana dwukrotnie w każdym kroku.

## 6. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Biorąc pod uwagę równanie przestępne na wartość obciążenia krytycznego wykonano obliczenia numeryczne celem wyznaczenia maksymalnych wartości siły krytycznej  $P_c$  rozważanych kolumn realizujących przypadki obciążenia Eulera. Obliczenia numeryczne przeprowadzono na wieloprocesorowym serwerze obliczeniowym w Instytucie Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Politechniki Częstochowskiej, przy podziale kolumny maksymalnie na  $n = 128$  segmentów. Wprowadzenie podziału kolumny na większą liczbę segmentów, nie wpłynęło znacząco na uzyskane wyniki, a wydłużyło czas obliczeń numerycznych. Uzyskany wzrost obciążenia krytycznego przy podziale na 128 oraz 256 segmentów, różnił się maksymalnie o 0.18 %. Wartość obciążenia krytycznego oraz sprężystości zamocowania dla optymalizowanych układów  $AO(c^*)$ ,  $BO(c^*)$  odniesiono do całkowitej stałej długości  $L$  układu oraz stałej sztywności na zginanie  $EJ$  kolumn pryzmatycznych:  $AP(c^*)$ ,  $BP(c^*)$ .

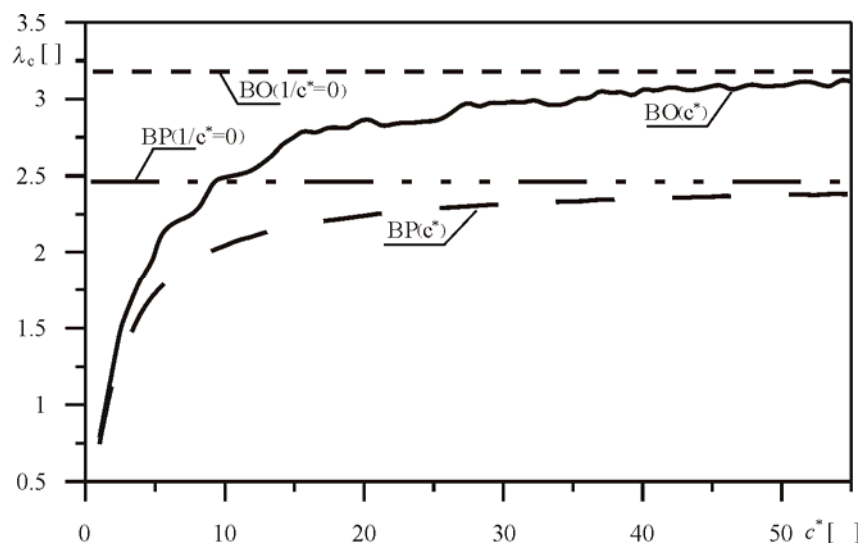
$$\lambda_c = \frac{P_c L^2}{EJ} \quad (13)$$

Na Rys. 2 i 3 zaprezentowano zakres zmian krytycznego parametru obciążenia w funkcji zmian współczynnika sprężystości zamocowania kolumn o optymalizowanym kształcie  $AO(c^*)$ ,  $BO(c^*)$  oraz kolumn o stałej sztywności na zginanie po długości układu  $AP(c^*)$ ,  $BP(c^*)$ . Liniami  $AO(1/c^*=0)$ ,  $BO(1/c^*=0)$ ,  $AP(1/c^*=0)$ ,  $BP(1/c^*=0)$  określono dodatkowo wartość obciążenia krytycznego w przypadku sztywnego zamocowania kolumn.



Rysunek 2: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji wartości parametru  $c^*$  (układy  $AO(c^*)$ ,  $AP(c^*)$ )



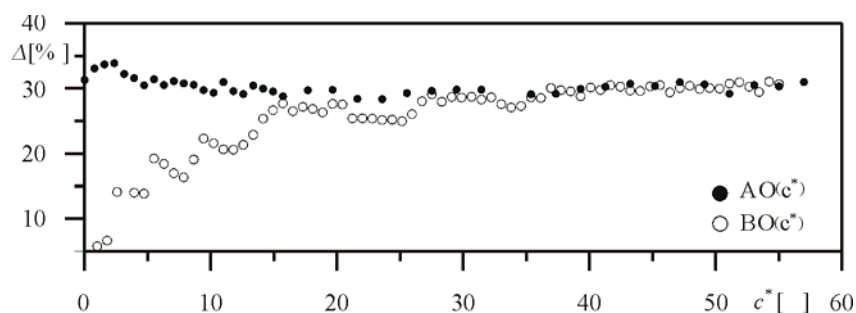


Rysunek 3: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji wartości parametru  $c^*$  (układy  $BO(c^*)$ ,  $BP(c^*)$ )

Procentowy wzrost obciążenia krytycznego  $\Delta$  kolumn optymalizowanych o zmiennej po długości sztywności na zginanie względem tego obciążenia dla kolumn  $AO(c^*)$ ,  $BO(c^*)$  przedstawiono na Rys. 4, przy czym:

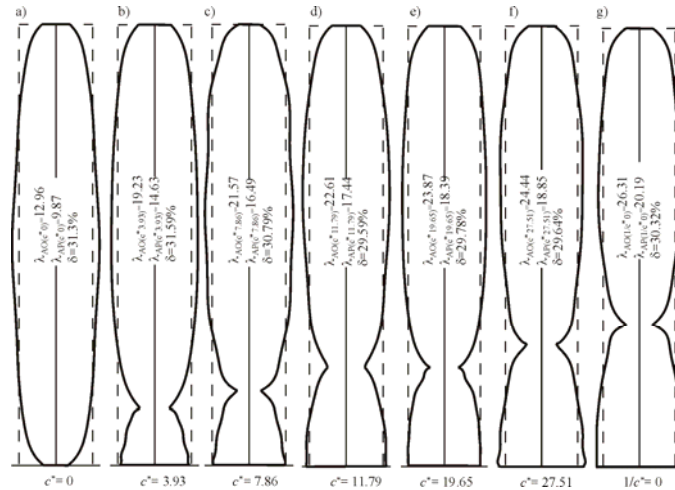
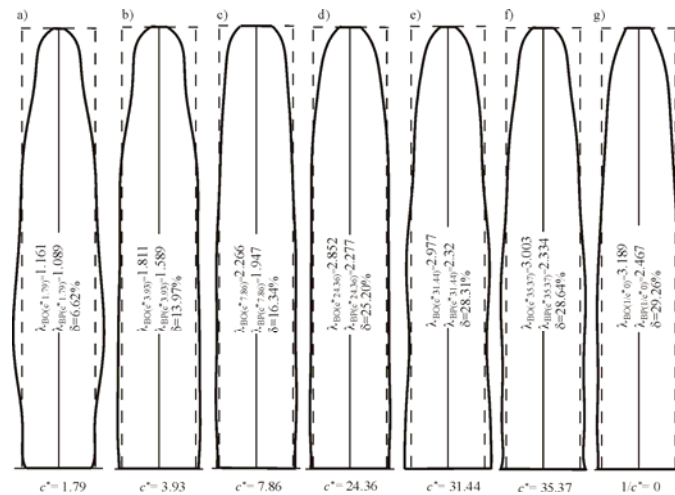
$$\Delta = \frac{\lambda_{AO(c^*)} - \lambda_{AP(c^*)}}{\lambda_{AP(c^*)}} 100\%, \quad \Delta = \frac{\lambda_{BO(c^*)} - \lambda_{BP(c^*)}}{\lambda_{BP(c^*)}} 100\% \quad (14a-b)$$

Zastosowany algorytm symulowanego wyżarzania umożliwił uzyskanie wzrostu obciążenia krytycznego maksymalnie o 33.89 % dla kolumny  $AO(c^*)$  przy podziale rozważanych układów na  $n = 128$  segmentów.



Rysunek 4: Procentowy wzrost obciążenia krytycznego  $\Delta$  w funkcji wartości parametru  $c^*$  (układy  $AO(c^*)$ ,  $BO(c^*)$ )

Na Rys. 5 oraz 6 zaprezentowano kształty optymalizowanych kolumn  $AO(c^*)$ ,  $BO(c^*)$  dla wybranych wartości współczynnika sprężystości zamocowania  $c^*$ . Biorąc pod uwagę przyjęte kryterium stałej objętości układów liniami przerywanymi zaznaczono kształt kolumny  $AP(c^*)$  lub  $BP(c^*)$ .

Rysunek 5: Kształt optymalizowanej kolumny  $AO(c^*)$ Rysunek 6: Kształt optymalizowanej kolumny  $BO(c^*)$ 

## 7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono metodę optymalizacji kształtu kolumn realizujących przypadki obciążenia Eulera. Biorąc pod uwagę badania teoretyczne i obliczenia numeryczne przy statycznym kryterium utraty stateczności, wyznaczono wartość obciążenia krytycznego oraz

kształt optymalizowanych kolumn. Na podstawie uzyskanych wyników obliczeń numerycznych należy stwierdzić, iż algorytm symulowanego wyżarzania jest skuteczną metodą poszukiwania ekstremum funkcji wielu zmiennych i może być stosowany do optymalizacji kształtu układów smukłych. Zaproponowane w pracy modyfikacje przyjętej metody obliczeń miały na celu przyspieszenie procesu poszukiwania optymalnego rozwiązania.

*Praca wykonana w ramach Badań Własnych BW – 1-101/202/08/P*

#### LITERATURA

- [1] Keller J. B., The shape of the strongest column, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **5** (4), 275–285, 1960.
- [2] Życzkowski M., W sprawie doboru optymalnego kształtu prętów osiowo ściskanych, *Rozprawy Inżynierskie* **4**, **4**, 441 – 456, 1956.
- [3] Bogacz R., Imieliński Sz., Tomski L., Optimalization and Stability of Columns on Example of Conservative and Nonconservative Systems, *Machine Dynamics Problems*, **20**, 35 – 47, 1998.
- [4] Gajewski A., Życzkowski M., Optimal shaping of an Elastic Homogeneous Bar Composed by Polar Force, *Biuletyn de L'Academie Polonaise des Sciences*, **17**, **10**, 479 - 488, 1969.
- [5] Gajewski A., Życzkowski M., Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, *Rozprawy Inżynierskie*, **2**, **17**, 299 – 329, 1969.
- [6] Gajewski A., Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, *Mechanika teoretyczna i stosowana*, **2**, **8**, 159 – 173, 1970.
- [7] Tchentsov, *Trudy TSAGI*, p.265, 1936. (14)
- [8] Gajewski A., Optymalne kształtowanie prętów ściskanych siłą skierowaną do bieguna, przy potęgowym prawie fizycznym, *Mechanika teoretyczna i stosowana*, **2**, **18**, 305 – 318, 1980.
- [9] Gajewski A., Życzkowski M., Optimal Design of Elastic Columns Subject to the General Conservative Behaviour of Loading, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **21**, **5**, 806 – 818, 1970.
- [10] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of Elastic Stability*, New York: Mc Graw- Hill, 1961.
- [11] Kordas Z., Stability of the Elastically Clamped Compressed Bar in the General Case of Behaviour of the Loading, *Biuletyn de L'Academie Polonaise des Sciences*, **11**, 419 - 427, 1963. (17)
- [12] Tomski L., Szmidla J., *Drgania swobodne i stateczność kolumn poddanych obciążeniu swoistemu – sztywne węzły konstrukcyjne układu wymuszającego i przejmującego obciążenie, rozdział 3, Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa

- wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo - Techniczna”, Warszawa, 68–133, 2004.
- [13] Euler L., *Methodus in veniendi lineas curvas maximi minire proprietate gaudentes, Appendix: De curvis elasticis*, Lausanne and Geneva, 1744.
- [14] Tomski L., Szmidla J., *Wprowadzenie do problematyki stateczności i drgań swobodnych kolumn, rozdział 1, Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. TOMSKIEGO, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 15-39, 2004.
- [15] Bogacz R., Irretier H., Mahrenholtz O., Optimal design of structures subjected to follower forces, *Ingenieur – Archive*, **49**, 63 -71, 1980.
- [16] Kasprzycki A., *Opis techniczny struktur obciążających kolumny, rozdział 2, Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 47 -60, 2007.
- [17] Tomski L., Przybylski J., Uzny S., *Drgania i stateczność układów smukłych geometrycznie nieliniowych, rozdział 9.1 i 9.2, Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 261-288, 2004.
- [18] Tomski L., Szmidla J., Local and global instability and vibration of overbraced Euler’s column, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **41**, **1**,137-154, 2003.
- [19] Sadiq M. Sait, Habib Youssef, *Iterative Computer Algorithms with Applications in Engineering. Solving Combinatorial Optimization Problems*, IEEE Computer Society, Los Alamitos, California, Washington, Brussels, Tokyo, 1999. (24)
- [20] Michalewicz Z., Fogel D. B., *Jak to rozwiązać czyli nowoczesna heurystyka*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, 2006.
- [21] Kirkpatrick S., Gelatt C. D., Vecchi M. P., Optimization by Simulated Annealing, *Science*, **220**, 671 – 680, 1983.
- [22] Arabas J., *Wykłady z algorytmów ewolucyjnych*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 2001.

## **STATECZNOŚĆ I DRGANIA SWOBODNE DYSKRETNEJ RAMY TYPU: SŁUP – RYGIEL OBCIĄŻONEJ SIŁĄ ŚLEDZĄCĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA DODATNIEGO**

**Lech Tomski, Iwona Podgórska – Brzdękiewicz**

Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: iwonapb@imipkm.pcz.czyst.pl

---

**Abstract:** *This paper concerns the issue of stability and free vibrations of discrete, two-part planar frame, built of frame bolt and frame column. Frame column is loaded by the follower force directed towards the positive pole. The loading and receiving head are built of the circular elements. Theoretical considerations are made concerning analysis of the system geometry and determination of relations for the potential energy and kinetic energy of the considered system. Adequate relationships describing stability of the considered frame are obtained taking into account energetic method or vibration method. An influence of geometrical parameters of loading head and rigidity of rotational springs modeling the finite stiffness of structural constraints on the critical load is analyzed. The courses of natural vibration frequencies in relation to the external load are determined.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

W niniejszej pracy prezentuje się rozważania teoretyczne mające na celu opis matematyczny dyskretniej ramy poddanej działaniu obciążenia siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego [1÷4]. Jest to obciążenie swoiste, sformułowane i wprowadzone do literatury przez L. Tomskiego, po raz pierwszy w 1994r [5]. Obciążenie realizowane jest poprzez głowicę wymuszającą i przejmującą obciążenie, zbudowaną z elementów o zarysie kołowym [2÷4]. Głowica jest konstrukcją rzeczywistą, stosowaną w badaniach eksperymentalnych układów ciągłych [2, 3]. Rama jest układem dyskretnym o dwóch stopniach swobody, w którym uwzględnia się skończoną sztywność występujących węzłów konstrukcyjnych, modelowanych za pomocą sztywności sprężyn rotacyjnych. Zagadnienie stateczności układu rozwiązuje się biorąc pod uwagę dwie metody [6, 7]:

- energetyczną (kryterium statyczne) polegającą na poszukiwaniu obciążenia, przy którym całkowita energia potencjalna przestaje być dodatnio określona,
- drgań (kryterium kinetyczne) polegającą na znalezieniu takiego obciążenia, przy którym swobodny ruch przestaje być ograniczony.

## 2. OPIS LITERATURY

### 2.1. Stateczność układów dyskretnych

Omawiane są publikacje odnoszące się do smukłych układów dyskretnych poddanych obciążeniu konserwatywnemu: Eulera [8] i siłą skierowaną do bieguna dodatniego [8, 10], które są układami dywergencyjnymi [7÷10].

Zagadnienie stateczności układów prętowych o jednym lub dwóch stopniach swobody, poddanych działaniu obciążenia konserwatywnego przedstawiono w pracy [11]. Dla zaprezentowanych modeli, przy przyjętych: długościach sztywnych elementów układu oraz sztywności węzłów konstrukcyjnych, wyznaczono wartości obciążenia krytycznego, przy którym położenie prętów układu staje się niestateczne.

W publikacjach [4, 12] L. Tomski *et al.* zastosowali trzy metody określania stateczności kolumn dyskretnych o jednym stopniu swobody: energetyczną, drgań i metodę niedokładności. Uwzględniono mimośród przyłożenia obciążenia zewnętrznego oraz wstępne wychylenie kolumny. Wymienione metody zostały zaprezentowane na przykładzie układów utwierdzonych sprężysto i obciążonych siłą pionową [4]. W pracy [12] wyniki badań teoretycznych i numerycznych w zakresie drgań swobodnych oraz stateczności zilustrowano na przykładzie kolumny Eulera, podpartej w obu końcach przegubowo. Wyniki badań dotyczące określenia stateczności dyskretnego ramy o jednym stopniu swobody zaprezentowano w pracy [12]. Autorzy rozważali układ składający się z trzech sztywnych części (czterech prętów), tworzących słup i rygiel. Pręty słupa i rygiela połączono przegubowo i za pomocą sprężyn rotacyjnych, a układ obciążono siłą pionową działającą wzdłuż słupa ramy.

Zagadnienie stateczności układów dyskretnych o jednym stopniu swobody, dla których badano wpływ wstępnej imperfekcji przedstawiono w publikacjach [13÷16]. Wpływ wstępnego wychylenia nieskończone sztywne pręta, utwierdzonego przegubowo do podłoża na jego stateczność zaprezentowano w pracy [16]. Na swobodnym końcu układ podparto poziomą sprężyną o charakterystyce liniowej, której kierunek niezależnie od przemieszczenia układu oraz obciążenia jego swobodnego końca siłą konserwatywną, jest stale poziomy (równoległy do podłoża). Łączny wpływ wstępnego wychylenia kolumny oraz mimośrodu przyłożenia siły zewnętrznej zaprezentowano dla układu zbudowanego jak opisanego powyżej z tym, że kierunek działania sprężyny nie jest równoległy do podłoża. W publikacji [15] Elishakoff *et al.* opisali zagadnienie wpływu wstępnej imperfekcji na częstość drgań własnych dwóch układów dyskretnych obciążonych siłą pionową. Model fizyczny jednej z kolumn jest zgodny z układem, dla którego w pracy [16] badano wpływ wstępnego wychylenia na jego stateczność. Drugi z układów jest modyfikacją pierwszego, w którym oprócz zamodelowanej sprężyny, końce struktury zamocowane są przegubowo w podporach mających możliwość przesuwu w kierunku poziomym (podpora górna) oraz pionowym (podpora dolna). W pracach [13, 14] przedstawiono model trójprzegubowego układu dwóch sztywnych prętów, których ruch jest ograniczony sprężyną o charakterystyce nieliniowej. Analizowano wpływ: obciążenia układu, intensywności zmian wstępnego wychylenia oraz zmian charakterystyki sztywności sprężyny, na wyboczenie układu oraz na zakres zmian częstości drgań własnych.

Stateczność i drgania układu o dwóch stopniach swobody, obciążonego siłą skierowaną do bieguna dodatniego, rozważano w pracy [12]. Odpowiedni dobór parametrów pozwolił na uzyskanie przebiegu krzywych zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego, charakterystycznych dla układów typu dywergencyjnego pseudoflatterowego.

## 2.2. Obciążenie swoiste

Obciążenie swoiste układów smukłych zostało sformułowane i wprowadzone do literatury przez L. Tomskiego (po raz pierwszy w 1994 [5]). Obejmuje ono:

- obciążenie uogólnione z siłą skierowaną do bieguna [3÷5, 17, 18],
- obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna [1÷4],
- obciążenie poprzez rozciągany element o skończonej sztywności na zginanie [19].

Dla każdego z omawianych typów obciążenia istnieje rozwiązanie konstrukcyjne głowic wymuszających i przejmujących obciążenie, zrealizowane poprzez struktury złożone z elementów liniowych [1, 3, 5, 17, 18] lub kołowych [2, 3, 17]. Układy poddane obciążeniu swoistemu w zależności od parametrów geometrycznych struktur obciążających mogą być typu dywergencyjnego pseudoflaterowego lub dywergencyjnego.

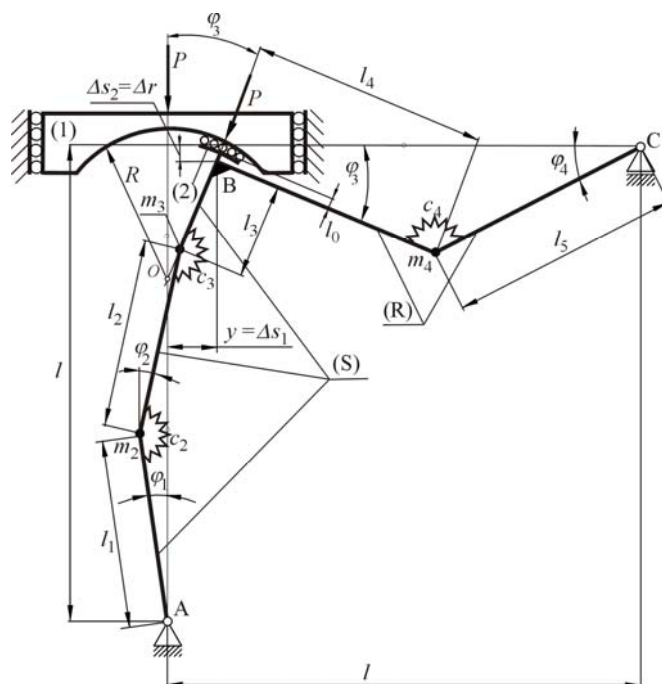
Modele fizyczne układów dyskretnych poddanych działaniu obciążenia swoistego: uogólnionego z siłą skierowaną do bieguna dodatniego (o trzech stopniach swobody) oraz siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego (o dwóch stopniach swobody) L. Tomski *et al.* zaprezentowali w pracy [20]. Autorzy analizowali wpływ parametrów geometrycznych głowic realizujących obciążenie oraz wpływ sztywności sprężyn rotacyjnych modelujących skończoną sztywność węzłów konstrukcyjnych układu, na wartość obciążenia krytycznego oraz na przebieg zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Wyznaczono wartości parametrów układu, dla których uzyskano maksymalną wartość obciążenia. Otrzymano przebiegi zmian częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego pozwalające zakwalifikować rozpatrywane układy do jednego z dwóch typów układów, mianowicie dywergencyjnego lub dywergencyjnego pseudoflaterowego przy wybranych parametrach odnośnie do geometrii i stałych fizycznych struktury.

W pracy [17] omówiono wpływ obciążenia uogólnionego na stateczność i drgania ramy płaskiej zbudowanej ze słupa pionowego i rygla poziomego, rozpatrywanej jako układ ciągły.

## 3. MODEL FIZYCZNY UKŁADU

Na Rys. 1 przedstawiono model fizyczny ramy obciążonej siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego. Układ zbudowano z pięciu nieważkich, nieskończenie sztywnych prętów o długościach  $l_1 \div l_5$ . Słup ramy (S) zamocowano przegubowo w punkcie A i połączono sztywno z rygłem (R) w punkcie B. Rygiel podparto w punkcie C za pomocą podpory przegubowej przesuwnej. Pręty słupa o długościach  $l_1 \div l_3$  połączono przegubowo a ich wzajemny obrót ograniczono sprężynami rotacyjnymi o współczynnikach sztywności skrętnych  $c_2$  i  $c_3$ . Rygiel ramy składa się z prętów  $l_4$  i  $l_5$ , połączonych przegubowo i za pomocą sprężyny rotacyjnej o sztywności  $c_4$ . W przegubach łączących pręty słupa i rygla umieszczono ciała o masach skupionych  $m_2 \div m_4$ . Obciążenie rozważanego układu realizowane jest poprzez zastosowanie głowicy obciążającej scharakteryzowanej stałą wartością promienia krzywizny  $R$  (por. [2, 3]). Kierunek działania zewnętrznej siły  $P$  obciążającej układ przechodzi przez stały punkt  $O$  (biegun), umiejscowiony w odległości  $R$  od końca słupa ramy. W skład głowicy obciążającej wchodzi: głowica wywołująca obciążenie (1), w której zamocowany jest pierścień zewnętrzny łożyska tocznego (kulkowego) oraz głowica przejmująca obciążenie (2) wraz z pierścieniem wewnętrznym łożyska. Głowica (2) jest sztywno połączona z prętem o długości  $l_3$ . Przyjmując się, że elementy głowic: obciążającej i przejmującej obciążenie

zenie są nieskończenie sztywne. Pomija się wpływ elementu o długości  $l_0$ , który został wprowadzony z przyczyn konstrukcyjnych.



Rysunek 1: Schemat fizyczny ramy obciążonej siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego

Położenie prezentowanego układu opisuje się za pomocą współrzędnych  $\varphi_1 \div \varphi_4$ , określających kąt obrotu poszczególnych elementów prętowych ramy. Wymagane jest spełnienie warunków równości przemieszczeń: poprzecznych słupa ramy  $\Delta s_1$  i głowicy przejmującej obciążenie  $y$  – wzór (1a) a także wzdłużnych słupa  $\Delta s_2$  oraz rygla ramy  $\Delta r$  – wzór (1b):

$$\Delta s_1 = y \quad \Delta s_2 = \Delta r \quad (1a,b)$$

Omawiane wielkości wyznaczono na podstawie geometrii układu, wykorzystując współrzędne  $\varphi_1 \div \varphi_4$ :

$$\Delta s_1 = l_2 \sin \varphi_2 - l_1 \sin \varphi_1 + l_3 \sin \varphi_3, \quad y = R \sin \varphi_3 \quad (2a,b)$$

$$\Delta s_2 = l_1(1 - \cos \varphi_1) + l_2(1 - \cos \varphi_2) + l_3(1 - \cos \varphi_3), \quad \Delta r = l_5 \sin \varphi_4 - l_4 \sin \varphi_3 \quad (3a,b)$$

Uwzględniając w opisie matematycznym warunki zgodności przemieszczeń, układ opisuje się dwoma niezależnymi współrzędnymi  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , niezbędnymi do jednoznacznego określenia jego położenia (układ o dwóch stopniach swobody).



Zagadnienie formułuje się i rozwiązuje zgodnie z założeniami teorii liniowej, przyjmując, że przemieszczenia układu są małe:

$$\sin \varphi \cong \operatorname{tg} \varphi \cong \varphi, \quad \cos \varphi \cong 1 \quad (4)$$

Przy formułowaniu wzorów na energię potencjalną układu należy założyć, że  $\cos \varphi \neq 1$ . Założenia (4) odnośnie do funkcji  $\cos \varphi$  można przyjąć po wykonaniu działania różniczkowania energii potencjalnej.

#### 4. ENERGIA POTENCJALNA I KINETYCZNA UKŁADU

Składowe energii potencjalnej  $V$  układu wynoszą:

- energia odkształcenia sprężystego:

$$V_1 = \frac{1}{2} c_2 (\varphi_1 + \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c_3 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c_4 (\varphi_3 + \varphi_4)^2 \quad (5a)$$

- energia potencjalna składowej pionowej siły  $P$ :

$$V_2 = -P \Delta s_2 = -P [l_1 (1 - \cos \varphi_1) + l_2 (1 - \cos \varphi_2) + l_3 (1 - \cos \varphi_3)] \quad (5b)$$

- energia potencjalna składowej poziomej siły  $P$ :

$$V_3 = \frac{1}{2} P \Delta s_1 \sin \varphi_3 = \frac{1}{2} P \sin \varphi_3 [l_2 \sin \varphi_2 - l_1 \sin \varphi_1 + l_3 \sin \varphi_3] \quad (5c)$$

przy czym:  $\varphi_j = \varphi_j(t)$   $j = 1 \div 4$ .

Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznej ciał o masach  $m_2, m_3$  oraz  $m_4$ :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{m_2}{2} l_1^2 \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_3}{2} \left( l_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - l_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{m_4}{2} l_5^2 \left( \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} \right)^2 \quad (6)$$

#### 5. METODA ENERGETYCZNA

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum całkowitej energii potencjalnej jest zerowanie się pierwszej pochodnej tej energii względem współrzędnych uogólnionych  $\varphi$ , czyli:

$$\partial V / \partial \varphi_j = 0. \quad (7)$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe:

$$l_j^* = l_j / l, \quad P^* = Pl / c_2, \quad c_3^* = c_3 / c_2, \quad c_4^* = c_4 / c_2, \quad R^* = R / l, \quad (8a \div e)$$

gdzie  $l$  jest długością słupa i długością rygla ramy, oraz uwzględniając w zależnościach (2a, b) i (3a, b) małe przemieszczenia układu (4), uzyskuje się związki:

$$\varphi_3 = \frac{l_2^* \varphi_2 - l_1^* \varphi_1}{R^* - l_3^*}, \quad \varphi_4 = \frac{l_4^*}{l_5^*} \varphi_3 = \frac{l_4^*}{l_5^*} \left( \frac{l_2^* \varphi_2 - l_1^* \varphi_1}{R^* - l_3^*} \right). \quad (9)$$

Całkowitą energię potencjalną układu  $V = V_1 + V_2 + V_3$ , opisaną przez dwie współrzędne uogólnione  $\varphi_1, \varphi_2$  wyrażono przy pomocy wielkości bezwymiarowych następująco:

$$V = \frac{1}{2} c_2 \left\{ (\varphi_1 + \varphi_2)^2 + c_3^* [(a_2 - 1)\varphi_2 - a_1\varphi_1]^2 + c_4^* [a_2\varphi_2 - a_1\varphi_1 (l_4^*/l_5^* + 1)]^2 + \right. \\ \left. - 2P^* [l_1^* (1 - \cos \varphi_1) + l_2^* (1 - \cos \varphi_2) + l_3^* [1 - \cos(a_2\varphi_2 - a_1\varphi_1)]] + \right. \\ \left. + P^* \sin(a_2\varphi_2 - a_1\varphi_1) [l_2^* \sin \varphi_2 - l_1^* \sin \varphi_1 + l_3^* \sin(a_2\varphi_2 - a_1\varphi_1)] \right\}, \quad (10)$$

gdzie:

$$a_i = l_i^* / (R^* - l_3^*), \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Obliczono pierwsze pochodne całkowitej energii potencjalnej (10) po współrzędnych uogólnionych  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2$ ), uzyskując warunki konieczne istnienia minimum całkowitej energii potencjalnej układu. Przyjmując związki wynikające z zasady teorii liniowej (małych przemieszczeń) i grupując wyrażenia przy  $\varphi_j$ , otrzymano następujący układ równań:

$$[d_{jn}] [\varphi_j] = 0, \quad n=1, 2 \quad (12)$$

przy czym:

$$d_{11} = 1 + a_1^2 c_3^* + a_1^2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 + P^* l_1^* (a_1 - 1) \quad (13a)$$

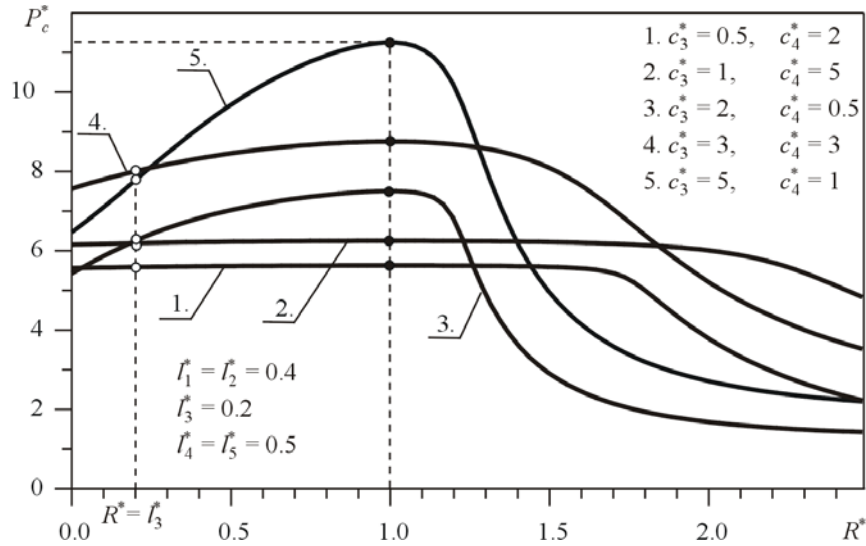
$$d_{12} = 1 - a_1 c_3^* (a_2 - 1) - a_1 a_2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 - \frac{1}{2} P^* (a_1 l_2^* + a_2 l_1^*) \quad (13b)$$

$$d_{21} = 1 - a_1 (a_2 - 1) c_3^* - a_1 a_2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 - \frac{1}{2} P^* (a_1 l_2^* + a_2 l_1^*) \quad (13c)$$

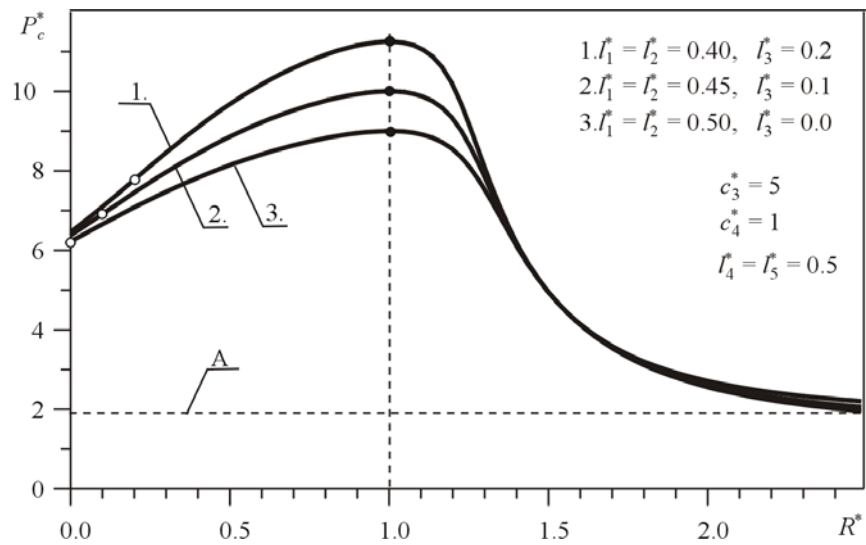
$$d_{22} = 1 + c_3^* (a_2 - 1)^2 - a_2^2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 + P^* l_2^* (a_2 - 1) \quad (13d)$$

Układ równań jednorodnych (12) posiada rozwiązania nietrywialne, gdy wyznacznik z macierzy głównej  $d_{jn}$  jest równy zero. Warunek ten umożliwia wyznaczenie krytycznego parametru obciążenia rozważanego układu.

Wyniki obliczeń numerycznych dotyczących stateczności rozważanej ramy przedstawiono na Rys. 2 i 3. Zaprezentowano zmianę krytycznego parametru obciążenia  $P_c^*$  w funkcji promienia głowicy realizującej obciążenie  $R^* \in (0, 2,5)$ . Przyjęto stałą wartość długości słupa  $-l$  i długości rygla ramy  $-l$ . Wpływ zmian parametrów opisujących sztywność węzłów konstrukcyjnych układu:  $c_3^*$  i  $c_4^*$  na wartość  $P_c^*$  przedstawiono na Rys. 2. Na Rys. 3 określono zmianę krytycznego parametru obciążenia  $P_c^*$  dla trzech wybranych wartości parametru  $l_3^*$ . Każda z wyznaczonych krzywych zmian obciążenia krytycznego, charakteryzuje się maksymalną wartością  $P_c^*$  (punkty  $\bullet$ ) przy parametrze  $R^* = 1$ , niezależnie od wartości współczynników  $c_3^*$  i  $c_4^*$  – Rys. 2, oraz niezależnie od długości elementu  $l_3^*$  – Rys. 3.



Rysunek 2: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $P_c^*$  w funkcji parametru  $R^*$  przy różnych wartościach współczynników sprężystości  $c_3^*$  i  $c_4^*$



Rysunek 3: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $P_c^*$  w funkcji parametru  $R^*$  przy wybranych wartościach parametru  $l_3^*$

Wartość obciążenia krytycznego przy wartości promienia głowicy wymuszającej obciążenie równej długości elementu  $l_3^*$  ( $R^* = l_3^*$ ) oznaczono punktami  $\square$ . Odpowiadają one sile krytycznej ramy poddanej obciążeniu Eulera [12] (przy różnych wartościach współczynników  $c_3^*$  i  $c_4^*$  – Rys. 2, przy różnych długościach elementów słupa ramy – Rys. 3). Krzywa 3

na Rys. 3 opisuje przebieg zmian  $P_c^*$  układu poddanego obciążeniu siłą skierowaną do bieżąca dodatniego ( $l_3^* = 0$ ). Większe wartości obciążenia krytycznego przy identycznych sztywnościach sprężyn (parametry  $c_i^*$  uzyskano dla układów charakteryzujących się większymi wartościami parametru  $l_3^*$ . Linia przerywaną A na Rys. 3 oznaczono wartość krytycznego parametru obciążenia przy  $R^* \rightarrow \infty$ .

## 6. METODA DRGAŃ

W metodzie drgań, wykorzystuje się równania Lagrange'a II rodzaju (por. [21]). Uwzględniając energię potencjalną (5a+c) oraz energię kinetyczną ramy (6), wyznacza się odpowiednie związki niezbędne do wyznaczenia równań ruchu. Podstawiając odpowiednie pochodne: energii kinetycznej oraz energii potencjalnej do równań Lagrange'a II rodzaju otrzymuje się równania ruchu układu w postaci:

$$\begin{aligned} & 1/c_2 \left[ m_2 l_1^{*2} l^2 (1 + \gamma_3) \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_1^* l_2^* l^2 \gamma_3 \ddot{\varphi}_2 - a_1 m_2 \gamma_4 l_4^{*2} l^2 (a_2 \ddot{\varphi}_2 - a_1 \ddot{\varphi}_1) \right] + \\ & + \left[ 1 + a_1^2 c_3^* + a_1^2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 + P^* l_1^* (a_1 - 1) \right] \varphi_1 + \end{aligned} \quad (14a)$$

$$+ \left[ 1 - a_1 c_3^* (a_2 - 1) - a_1 a_2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 - \frac{1}{2} P^* (a_1 l_2^* + a_2 l_1^*) \right] \varphi_2 = 0$$

$$\begin{aligned} & 1/c_2 \left[ -m_2 l_1^* l_2^* l^2 \gamma_3 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2^{*2} l^2 \gamma_3 \ddot{\varphi}_2 + a_2 m_2 \gamma_4 l_4^{*2} l^2 (a_2 \ddot{\varphi}_2 - a_1 \ddot{\varphi}_1) \right] + \\ & \left[ 1 - a_1 (a_2 - 1) c_3^* - a_1 a_2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 - \frac{1}{2} P^* (a_1 l_2^* + a_2 l_1^*) \right] \varphi_1 + \end{aligned} \quad (14b)$$

$$\left[ 1 + c_3^* (a_2 - 1)^2 - a_2^2 c_4^* (l_4^*/l_5^* + 1)^2 + P^* l_2^* (a_2 - 1) \right] \varphi_2 = 0$$

gdzie:

$$\gamma_3 = m_3 / m_2, \quad \gamma_4 = m_4 / m_2. \quad (15a,b)$$

Rozwiązania równań (14a, b) przyjmuje się w postaci:

$$\varphi_i = \Phi_i \sin(\omega t), \quad (16)$$

gdzie:  $\Phi_1, \Phi_2$  są amplitudami drgań członów układu odpowiednio o długościach  $l_1, l_2$ ;  $\omega$  jest częstością drgań własnych ramy.

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu rozwiązań (16) i przekształceniu równań (14a, b), otrzymuje się układ równań:

$$[c_{jn}] [\Phi_j] = 0, \quad n = 1, 2. \quad (17)$$

Równanie przestępne na częstości drgań własnych  $\omega$  układu otrzymuje się, biorąc pod uwagę zerowanie się wyznacznika utworzonego ze współczynników przy zmiennych  $\Phi_j$ :

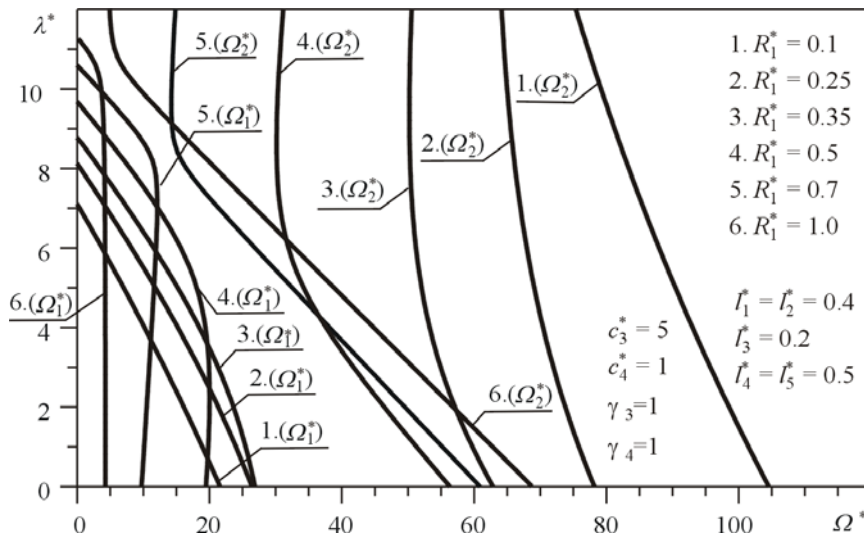
$$\begin{vmatrix}
 -\Omega^* [l_1^{*2}(1+\gamma_3) + a^2 \gamma_4 l_4^{*2}] + a_1^2 c_3^* + \Omega^* (l_1^* l_2^* \gamma_3 + a_1 a_2 \gamma_4 l_4^{*2}) - a_1 c_3^* (a_2 - 1) + \\
 + 1 + a_1^2 c_4^* \left(\frac{l_4^*}{l_5^*} + 1\right)^2 + P^* l_1^* (a_1 - 1) & + 1 - a_1 a_2 c_4^* \left(\frac{l_4^*}{l_5^*} + 1\right)^2 - \frac{1}{2} P^* (a_1 l_2^* + a_2 l_1^*) \\
 \Omega^* (l_1^* l_2^* \gamma_3 + a_1 a_2 \gamma_4 l_4^{*2}) - a_1 (a_2 - 1) c_3^* + & - \Omega^* (a_2^2 \gamma_4 l_4^{*2} + l_2^{*2} \gamma_3) + c_3^* (a_2 - 1)^2 + \\
 + 1 - a_1 a_2 c_4^* \left(\frac{l_4^*}{l_5^*} + 1\right)^2 - \frac{1}{2} P^* (a_1 l_2^* + a_2 l_1^*) & + 1 - a_2^2 c_4^* \left(\frac{l_4^*}{l_5^*} + 1\right)^2 + P^* l_2^* (a_2 - 1)
 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

gdzie  $\Omega^*$  jest bezwymiarowym parametrem częstości drgań własnych układu:

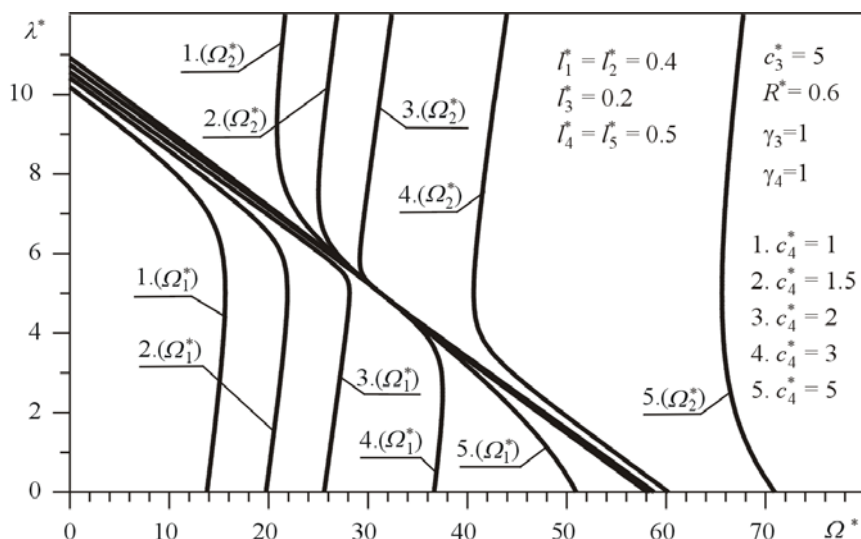
$$\Omega^* = m_2 l^2 \omega^2 / c_2. \quad (19)$$

Określono numerycznie przebieg zmian parametru częstości drgań własnych  $\Omega^*$  w funkcji bezwymiarowego parametru obciążenia zewnętrznego  $P^*$  (por. wzór (6b)). Przy założonej geometrii i stałych fizycznych prętów układu uzyskano krzywe charakterystyczne zmian wartości własnych  $\Omega_1^*$ ,  $\Omega_2^*$ . Zaprezentowano wpływ na wartość parametru  $\Omega^*$ :

- zmian parametru promienia głowicy realizującej obciążenie  $R^*$  – Rys. 4,
- zmian bezwymiarowego współczynnika sztywności sprężyny rotacyjnej  $c_4^*$  – Rys. 5.



Rysunek 4: Przebieg krzywych częstości drgań własnych na płaszczyźnie: bezwymiarowy parametr obciążenia  $P^*$  – bezwymiarowy parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$



Rysunek 5: Przebieg krzywych częstości drgań własnych na płaszczyźnie: bezwymiarowy parametr obciążenia  $\lambda^*$  – bezwymiarowy parametr częstość drgań własnych  $\Omega^*$

W zależności od przyjętych wartości parametrów:  $R^*$  i  $c_4^*$  uzyskano przebiegi krzywych na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  – parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$  charakterystyczne dla układów typu:

- dywergencyjnego – ujemne nachylenie pierwszej krzywej częstości (krzywe 1÷3 na Rys. 4 i krzywa 5 na Rys. 5),
- dywergencyjnego pseudoflatterowego – dodatnie, zerowe lub ujemne nachylenie pierwszej krzywej charakterystycznej (krzywe 4÷6 na Rys. 4 i krzywe 1÷4 na Rys. 5).

## 7. WNIOSKI

W pracy zaprezentowano model fizyczny dyskretnej ramy obciążonej siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego. Wykorzystując związki geometryczne między elementami głowicy obciążającej a geometrią układu oraz warunki równości przemieszczeń elementów ramy, układ opisano przy pomocy dwóch niezależnych współrzędnych. Na podstawie przeprowadzonych rozważań teoretycznych oraz wyników symulacji numerycznych, dotyczących stateczności i drgań swobodnych ramy:

- określono parametry układu, dla których uzyskano maksimum krytycznego parametru omawianego obciążenia,
- uzyskano inne przypadki obciążenia konserwatywnego układów: Eulera i siłą skierowaną do bieguna dodatniego, dla określonych zależności pomiędzy parametrami geometrycznymi głowicy obciążającej oraz długościami prętów ramy,
- układ zakwalifikowano do jednego z dwóch typów: dywergencyjnego lub dywergencyjnego pseudoflatterowego, w zależności od przebiegu krzywych wartości własnych.

*Praca wykonana w ramach pracy BS-1-101-302-99/P.*

## LITERATURA

- [1] L. Tomski, J. Przybylski, M. Gołębiowska-Rozanow, J. Szmidla, Vibration and stability of a cantilever column subject to a follower force passing through a fixed point, *Journal of Sound and Vibration*, **214**, 1, 67–81, 1998.
- [2] L. Tomski, J. Szmidla, M. Gołębiowska-Rozanow, Vibrations and Stability of a Two-Rod Column Loaded by The Sector of a Rolling Bearing, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **42**, 4, 905–926, 2004.
- [3] L. Tomski, J. Szmidla, Drgania swobodne i stateczność kolumn poddanych obciążeniu swoistemu – sztywne węzły konstrukcyjne układu wymuszającego i przejmującego obciążenie, rozdział 3, *Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo – Techniczna”, Warszawa, 68–133, 2004.
- [4] Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, *Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo - Techniczna”, Warszawa, 2007.
- [5] L. Tomski, M. Gołębiowska-Rozanow, J. Szmidla, Free Vibration of a Column Loaded by a Force and Bendig Moment, *Vibrations and WaVES'94*, Poznań - Błażejewko, 317–319, 1994.
- [6] L. Tomski, J. Szmidla, Wprowadzenie do problematyki stateczności i drgań swobodnych kolumn, rozdział 1, *Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa, 15–39, 2004.
- [7] H. Ziegler, Principles of Structural Stability, Waltham, 1968.
- [8] S.P. Timoshenko, J.M.Gere, *Theory of Elastic Stability*, New York, Mc Graw- Hill, 1961.
- [9] H.H.E. Leipholz, On Conservative Elastic Systems of the First and Second Kind, *Ingenieur-Archiv* **43**, 255–271, 1974.
- [10] A. Gajewski, M. Życzkowski, Optimal Design of Elastic Columns Subject to the General Conservative Behaviour of Loading, *ZAMP*, **21**, 806–818, 1970.
- [11] J. Roorda, Problemy stateczności konstrukcji sprężystych, rozdział 2, *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*, Praca zbiorowa pod kierunkiem naukowym Z. Wawszcyszyna, Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich, Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk, 81–192, 1981.

- [12] L. Tomski, I. Podgórska – Brzdękiewicz, J. Szmidla, S. Uzny, *Drgania i stateczność układów dyskretnych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2006.
- [13] I. Elishakoff, Remarks of the Static and Dynamic Imperfection- Sensitivity of Non-symmetric Structures, *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 111–115, 1980.
- [14] I. Elishakoff, V. Birman, J. Singer, Effect of Imperfections on the Vibrations of Loaded Structures, *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 191–193, 1984.
- [15] I. Elishakoff, S. Marcus, J. H. Starnes, On vibrational sensitivity of Augustis Model Structure in the vicinity of a non-linear static state, *International Journal Non-Linear Mechanics*, **2**, 31, 229–236, 1996.
- [16] J. M. T. Thompson, G. W. A. Hunt, *General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973.
- [17] L. Tomski, M. Gołębiowska-Rozanow, J. Przybylski, J. Szmidla, Stability and vibration of a two-member frame under generalised load, *Stability of Steel Structures*, Edited by M. Ivanyi, Vol.1, Akademiai Kiado, Publishing House of Hungarian Academy of Science, Budapest, 493–500, 1995.
- [18] L. Tomski, J. Przybylski, M. Gołębiowska-Rozanow, J. Szmidla, Vibration and stability of an elastic column subject to a generalized load, *Archive of Applied Mechanics*, **67**, 105–116., 1996.
- [19] L. Tomski, J. Szmidla, Free vibrations of a column loaded by a stretched element, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **44**, 2, 279–298, 2006.
- [20] L. Tomski, J. Szmidla, Free vibrations and stability of discrete systems subjected to the specific load, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **45**, 4, 873–892, 2007.
- [21] R.H.Cannon, *Dynamics of Physical Systems*, MCGraw-Hill Inc., 1967.



## **DRGANIA I STATECZNOŚĆ SZCZEGÓLNEGO UKŁADU SMUKŁEGO PODDANEGO OBCIĄŻENIU SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA DODATNIEDGO**

**Lech Tomski, Iwona Podgórska – Brzdękiewicz, Janusz Szmidla**

Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: iwonapb@imipkm.pcz.czyst.pl

---

**Abstract:** *This paper concerns the issue of stability and free vibrations of slender system loaded by the force directed towards the positive pole. Two rod system connected with tube element is tested. The rope system is element of forcing head. It enables the application of the given direction and the point of application of external force towards considered column. The physical model of tested system and theoretical considerations related to determination of boundary conditions by using the method of mechanical energy variation are shown in this paper. Constructional scheme of the loading and receiving head is presented. Values of the critical force and the course of natural frequency in relation to the external load for given geometry and physical constants of the system are determined. The results of theoretical and numerical research are experimentally verified on the stand.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

#### **1.1. Opis literatury**

W Instytucie Mechaniki i PKM Politechniki Częstochowskiej prowadzone są badania dotyczące stateczności i drgań swobodnych smukłych układów sprężystych w tym kolumn i ram płaskich. Poddane są one działaniu obciążania swoistego, które zostało sformułowane i wprowadzone do literatury przez L. Tomskiego, a po raz pierwszy tego typu układy zostały zaprezentowane w pracy [1] z 1994 r. Układy poddane temu rodzajowi obciążenia charakteryzują się specyficznym przebiegiem zmian częstości drgań własnych ( $\omega$ ) w funkcji obciążenia zewnętrznego kolumny ( $P$ ). W zakresie obciążenia zmieniającego się od 0 do siły krytycznej ( $P_c$ ) nachylenie krzywych na płaszczyźnie obciążenie ( $P$ ) – częstość drgań własnych ( $\omega$ ) może być: dodatnie, zerowe lub ujemne. Dla  $P \approx P_c$ , nachylenie krzywej wartości własnych jest zawsze ujemne, a wzdłuż krzywej wyznaczającą funkcję  $P(\omega)$  dla częstości podstawowej następuje zmiana postaci drgań własnych (z pierwszej na drugą i odwrotnie). Nazwę układów charakteryzujących się takim przebiegiem krzywych wartości własnych: dywergencyjne pseudoflatterowe nadali R. Bogacz i L. Tomski w publikacji [2].

Obciążenie układu wywołane przez siłę skierowaną do bieguna dodatniego cechuje się tym, że kierunek działania przyłożonej do nieutwierdzonego końca kolumny siły zewnętrznej, przechodzi przez stały punkt, położony na nieodkształconej osi kolumny, poniżej swobodnego jej końca [3÷7]. Układy obciążone siłą skierowaną do bieguna dodatniego w zakresie dywergencyjno pseudoflatterowym są poddane obciążeniu swoistemu.

Rozważania dotyczące rozwiązania zagadnienia stateczności pryzmatycznego pręta obciążonego siłą skierowaną do bieguna dodatniego prowadzili S.P. Timoshenko i J. M. Gere [3] oraz W. J. Fiedosiew [7]. Do określenia wartości siły krytycznej okazało się wystarczające statyczne kryterium stateczności (metoda energetyczna [8]) pomimo, że siła zmienia swój kierunek podczas wyboczenia.

Zagadnienie optymalnego kształtowania prętów obciążonych siłą skierowaną do stałego bieguna, polegające na poszukiwaniu pewnego parametru wyróżniającego kształt pręta spośród pewnej klasy prętów (np. stożkowych), tzw. kształtowanie parametryczne rozważali A. Gajewski i M. Życzkowski w pracach [4, 5 i 6]. Autorzy poszukiwali takiej wartości parametru charakteryzującego zbieżność pręta, dla której jego objętość jest najmniejsza przy danej sile krytycznej powodującej utratę stateczności przez wyboczenie. Problem optymalizacji rozwiązano w przypadku pręta: jednorodnego, cechującego się stałym modułem Younga wzdłuż długości układu jak i niejednorodnego. Rozwiązanie zagadnień: optymalnego pryzmatycznego kształtowania prętów sprężystych (o określonym sposobie zmiany przekroju poprzecznego) oraz optymalnego wariacyjnego kształtowania prętów znajdujących się w stanie sprężysto-plastycznym zawarto w publikacji [6]. Układy obciążone były siłą ścisnąjącą skierowaną do bieguna.

Badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące stateczności i drgań swobodnych kolumny liniowej i geometrycznie nieliniowej poddanej obciążeniu siłą skierowaną do bieguna dodatniego przeprowadzili L. Tomski i in. [9]. Wyznaczono wpływ asymetrii rozkładu sztywności na zginanie poszczególnych prętów kolumny geometrycznie nieliniowej oraz położenia bieguna, na wartość siły krytycznej. Na podstawie zależności siły krytycznej od rozkładu asymetrii sztywności na zginanie układu nieliniowego i liniowego, wyznaczono przedziały lokalnej i globalnej utraty stateczności. Określono przedział wartości położenia bieguna dla którego rozpatrywany układ można zaliczyć do typu: dywergencyjnego lub dywergencyjnego pseudoflatterowego. Urzeczywistniono aproksymację kolumny Beck'a [9] układem obciążonym siłą skierowaną do bieguna dodatniego w zakresie dywergencyjnym pseudoflatterowym poprzez zmianę położenia bieguna. Przedstawiono zakres aproksymujący w funkcji współczynnika asymetrii sztywności na zginanie poszczególnych prętów kolumny geometrycznie nieliniowej oraz w funkcji położenia bieguna.

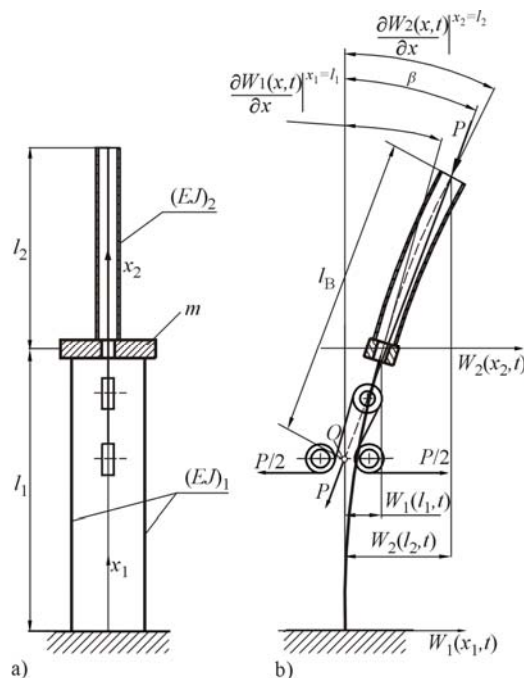
Schematy fizyczne: układu dyskretnego o dwóch stopniach swobody poddanych działaniu obciążenia siłą skierowaną do bieguna dodatniego przedstawili L. Tomski i in. w pracach [10, 11], a układu ciągłego w publikacji [11]. Rozwiązania konstrukcyjne głowic wywołujących i przejmujących obciążenie, umożliwiającymi realizację omawianego przypadku obciążenia zaprezentowano w pracach [11, 12]. Zastosowano dwie metody określania stateczności omawianych układów – energetyczną i drgań. Wyznaczono wartości parametrów układu, dla których uzyskano maksymalną wartość obciążenia krytycznego. Na podstawie otrzymanych krzywych przebiegu częstości drgań własnych na płaszczyźnie: obciążenie – częstość drgań własnych określono przedziały wartości parametru odległości do bieguna, dla którego układ zalicza się do jednego z typów: dywergencyjnego pseudoflatterowego lub dywergencyjnego.

### 1.2. Sformułowanie problemu

W pracy bada się teoretycznie, numerycznie i eksperymentalnie stateczność oraz drgania własne układu zbudowanego z dwóch prętów połączonych elementem masowym z rurą. Elementami głowic wymuszających obciążenie oraz stanowiska badawczego są układy liniowe, umożliwiające wywołanie obciążenia kolumny siłą skierowaną do bieguna dodatniego. Obciążenie to jest realizowane przy wariacie konstrukcyjnym głowic zbudowanych z elementów liniowych [12]. Dla zaprezentowanego modelu fizycznego przeprowadza się analizę geometrii układu i sposobu realizowania obciążenia układu siłą zewnętrzną  $P$ . Formuluje się warunki brzegowe metodą wariacji energii mechanicznej. Badania eksperymentalne dotyczą wyznaczenia wartości własnych rozpatrywanych układów. Przeprowadza się badania numeryczne dotyczące wpływu wybranych wielkości geometrycznych i fizycznych charakteryzujących układ, na wartość siły krytycznej oraz na przebieg krzywych wartości własnych. W pracy częściowo wykorzystano wyniki badań zawartych w publikacji [12].

## 2. MODEL FIZYCZNY UKŁADU

Model fizyczny układu poddanego obciążeniu siłą skierowaną do bieguna dodatniego przedstawiono na Rys. 1. Zbudowany jest on z dwóch prętów o długościach  $l_1$ , sztywno utwierdzonych ( $x = 0$ ), wykonanych z jednakowego materiału i o takim samym przekroju kołowym. Pręty połączone z rurą o długości  $l_2$  za pomocą kostki o masie  $m$ . Kierunek działania obciążenia zewnętrznego  $P$  przechodzi przez stały punkt  $O$ , umiejscowiony na nieodkształconej osi kolumny, leżący w odległości  $l_B$  od swobodnego końca układu.



Rysunek 1: Model układu obciążonego siłą skierowaną do bieguna dodatniego [12]

Sztywność na zginanie prętów oznaczono jako  $(EJ)_1$ , masę przypadającą na jednostkę długości  $(\rho_0 A)_1$ . W przypadku rury zastosowano odpowiednio oznaczenia:  $(EJ)_2$  i  $(\rho_0 A)_2$ .

Pomiędzy przemieszczeniem poprzecznym końca rury ( $x_2 = l_2$ ) a kątem  $\beta$  określającym kierunek działania siły zewnętrznej  $P$  względem osi obojętnej układu istnieje związek geometryczny, wynikający ze sposobu realizowania obciążenia układu, w postaci:

$$\beta = \frac{W_2(l_2, t)}{l_B}. \quad (1)$$

### 3. ENERGIA MECHANICZNA UKŁADU, WARUNKI BRZEGOWE

Energia kinetyczna  $T$  układu jest sumą energii: kinetycznej kolumny i masy skupionej  $m$ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^{l_i} (\rho_0 A)_i \left[ \frac{\partial W_i(x_i, t)}{\partial t} \right]^2 dx_i + \frac{1}{2} m \left[ \frac{\partial W_1(l_1, t)}{\partial t} \right]^2. \quad (2)$$

Zależności na energię potencjalną układu  $V$  określa się wzorami:

- energia sprężysta zginania:

$$V_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (EJ)_i \int_0^{l_i} \left[ \frac{\partial^2 W_i(x_i)}{\partial x_i^2} \right]^2 dx_i \quad (3)$$

- energia potencjalna składowej pionowej siły  $P$ :

$$V_2 = -P \Delta \quad (4)$$

- energia potencjalna składowej poziomej siły  $P$ :

$$V_3 = \frac{1}{2} P \beta W_2(l_2, t) = \frac{1}{2} P \frac{1}{l_B} W_2^2(l_2, t) \quad (5)$$

Wielkość  $\Delta$  określa przemieszczenie wynikające ze skrócenia osi kolumny i wynosi:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{l_1} \left[ \frac{\partial W_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]^2 dx_1 + \int_0^{l_2} \left[ \frac{\partial W_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right]^2 dx_2 \right\} \quad (6)$$

Sformułowanie zagadnienia polegającego na określeniu warunków brzegowych dla rozpatrywanej kolumny odbywa się przy zastosowaniu zasady Hamiltona, czyli:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad V = \sum_{j=1}^3 V_j. \quad (7)$$

W zasadzie Hamiltona (7) wykorzystuje się przemienność operacji całkowania (względem  $x$  oraz  $t$ ) i obliczania wariacji. Uwzględnienia się przemienność operatorów wariacji i różniczkowania a następnie całkuje się przez części wariację energii: kinetycznej i potencjalnej.

Wykorzystując znane warunki brzegowe utwierdzenia oraz warunki ciągłości:

$$W_1(0,t) = 0, \quad \left. \frac{\partial W_1(x_1,t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 W_1(x_1,t)}{\partial x_1^2} \right|_{x_1=l_1} = \left. \frac{\partial^2 W_2(x_2,t)}{\partial x_2^2} \right|_{x_2=0} \quad (8a+c)$$

$$W_1(l_1,t) = W_2(0,t), \quad \left. \frac{\partial W_1(x_1,t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=l_1} = \left. \frac{\partial W_2(x_2,t)}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} \quad (8d,e)$$

$$\left. \frac{\partial^3 W_1(x_1,t)}{\partial x_1^3} \right|_{x_1=l_1} - m \frac{\partial^2 W_1(l_1,t)}{\partial t^2} = \left. \frac{\partial^3 W_2(x_2,t)}{\partial x_2^3} \right|_{x_2=0} \quad (8f)$$

otrzymuje się równania ruchu układu:

$$(EJ)_i \frac{\partial^4 W_i(x_i,t)}{\partial x_i^4} + P \frac{\partial^2 W_i(x_i,t)}{\partial x_i^2} + (\rho_0 A)_i \frac{\partial^2 W_i(x_i,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (9a,b)$$

oraz pozostałe warunki brzegowe, niezbędne do rozwiązania zagadnienia:

$$\left. \frac{\partial^2 W_2(x_2,t)}{\partial x_2^2} \right|_{x_2=l_2} = 0 \quad (10a)$$

$$\left. \frac{\partial^3 W_2(x_2,t)}{\partial x_2^3} \right|_{x_2=l_2} + P \left[ \left. \frac{\partial W_2(x_2,t)}{\partial x_2} \right|_{x_2=l_2} - \frac{1}{l_B} W_2(l_2,t) \right] - \frac{m}{(EJ)_2} \frac{\partial^2 W_2(l_2,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10b)$$

#### 4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

Uwzględnia się symetryczny rozkład sztywności na zginanie oraz masy przypadającej na jednostkę długości układu, rozdzielając zmienne funkcji  $W_i(x, t)$  względem  $t$  i  $x$ , w postaci:

$$W_i(x_i,t) = y_i(x_i) \cos(\omega t) \quad i = 1,2 \quad (11)$$

Rozwiązania ogólne równań (9a, b), po rozdzieleniu zmiennych (11) są następujące:

$$y_i(x_i) = D_{1i} \cosh(\alpha_i x_i) + D_{2i} \sinh(\alpha_i x_i) + D_{3i} \cos(\beta_i x_i) + D_{4i} \sin(\beta_i x_i), \quad (12)$$

gdzie  $D_{ni}$  są stałymi całkowania ( $n=1, 2, 3, 4$ ), oraz:

$$\alpha_i^2 = -0.5 k_i^2 + \left( 0.25 k_i^4 + \Omega_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta_i^2 = 0.5 k_i^2 + \left( 0.25 k_i^4 + \Omega_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (13a,b)$$

$$\Omega_i^2 = \frac{(\rho_0 A)_i \omega^2}{(EJ)_i}, \quad k_i = \sqrt{\frac{P}{(EJ)_i}}. \quad (14a,b)$$

Całkowitą sztywność na zginanie układu oznaczono  $EJ = (EJ)_1 + (EJ)_2$ , a całkowitą masę przypadającą na jednostkę długości jako  $\rho_0 A = (\rho_0 A)_1 + (\rho_0 A)_2$ .

Po podstawieniu rozwiązań (12) do warunków brzegowych (8a-f) oraz do (10a, b) otrzymuje się równanie przestępne na wartości własne układu, które rozwiązujemy.

## 5. STANOWISKO BADAWCZE

Rozwiązanie konstrukcyjne struktury realizującej obciążenie siłą skierowaną do bieguna dodatniego zaprezentowano na Rys. 2 (por. [12]). Wyróżnia się następujące elementy głowic:

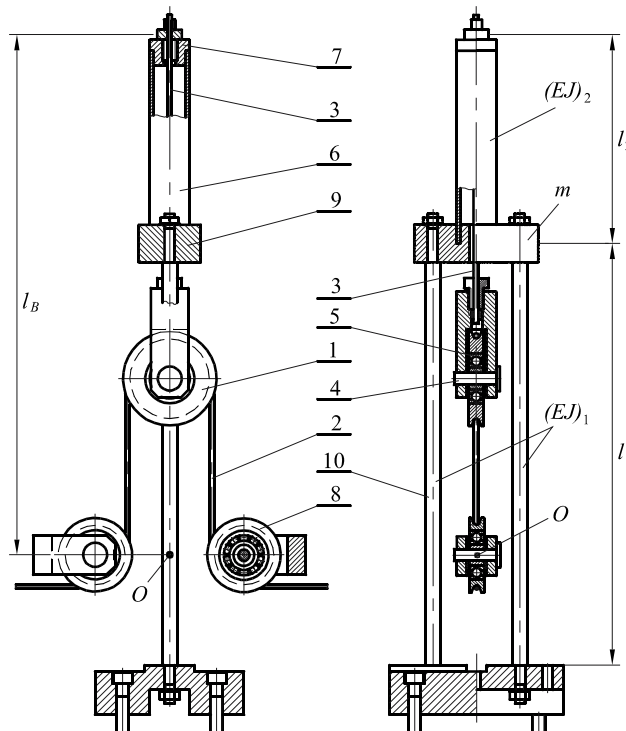
a) wywołującej obciążenie:

- koło linowe 1 z osadzonym na sworzniu 4 łożyskiem tocznym kulkowym,
- linka 2, przewinięta przez koło 1 i krążki linowe 8 do zespołów wywołujących obciążenie badanego układu (umieszczonych na stanowisku badawczym),

b) przejmującej obciążenie:

- widełki 5 połączenia sworzniowego przegubowego koła linowego 1,
- ciągnio linowe 3 zamocowane przez kostkę 7 do rury 6, osadzonej sztywno w belce 9.

Pręty kolumny 10 mocuje się do ramion belki 9.



Rysunek 2: Rozwiązanie konstrukcyjne struktury realizującej obciążenie siłą skierowaną do bieguna dodatniego [12]

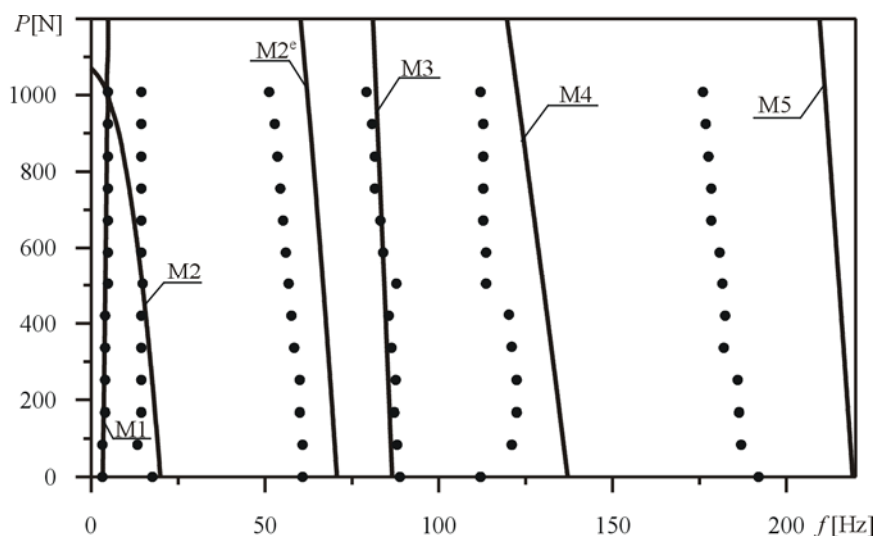
## 6. WYNIKI BADAŃ EKSPERYMENTALNYCH I NUMERYCZNYCH

Na podstawie rozwiązania zagadnienia brzegowego wykonano obliczenia numeryczne dotyczące wyznaczenia wartości częstotliwości drgań własnych układu w funkcji obciążenia zewnętrznego. Otrzymane wyniki zweryfikowano eksperymentalnie na stanowisku badawczym zaprojektowanym oraz zbudowanym w Instytucie Mechaniki i PKM Politechniki Częstochowskiej [13]. Parametry fizyczne oraz geometryczne układu a także wielkości charakteryzujące głowicę obciążającą zamieszczono w Tabeli 1.

Tabela 1: Parametry fizyczne i geometryczne układu

$(EJ)_1$ [Nm <sup>2</sup> ]	$(EJ)_2$ [Nm <sup>2</sup> ]	$(\rho_0 A)_1$ [kg/m]	$(\rho_0 A)_2$ [kg/m]	$l_1$ [m]	$l_2$ [m]	$l_B$ [m]	$m$ [kg]
152.68	127.55	0.631	0.438	0.8	0.6	1.0	1.25

Uzyskane wyniki badań eksperymentalnych i obliczeń numerycznych przedstawiono na Rys. 3. Punktami zaznaczono otrzymane wyniki badań eksperymentalnych. Liniami nanie-siono rezultaty obliczeń numerycznych, które uzyskano w oparciu o równania ruchu (9a, b), warunki brzegowe (8a-f) i (10a, b) oraz rozwiązanie zagadnienia brzegowego. Przedstawio-no przebieg zmian pięciu podstawowych częstotliwości drgań własnych układu  $M_i$  ( $i = 1..5$ ) oraz dodatkowej częstotliwości  $M2^e$ , której odpowiada symetryczna postać drgań.



Rysunek 3: Krzywe na płaszczyźnie obciążenie  $P$  – częstotliwość drgań własnych  $f$  [12]

Otrzymano dobrą zgodność wyników obliczeń numerycznych i badań eksperymentalnych dotyczących przebiegu częstotliwości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego.

Wykorzystując otrzymane rozwiązanie zagadnienia brzegowego w zakresie statyki i drgań własnych układu, wykonano obliczenia numeryczne, dotyczące wyznaczenia:

- wartości obciążenia krytycznego  $P_c$ ,
- przebiegu częstości drgań własnych  $\omega$  w funkcji zewnętrznej siły obciążającej  $P$ .

Symulacje numeryczne wykonano przy założeniu stałej całkowitej długości układu  $l = l_1 + l_2$ .

Wartości: siły krytycznej i odległości do bieguna  $l_B$  wyrażono bezwymiarowo:

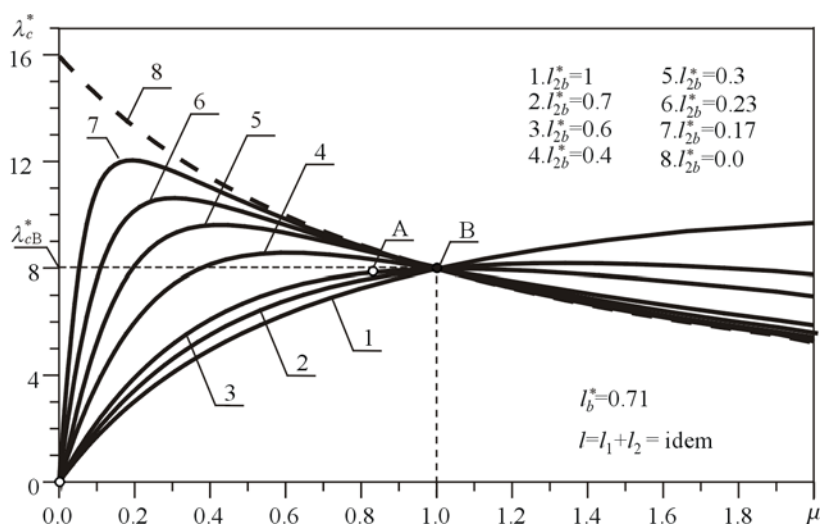
$$\lambda_c^* = P_c l^2 / EJ, l_b^* = l_B / l \quad (15)$$

Wprowadzono wielkości bezwymiarowe określające:

a) stosunek długości rury do odległości do bieguna –  $l_{2b}^* = l_2 / l_B, l_{2b}^* \in \langle 0, 1 \rangle$ ,

b) współczynnik asymetrii rozkładu sztywności na zginanie pomiędzy prętami a rurą –  $\mu = (EJ)_2 / (EJ)_1$ , zmieniający się w granicach  $\mu \in (0, 2)$ .

Na Rys. 4 przedstawiono zmianę krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$ , w funkcji współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie  $\mu$ , przy stałej wartości parametru określającego odległość do bieguna  $l_b^*$ . Obliczenia wykonano dla kilku przyjętych wartości wielkości określającej stosunek długości rury do odległości do bieguna –  $l_{2b}^*$ .



Rysunek 4: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie  $\mu$ , przy stałej wartości parametru  $l_b^*$

Przebieg zmian krytycznego parametru obciążenia układów o parametrach granicznych zaprezentowano za pomocą:

a) krzywej 1 – układ zbudowany tylko z dwóch prętów (brak elementu rurowego),

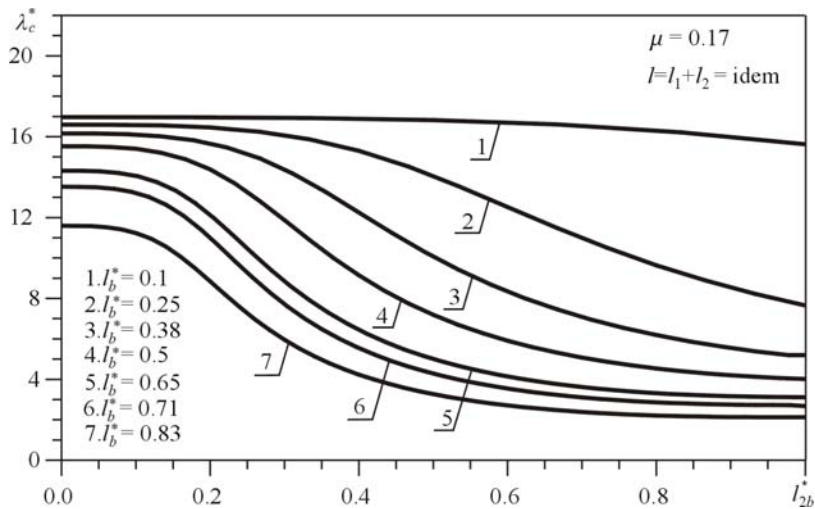
b) krzywej 8 – długość rury jest równa odległości do bieguna.

W zakresie zmian współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie w granicach  $\mu \in (0, 1)$  uzyskano wzrost wartości obciążenia krytycznego wraz ze zmniejszaniem się wartości parametru  $l_{2b}^*$ . Maksymalną siłę krytyczną uzyskano przy  $l_{2b}^* = 1$  (krzywa 8). Przy wartościach współczynnika  $\mu > 1$ , relacja jest odwrotna: wraz ze wzrostem parametru określającego stosunek długości rury do odległości do bieguna, otrzymano wzrost parametru  $\lambda_c^*$ . Wartość krytycznego parametru obciążenia układu przy  $\mu = 1$  oznaczono jako  $\lambda_{cB}^*$

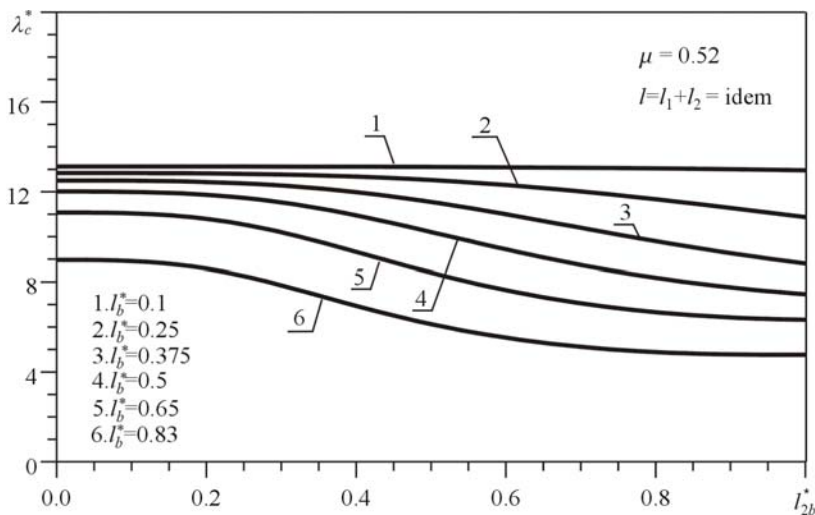


(punkt B) – jego wartość jest stała, niezależna od współczynnika  $l_{2b}^*$ . Punktem A określono wartość krytycznego parametru obciążenia układu o parametrach geometrycznych głowic obciążających, dla których wykonano badania eksperymentalne

Na Rys. 5 i 6 określono wpływ zmiany parametru  $l_{2b}^*$  na wartość krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$ , dla kilku wyrażonych bezwymiarowo odległości do bieguna  $l_b^*$ , przy określonej wartości współczynnika  $\mu$ .



Rysunek 5: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji współczynnika  $l_{2b}^*$  przy stałej wartości parametru  $\mu = 0.17$



Rysunek 6: Zmiana krytycznego parametru obciążenia  $\lambda_c^*$  w funkcji współczynnika  $l_{2b}^*$  przy stałej wartości parametru  $\mu = 0.52$

Przy najmniejszych wartościach parametru  $l_b^*$  uzyskano największe wartości obciążenia krytycznego, przy czym zakres zmian parametru  $\lambda_c^*$  w funkcji parametru  $l_{2b}^*$  jest niewielki (por. Rys. 5 i 6). Jeżeli  $l_b^* = 0$  realizowane jest obciążenie eulerowskie.

Obliczono numerycznie wartości częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Ograniczono się do określenia charakteru zmian dwóch pierwszych podstawowych częstości drgań własnych w formie bezwymiarowej  $\Omega_t^*$  ( $t = 1, 2$ ) w funkcji bezwymiarowego parametru obciążenia  $\lambda^*$ . Przyjmuje się:

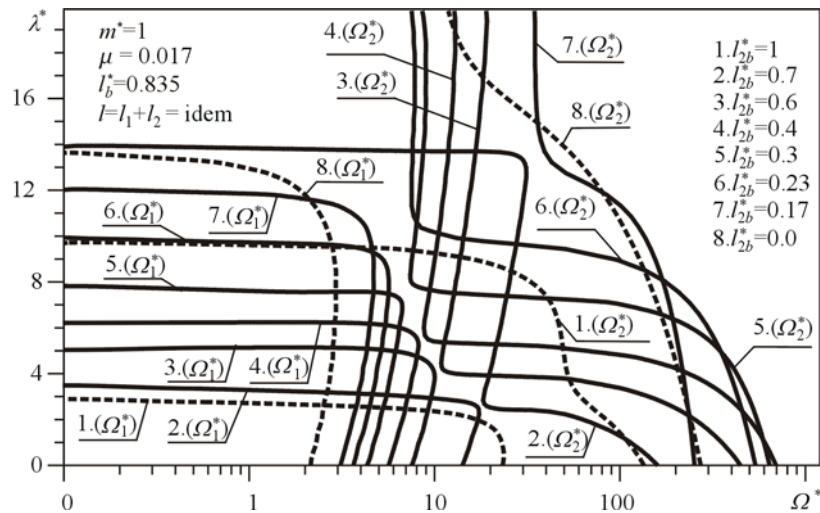
$$\lambda^* = \frac{Pl^2}{EJ}, \quad \Omega^* = \Omega^2 l^4 = \frac{\rho_0 A \omega^2 l^4}{EJ}, \quad m^* = \frac{m}{\rho_0 Al} \quad (16)$$

Na Rys. 7 i 8 przedstawiono przebiegi krzywych na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  – parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$  rozważanego układu. Obliczenia wykonano przy stałych, wybranych wartościach parametrów: współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie  $\mu$  i stałej wartości masy skupionej  $m$ . Przedstawiono wpływ na przebiegi częstości drgań własnych układu parametrów określających:

a) odległość do bieguna  $l_b^*$  – Rys. 7,

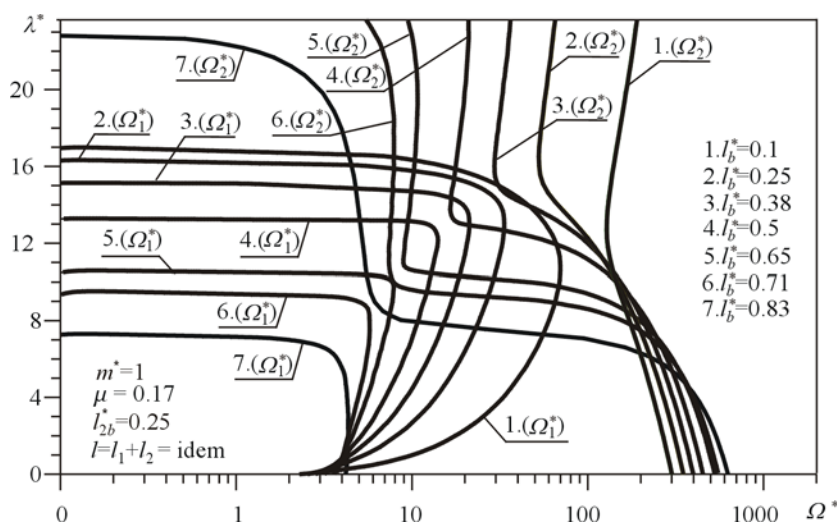
b) stosunek długości rury do odległości do bieguna  $l_{2b}^*$  – Rys. 8.

Wartość obciążenia krytycznego prezentują punkty na krzywej pierwszej częstości drgań własnych układu dla  $\Omega_1^* = 0$ . Liniami przerywanymi 1 i 8 na Rys. 8 zaznaczono przebiegi wartości własnych kolumn o granicznych wartościach parametru  $l_{2b}^*$ .



Rysunek 7: Krzywe na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  – parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$  układu przy stałej wartości parametru  $l_b^*$

Przebieg krzywych wartości własnych na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  – parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$  dla rozpatrywanych układów pozwalają je zaliczyć do typu:



Rysunek 8: Krzywe na płaszczyźnie parametr obciążenia  $\lambda^*$  – parametr częstości drgań własnych  $\Omega^*$  układu przy stałej wartości parametru  $l_{2b}^*$

dywergencyjnego pseudoflatterowego lub dywergencyjnego, w zależności od wartości rozpatrywanych parametrów.

## 7. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

- W pracy zaprezentowano układ zbudowany z dwóch prętów połączonych elementem masowym z rurą, poddany obciążeniu siłą skierowaną do bieguna dodatniego.
- Opracowano model fizyczny układu i sformułowano warunki brzegowe na podstawie wzorów opisujących całkowitą energię układu.
- Przedstawiono rozwiązanie konstrukcyjne głowicy obciążającej, której elementami są układy linowe, umożliwiające wywołanie zadanego kierunku działania oraz punktu przyłożenia siły zewnętrznej.
- Zaprezentowano wyniki badań eksperymentalnych dotyczące przebiegu częstotliwości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego, które odniesione do wyników obliczeń numerycznych potwierdzają poprawność: przyjętego modelu a także sformułowania i rozwiązania zagadnienia drgań własnych.
- Rozważania teoretyczne i wyniki badań eksperymentalnych uzupełniono przykładowymi wynikami obliczeń numerycznych, służącymi określeniu wpływu parametrów układu i głowic obciążających, na częstość drgań własnych i wartość siły krytycznej.
- Istnieją takie wartości parametrów geometrycznych głowic obciążających, dla których badany układ jest typu dywergencyjnego pseudoflatterowego.

*Praca wykonana w ramach pracy BS-1-101-302-99/P.*

**LITERATURA**

- [1] L. Tomski, M. Gołębiowska-Rozanow, J. Szmidla, Free Vibration of a Column Loaded by a Force and Bendig Moment, *Vibrations and WaVES'94*, Poznań - Błażejewko, 317–319, 1994.
- [2] R. Bogacz, Sz. Imielowski, L. Tomski, Stability and Vibration of Column Structures Subjected to Generalized Concentrated Load. Theoretical and Experimental Study, *Ukrainian – Polish Seminar, Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Warsaw, June, 453–462, 1997.
- [3] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Teoria stateczności sprężystej*, Wydawnictwo „ARKADY”, Warszawa, 1963.
- [4] A. Gajewski, M. Życzkowski, Optima shaping of an Elastic Homogeneous Bar Compressed by Polar Force, *Biuletyn de L'Academie Polonaise des Sciences*, Vol. XVII, No. 10, 479–488, 1969.
- [5] A. Gajewski, M. Życzkowski, Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, *Rozprawy Inżynierskie 2*, 17, 299–329, 1969.
- [6] A. Gajewski, Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2*, 8, 159–173, 1970.
- [7] W.J. Fieodosiew, *Diesiat lekcji – biesied po soprotiwljeniu matieriałow*, isd. „Nauka”, Moskwa 1969.
- [8] Tomski L., Szmidla J.: Wprowadzenie do problematyki stateczności i drgań swobodnych kolumn, rozdział 1, *Drgania i stateczność układów smukłych*, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, WNT, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, 40–67, Warszawa 2004.
- [9] L. Tomski, J. Szmidla, M. Gołębiowska-Rozanow, A. Kasprzycki, Drgania i stateczność kolumny nieliniowej obciążonej siłą skierowaną do bieguna (aproxymacja kolumny Beck'a), *Stability of Structures Xth Symposium*, Zakopane 8-12.09.2003.
- [10] L. Tomski, J. Szmidla, Drgania i stateczność układów dyskretnych poddanych działaniu obciążenia swoistego, *XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, 439-446, Zakopane 11-15.09.2006.
- [11] Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, *Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych*, WNT, Fundacja „Książka Naukowo - Techniczna”, Warszawa 2007.
- [12] L. Tomski, A. Kasprzycki, J. Szmidla, Rozwiązania konstrukcyjne stanowiska z układem linowym do badania drgań własnych układów smukłych, *XXIII Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn*, Rzeszów-Przemyśl, 537–546, 2007.
- [13] L. Tomski, J. Szmidla, Vibration and Stability of Column Subjected to Generalised Load by a Force Directed Towards a Pole, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 163–193, 2004.

## **STATECZNOŚĆ I DRGANIA SWOBODNE KOLUMNY PODDANEJ OBCIĄŻENIU CZYNNEMU I BIERNEMU SIŁĄ ŚLEDZĄCĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA DODATNIEGO ORAZ PODPARTEJ SPRĘŻYNĄ NIELINIOWĄ**

**Lech Tomski, Sebastian Uzny**

Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: uzny@imipkm.pcz.czyst.pl

---

**Abstract:** *Theoretical and numerical research concerned of stability and free vibrations of slender system subjected to active and passive specific load is presented in the paper. Column supported at the one end by spring with nonlinear characteristics. The boundary problem was formulated on the basis of Hamilton's principle and of the small parameters method. Solution of boundary problem permitted carry out numerical simulations.*

---

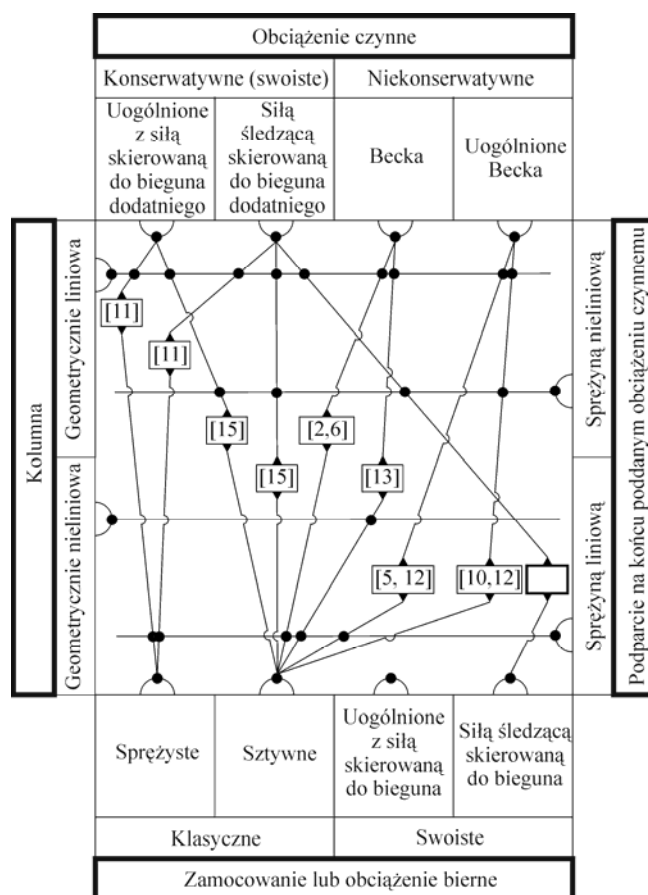
### **1. WPROWADZENIE**

Wpływ podparcia sprężystego końca kolumny, który poddano obciążeniu czynnemu, na stateczność i drgania swobodne było tematem badań wielu autorów [2, 5, 6, 10-13, 15]. Na diagramie z Rys. 1, przedstawiającym publikacje dotyczące sprężystego podparcia, uwzględniono:

- rodzaj układu smukłego (kolumny) – kolumna geometrycznie liniowa lub geometrycznie nieliniowa,
- obciążenie czynne (konserwatywne (swoiste) lub niekonserwatywne (Beck'a, uogólnione Beck'a),
- zamocowanie – obciążenie bierne (klasyczne (zamocowanie sprężyste, sztywne) lub swoiste (uogólnione z siłą skierowaną do bieguna, siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego)),
- charakterystykę zastosowanej sprężyny (liniową lub nieliniową).

Układ geometrycznie liniowy zbudowany jest z jednego pręta lub kilku prętów [2, 5, 6, 10-12, 15], ale o jednakowej sztywności na zginanie i ściskanie. W takim w przypadku siła zewnętrzna obciążająca cały układ rozkłada się w równej części na poszczególne elementy tworzące kolumnę. Inaczej jest w przypadku układu geometrycznie nieliniowego [13], który zbudowany jest z kilku prętów o różnej sztywności na zginanie i ściskanie symetrycznie

rozmieszczonych względem osi. W układzie geometrycznie nieliniowym zewnętrzna siła ściskająca rozkłada się na poszczególne pręty kolumny w sposób zależny od ich sztywności na zginanie i ściskanie.



Rysunek 1: Diagram przedstawiający prace badawcze nad układami smukłymi z uwzględnieniem sprężystego podparcia

Obciążenie czynne może być obciążeniem konserwatywnym (np. obciążenie swoiste: uogólnione z siłą skierowaną do bieguna dodatniego [11, 15] oraz siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego [11, 15]) lub niekonserwatywnym. W przypadku obciążenia niekonserwatywnego np. Beck'a [2, 6, 13] lub uogólnionego Beck'a [5, 10, 12] podparcie sprężyste ma wpływ na sposób utraty stateczności (flutter lub dywergencja). W takim przypadku mowa jest o układzie hybrydowym (por. [3]). Obciążenie swoiste zostało po raz pierwszy sformułowane i wprowadzone do literatury przez prof. L. Tomskiego [7].

Układy smukłe mogą być zamocowane klasycznie (np. zamocowane sprężysto [11] oraz w sposób sztywny [2, 5, 6, 10, 12, 13, 15]) lub w sposób swoisty. Zamocowanie swoiste

możliwe jest dzięki zastosowaniu struktur realizujących obciążenie bierno uogólnione z siłą skierowaną do bieguna lub siłą śledzącą skierowaną do bieguna [14].

Większość prac odnosi się do podparcia sprężystego końca kolumny poddanego obciążeniu czynnemu z uwzględnieniem sprężyny o charakterystyce liniowej [2, 5, 6, 11-13]. W literaturze odnaleźć można również takie prace, w których zastosowano sprężynę o charakterystyce nieliniowej [10, 12, 15].

W pracach [10, 12, 15] zastosowano sprężynę nieliniową, której charakterystyka wyrażona jest zależnością:

$$S(W_{01}) = C_1 W_{01} + C_3 (W_{01})^3 \quad (1)$$

gdzie:  $W_{01}$  – przemieszczenie końca kolumny podpartego sprężyną,  $C_1$ ,  $C_3$  – odpowiednio liniowy i nieliniowy człon sztywności sprężyny podpierającej kolumnę.

W zależności od wartości  $C_3$  otrzymuje się usztywnienie ( $C_3 > 0$ ) lub osłabienie ( $C_3 < 0$ ) charakterystyki sprężyny. Inaczej mówiąc, jeżeli ujemna jest wartość  $C_3$  – sprężyna miękka, a jeżeli dodatnia jest wartość  $C_3$  – sprężyna twarda (por. [10, 12, 15]).

W niniejszej pracy rozważa się układ oznaczony na rysunku 1 pogrubionym prostokątem.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

W pracy przedstawia się wpływ parametrów fizycznych i geometrycznych na stateczność oraz drgania swobodne kolumny poddanej czynnemu i biernemu obciążeniu swoistemu – siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego. Rozważane obciążenie realizowane jest poprzez strukturę obciążającą jako obciążenie czynne oraz poprzez strukturę podporową jako obciążenie bierno. Dodatkowo układ podparto na końcu poddanym obciążeniu czynnemu sprężyną o charakterystyce nieliniowej ze wstępnym jej odkształceniem. Rozważany układ przedstawiono na Rys. 2. Obciążenie czynne realizowano poprzez odpowiednio skonstruowaną głowicę obciążającą wykonaną z elementów liniowych, a obciążenie bierno wywołano poprzez głowicę obciążającą wykonaną z elementów kołowych. Charakterystykę sprężyny podpierającej przedstawiono w punkcie 1 niniejszej pracy (zależność (1)).

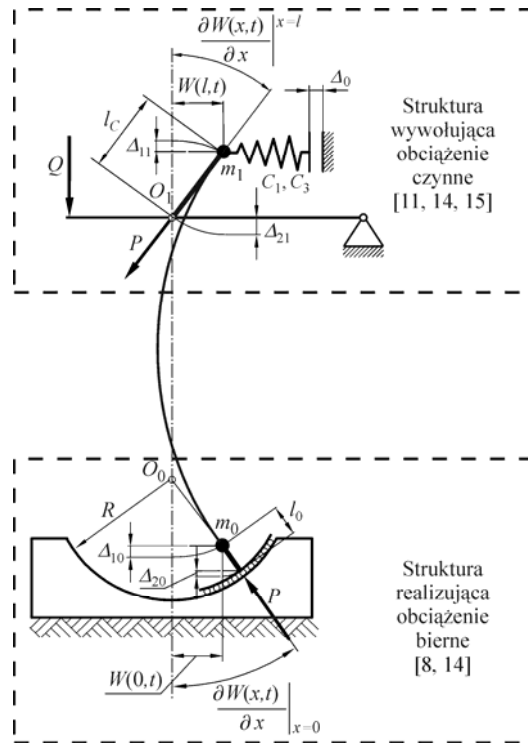
Rozważana kolumna o długości  $l$  charakteryzuje się sztywnością na ściskanie  $EA$  i zginanie  $EJ$  oraz o masie przypadającej na jednostkę długości  $\rho A$ . Na końcach kolumny znajdują się ciała o masach skupionych odpowiednio  $m_0$  (przy  $x = 0$ ) oraz  $m_1$  (przy  $x = l$ ). Wartości  $m_0$  i  $m_1$  odzwierciedlają masy struktur wywołujących rozważane w pracy obciążenie.

W przypadku rozpatrywanych obciążeń swoistych siłą śledzącą skierowaną do bieguna kierunki sił obciążających układ przechodzą przez stałe punkty, które znajdują się na nieodkształconej osi kolumny (odpowiednio punkt  $O_0$  w przypadku obciążenia biernego i punkt  $O_1$  w przypadku obciążenia czynnego).

Zagadnienie stateczności i drgań swobodnych rozważanej kolumny formułuje się na podstawie zasady Hamiltona, która w przypadku układów konserwatywnych jest następująca [1]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad (2)$$

gdzie:  $T$  – energia kinetyczna,  $V$  – energia potencjalna,  $t$  – czas.



Rysunek 2: Schemat układu

Energię układu przedstawionego na Rys. 1 zdefiniowano następująco:

– energia kinetyczna:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l (\rho A) \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{1}{2} m_0 \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=0} \right]^2 + \frac{1}{2} m_1 \left[ \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \Big|_{x=l} \right]^2 \quad (3)$$

– energia potencjalna:

$$V = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx - P \Delta_1 + P \Delta_{21} - P \Delta_{20} + \frac{1}{2} C_1 (W(l,t) - \Delta_0)^2 - \frac{1}{2} P \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \left( W(0,t) - l_0 \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) + \frac{1}{4} C_3 (W(l,t) - \Delta_0)^4 \quad (4)$$

gdzie:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + \Delta_{11} = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx, \quad \Delta_{20} = \frac{1}{2} l_0 \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 \quad (5a,b)$$



$$\Delta_{21} = \frac{1}{2} l_c \left( \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} \right)^2, \quad (5c)$$

natomiast  $\Delta_0$  – wstępne wychylenie sprężyny podpierającej kolumnę,  $l_0$  – długość sztywnego elementu w przypadku obciążenia biernego,  $l_c$  – długość sztywnego elementu w przypadku obciążenia czynnego.

Podstawiając wzory określające energie ((3) oraz (4)) do zasady Hamiltona (2) oraz wykorzystując geometryczne warunki brzegowe w postaci:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{W(0,t)}{(R-l_0)}; \quad \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{W(l,t)}{l_c} \quad (6a,b)$$

otrzymuje się różniczkowe równanie ruchu układu:

$$EJ \frac{\partial^4 W(x,t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

oraz naturalne warunki brzegowe:

$$EJ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} + EJ \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} (R-l_0) + m_0 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=0} (R-l_0) = 0 \quad (8)$$

$$EJ \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} - EJ \frac{\partial^3 W(x,t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} l_c + C_1 (W(l,t) - \Delta_0) l_c + \quad (9)$$

$$C_3 (W(l,t) - \Delta_0)^3 l_c + m_1 \frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=l} l_c = 0$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad w(\xi, \tau) = \frac{W(x,t)}{l}, \quad \Delta_0^* = \frac{\Delta_0}{l}, \quad k^2 = \frac{Pl^2}{EJ} \quad (10a-d)$$

$$c_1 = \frac{C_1 l^3}{EJ}, \quad c_3 = \frac{C_3 l^5}{EJ}, \quad \tau = \omega t, \quad \Omega^2 = \frac{\rho A \omega^2 l^4}{EJ} \quad (10e-h)$$

równanie ruchu oraz warunki brzegowe modyfikuje się do następującej postaci:

$$\frac{\partial^4 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^4} + k^2 \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \Omega^2 \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (11)$$

$$w(0, \tau) = -(R-l_0) \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}, \quad w(1, \tau) = l_c \frac{\partial w(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \quad (12a,b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} l + \left. \frac{\partial^3 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0} (R - l_0) + m_0 \frac{\Omega^2}{\rho A l} \left. \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\xi=0} (R - l_0) = 0 \quad (12c)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} l - \left. \frac{\partial^3 w(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=1} l_C + \left[ c_1 (w(1, \tau) - \Delta_0^*) + c_3 (w(1, \tau) - \Delta_0^*)^3 \right] l_C + \\ + m_1 \frac{\Omega^2}{\rho A l} \left. \frac{\partial^2 w(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\xi=0} l_C = 0 \quad (12d)$$

gdzie  $\omega$  jest częstotliwością drgań swobodnych.

### 2.1. Metoda małego parametru

W celu ostatecznego sformułowania zagadnienia brzegowego stosuje się ze względu na występującą nieliniowość (nieliniowość występuje w warunku brzegowym (12d)) metodę małego parametru (por. [4, 9]). Metoda małego parametru polega na rozwijaniu wielkości nieliniowych  $w(\xi, \tau)$  oraz  $\Omega^2$  w szeregi potęgowe małego parametru  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) w sposób następujący:

$$w(\xi, \tau) = w_0(\xi) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j w_j(\xi, \tau) + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (13)$$

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \Omega_j^2 + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \text{ przy czym } \omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \omega_j^2 + O(\varepsilon^{2(N+1)}) \quad (14a,b)$$

gdzie:

$$w_1(\xi, \tau) = w_1^{(1)}(\xi) \cos \tau, \quad w_2(\xi, \tau) = w_2^{(1)}(\xi) \cos \tau + w_2^{(2)}(\xi) \cos 2\tau \quad (15b)$$

Podstawiając rozwinięcia w szereg małego parametru (13) i (14) do równania różniczkowego ruchu (11) oraz grupując wyrazy przy jednakowych potęgach małego parametru otrzymuje się nieskończony ciąg równań ruchu:

$$\varepsilon^0: w_0^{IV}(\xi) + k^2 w_0^{II}(\xi) = 0, \quad \varepsilon^1: w_1^{IV}(\xi, \tau) + k^2 w_1^{II}(\xi, \tau) + \Omega_0^2 \ddot{w}_1(\xi, \tau) = 0 \quad (16, 17)$$

Rozwinięcia dane wzorami (13) i (14) podstawia się również do warunków brzegowych (12) oraz grupuje według jednakowych potęg małego parametru. W ten sposób otrzymano warunki brzegowe, które muszą być spełnione przez odpowiednie rozwiązania równań różniczkowych (16) i (17). W pracy podaje się równania różniczkowe oraz warunki brzegowe związane z małym parametrem w potędze zerowej i pierwszej:

$$\varepsilon^0: \quad w_0(0)l = -(R - l_0) \left. \frac{dw_0(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0}, \quad w_0(1)l = l_C \left. \frac{dw_0(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1} \quad (18a,b)$$

$$\left. \frac{d^2 w_0(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=0} l + \left. \frac{d^3 w_0(\xi)}{d\xi^3} \right|_{\xi=0} (R - l_0) = 0 \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2 w_0(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} l - \left. \frac{d^3 w_0(\xi)}{d\xi^3} \right|_{\xi=1} l_C + c_1 [w_0(1) - \Delta_0^*] l_C + \\ & + c_3 \left[ (w_0(1))^3 - 3(w_0(1))^2 \Delta_0^* + 3w_0(1) (\Delta_0^*)^2 - (\Delta_0^*)^3 \right] l_C = 0 \end{aligned} \quad (18d)$$

$$\varepsilon^1: \quad w_1(0, \tau) = - (R - l_0) \left. \frac{\partial w_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}, \quad w_1(1, \tau) = l_C \left. \frac{\partial w_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} \quad (19a, b)$$

$$\left. \frac{\partial^2 w_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} l + \left. \frac{\partial^3 w_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0} (R - l_0) + m_0 \frac{\Omega_0^2}{\rho A l} \left. \frac{\partial^2 w_1(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\xi=0} (R - l_0) = 0 \quad (19c)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^2 w_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=1} l - \left. \frac{\partial^3 w_1(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=1} l_C + c_1 w_1(1, \tau) l_C + m_1 \frac{\Omega_0^2}{\rho A l} \left. \frac{\partial^2 w_1(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} \right|_{\xi=1} l_C + \\ & + c_3 \left[ 3(w_0(1))^2 w_1(1, \tau) - 6w_0(1) w_1(1, \tau) \Delta_0^* + 3w_1(1, \tau) (\Delta_0^*)^2 \right] l_C = 0 \end{aligned} \quad (19d)$$

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI (RÓWNANIA PRZY MAŁYM PARAMETRZE W POTĘDZE ZEROWEJ)

Rozwiązanie zagadnienia statycznego opisanego równaniem (16) przedstawia się w postaci:

$$w_0(\xi) = A_s \sin(k\xi) + B_s \cos(k\xi) + C_s \xi + D_s \quad (20)$$

Następnie wykorzystując warunki brzegowe dane wzorami (18) otrzymano równanie:

$$N = l_C \left( -c_1 (-\Delta_0^* + F_1 w_{01}) - c_3 (-\Delta_0^* + F_1 w_{01})^3 \right) + w_{01} F_2 = 0 \quad (21)$$

gdzie:

$$w_{01} = w_0(1), \quad G_A = -l^2(l + l_0 - l_C - R), \quad G_B = -kl(l_0 - R)(l + l_0 - l_C - R) \quad (22a-c)$$

$$G_C = l(kl(l_0 - l_C - R)\cos k + (l^2 + k^2 l_C(l_0 - R))\sin k) \quad (22d)$$

$$G_D = (l_0 - R)(kl(l_0 - l_C - R)\cos k + (l^2 + k^2 l_C(l_0 - R))\sin k) \quad (22e)$$

$$G = l_C \left( -kl^2 \cos k + (l^2 + k^2 l(l_0 - R) + k^2 (l_0 - R)^2) \sin k \right) \quad (22f)$$

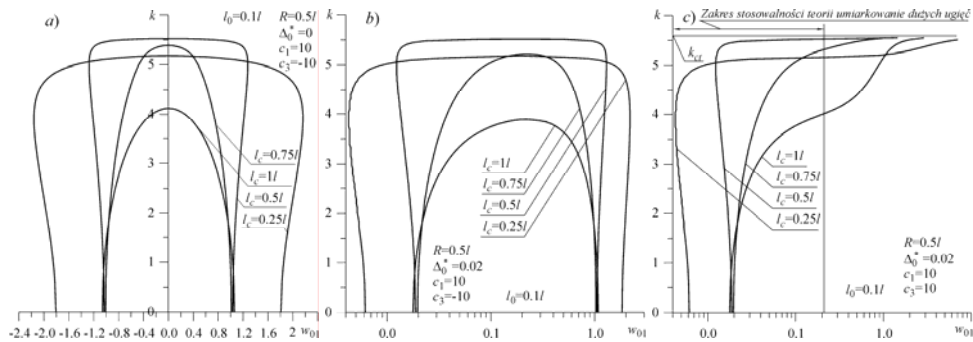
$$F_1 = \frac{G_C}{G} + \frac{G_D}{G} + \frac{G_B}{G} \cos k + \frac{G_A}{G} \sin k \quad (22g)$$

$$F_2 = l \left( \frac{G_B k^2 \cos k + G_A k^2 \sin k}{G} \right) + l_C \left( \frac{-G_A k^3 \cos k + G_B k^3 \sin k}{G} \right) \quad (22h)$$

Na podstawie równania (21) wyznacza się przemieszczenie końca układu  $w_{01}$  w zależności od parametru obciążenia  $k$  (Rys. 3). Wykresy na rysunku 3 wykonano przy miękkiej (Rys. 3a, b) oraz twardej (Rys. 3c) charakterystyce sprężyny podpierającej. W przypadku miękkiej charakterystyki sprężyny ( $c_3 < 0$ ) zależności  $k(w_{01})$  odznaczają się występowaniem maksimum, które odpowiada sile krytycznej. Przy twardej charakterystyce sprężyny podpierającej maksimum nie istnieje jednak relacje między obciążeniem a wychyleniem końca są znane. W takim przypadku wychylenie  $w_{01}$  dąży asymptotycznie do nieskończoności przy obciążeniu  $k_{cr}$ .

Warunkiem na to by wystąpiła siła wyboczeniowa przy miękkiej charakterystyce sprężyny podpierającej ( $c_3 < 0$ ) jest:

$$\frac{dk}{dw_{01}} = - \frac{\frac{\partial N}{\partial w_{01}}}{\frac{\partial N}{\partial k}} = 0 \quad (23)$$



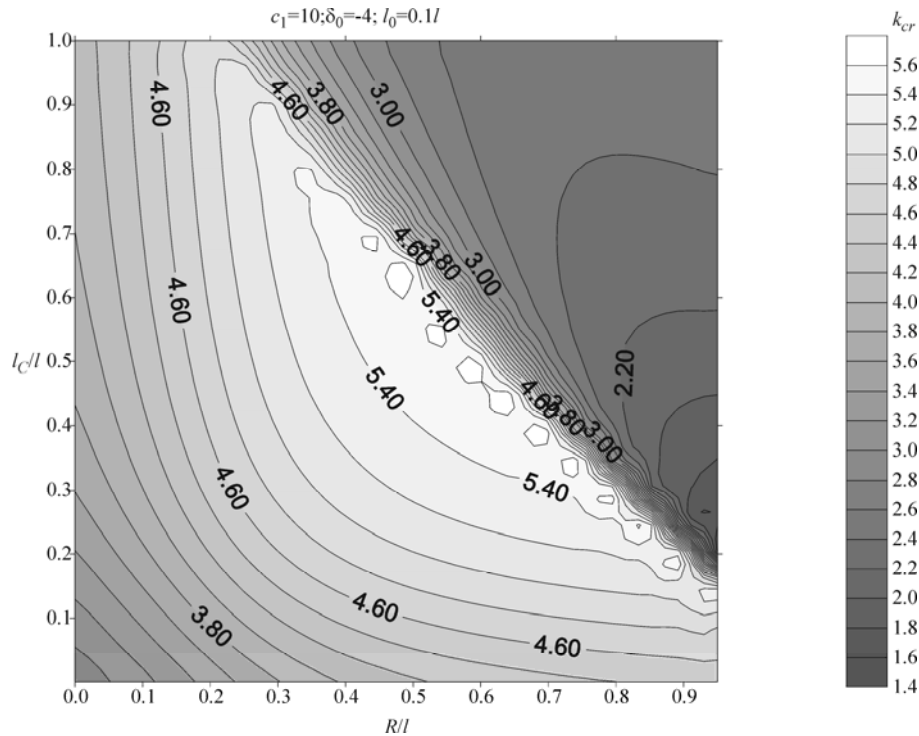
Rysunek 3: Wychylenie końca kolumny  $w_{01}$  w zależności od parametru obciążenia  $k$

Na podstawie równań (21) oraz (23) zapisuje się ostatecznie zależność za pomocą, której wyznacza się ekstrema lokalne funkcji  $k(w_{01})$ , gdy  $c_3 < 0$ :

$$c_1 l_C + 3\delta_0 l_C \left( \frac{\frac{1}{2} \frac{F_2}{F_1} + c_1 l_C}{\frac{F_2}{F_1} - c_1 l_C} + 1 \right)^2 - \frac{F_2}{F_1} = 0 \quad (24)$$

gdzie:  $\delta_0$  – jest parametrem wiążącym nieliniowy współczynnik charakterystyki sprężyny podpierającej z wstępnym jej wychyleniem:

$$\delta_0 = c_3 (A_0^*)^2 \quad (25)$$



Rysunek 4: Krytyczny parametr obciążenia  $k_{cr}$  w funkcji promienia  $R$  i długości  $l_C$

Na Rys. 4 przedstawiono krytyczny parametr obciążenia  $k_{cr}$  w funkcji promienia  $R$  oraz długości  $l_C$  przy  $c_1 = 10$ ,  $\delta_0 = -2$ ,  $l_0 = 0.1l$ .

#### 4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DRGAŃ SWOBODNYCH (RÓWNANIA PRZY MAŁYM PARAMETRZE W POTĘDZE PIERWSZEJ)

Rozpatrując zagadnienie drgań swobodnych uwzględnia się równanie (17) występujące przy  $\varepsilon^1$ . Po rozdzieleniu zmiennych za pomocą wzoru (15a) równanie to zapisano jako:

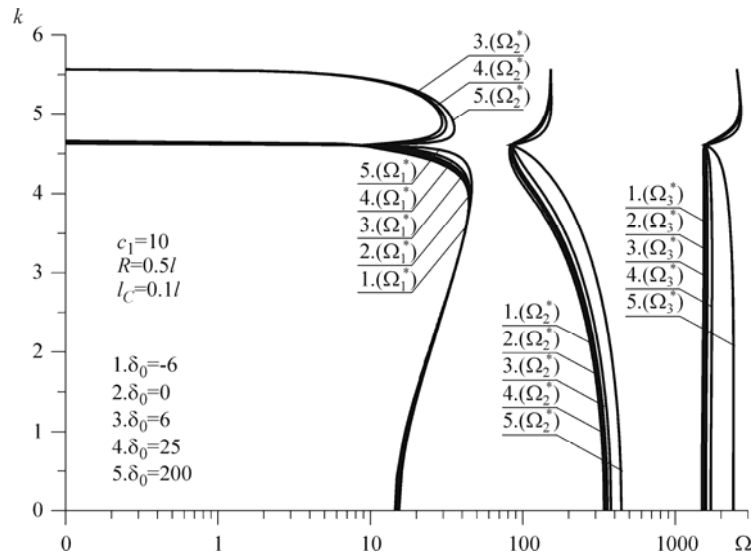
$$\cos \tau : w_1^{(IV)}(\xi) + k^2 w_1^{(II)}(\xi) - \Omega_0^2 w_1^{(I)}(\xi) = 0 \quad (26)$$

Rozwiązanie problemu drgań własnych (26) można przedstawić w następujący sposób:

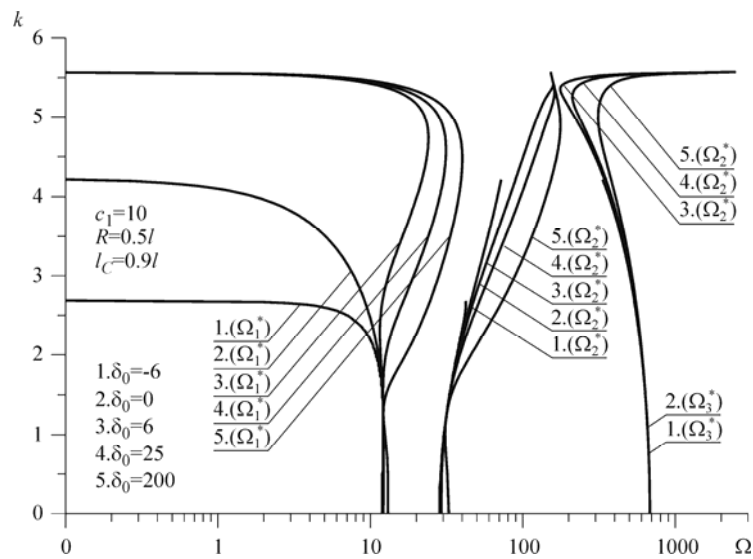
$$w_1^{(I)}(\xi) = A_d \cosh(\alpha \xi) + B_d \sinh(\alpha \xi) + C_d \cos(\beta \xi) + D_d \sin(\beta \xi) \quad (27)$$

gdzie:

$$\alpha = \sqrt{-\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \Omega_0^2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k^2}{2} + \sqrt{\frac{k^4}{4} + \Omega_0^2}} \quad (28a,b)$$



Rysunek 5: Parametr częstotliwości drgań własnych  $\Omega$  w zależności od parametru siły obciążającej  $k$  przy  $c_1 = 10$ ,  $R = 0.5l$ ,  $l_C = 0.1l$ , oraz przy różnych parametrach  $\delta_0$



Rysunek 6: Parametr częstotliwości drgań własnych  $\Omega$  w zależności od parametru siły obciążającej  $k$  przy  $c_1 = 10$ ,  $R = 0.5l$ ,  $l_C = 0.9l$ , oraz przy różnych parametrach  $\delta_0$

Podstawia się rozwiązanie (27) do warunków brzegowych (po rozdzieleniu zmiennych), które odpowiadają małemu parametrowi w pierwszej potędze (19), otrzymując układ równań w postaci:

$$\left[ a_{ij} \right] \text{col} \{A_d, B_d, C_d, D_d\} = 0, i, j = 1, 2, 3, 4 \quad (29)$$

Przyrównując wyznacznik macierzy współczynników do zera

$$|a_{ij}| = 0 \quad (30)$$

otrzymano równanie przestępne, z którego wyznacza się podstawową składową częstości drgań własnych  $\omega_0$ .

Na rysunkach 5 i 6 pokazano krzywe charakterystyczne na płaszczyźnie parametr obciążenia ( $k$ ) – parametr częstości drgań własnych ( $\Omega$ ).

## 5. PODSUMOWANIE

W niniejszej pracy przedstawiono sformułowanie zagadnienia brzegowego na podstawie zasady Hamiltona oraz metody małego parametru kolumny poddanej działaniu czynnego i biernego obciążenia swoistego siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego. Przedstawiono również rozwiązanie problemu stateczności i drgań własnych a także przykładowe wyniki badań numerycznych. W przypadku stateczności wyznaczono wartość obciążenia krytycznego stosując miękką charakterystykę sprężyny podpierającej kolumnę przy różnych parametrach związanych z głowicami obciążającymi. Na podstawie wykonanych wykresów można tak dobrać parametry geometryczne głowic realizujących obciążenie bierne i czynne, aby uzyskać największą wartość obciążenia krytycznego. W przypadku zagadnienia drgań własnych wyznaczono krzywe charakterystyczne na płaszczyźnie obciążenie – częstość drgań własnych przy różnych parametrach fizycznych i geometrycznych określających rozważany układ.

*Praca wykonana w ramach prac BW-1-101-207/03/P oraz BS-1-101-302-99/P Politechniki Częstochowskiej.*

## LITERATURA

- [1] Goldstein H.: *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge, Mass, 1950, 38–40.
- [2] Kounadis A.N.: The existence of regions of divergence instability for nonconservative systems under follower forces, *Int. Journal Solids Structures* 19(8), 1983, 725-733.
- [3] Leipholz H.H.E: Aspects of Dynamic Stability of Structures, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, April 1975, EM2, 109-124.
- [4] Nayfeh A., *Perturbation Methods*, John Wille, New York 1973.
- [5] Sato K.: Instability of a Clamped-Elastically Restrained Timoshenko Column Carrying a Tip Load, Subjected to a Follower Force, *Journal of Sound and Vibration* 194(4), 1996, 623–630.

- [6] Sundararajan C.: Influence of an elastic end support on the vibration and stability of Beck's column, *Int. J. Mech. Sci.* 18, 1976, 239-241.
- [7] Tomski L., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J., Free Vibration of a Column Loaded by a Force and Bending Moment, XVI Symposium „Vibrations in Physical Systems”, Poznań - Błażejewko, May 26-28, 1994, 317-319.
- [8] Tomski L., Kasprzycki A., Szmidla J.: Wybrane rozwiązania konstrukcyjne głowic urzeczywistniających potencjalne obciążenie czynne i bierne, XXII Sympozjon Podstaw Konstrukcji Maszyn, Gdynia-Jurata, 2005, 353-358.
- [9] Tomski L., Kukła S.: Free vibration of a certain geometrically non-uniform system with initial imperfection, *AIAA Journal*, 1990, Vol. 28, No. 7, 1240-1245.
- [10] Tomski L., Kukła S., Posiadała B., Przybylski J., Sochacki W.: Divergence and Flutter Instability of the Column Supported by a Nonlinear Spring and Loaded by a Partially Follower Force, Akademiai Kiado, Publishing House of Hungarian Academy of Science, Budapest, 1990, 1227-1234.
- [11] Tomski L., Podgórska-Brzdękiewicz I.: Drgania swobodne i stateczność kolumn poddanych obciążeniu swoistemu – podatne węzły konstrukcyjne układu wywołującego i przejmującego obciążenie, rozdział 4, Drgania i stateczność układów smukłych, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, WNT, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa 2004, 134-187.
- [12] Tomski L., Przybylski J., Uzny S.: Drgania swobodne i stateczność smukłych układów hybrydowych, rozdział 8, Drgania i stateczność układów smukłych, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. TOMSKIEGO, WNT, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa 2004, 244-260.
- [13] Tomski L., Przybylski J.: Postbuckling Behavior of the Clamped-Elastically Supported Planar Structure under Follower Force, *AIAA Journal*, 25(4), 1987, 605-610.
- [14] Tomski L., Szmidla J., Gołębiowska-Rozanow M.: Drgania i stateczność kolumny obciążonej siłą śledzącą skierowaną do bieguna przy zamocowaniu swoistym, XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 11-15.09.2006, 447-454.
- [15] Tomski L., Uzny S.: Wpływ oddziaływania nieliniowej sprężyny na drgania własne i stateczność wspornikowej kolumny poddanej obciążeniu swoistemu, rozdział 7, Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jako układów liniowych lub nieliniowych, Praca zbiorowa wykonana pod kierunkiem naukowym i redakcją L. Tomskiego, WNT, Fundacja „Książka Naukowo-Techniczna”, Warszawa 2007, 219-250.



## **STATECZNOŚĆ I DRGANIA SWOBODNE SIŁOWNIKA HYDRAULICZNEGO SPREŻYŚCIE ZAMOCOWANEGO**

**Lech Tomski, Sebastian Uzny**

<sup>1</sup>Politechnika Częstochowska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn  
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa  
e-mail: uzny@imipkm.pcz.czyst.pl

---

**Abstract:** *Theoretical, numerical and experimental research concerning of stability and free vibrations of hydraulic cylinder is presented in the paper. Considered hydraulic cylinder was fixed elastically and subjected to Euler's load. The boundary problem was formulated on the basis of Hamilton's principle. Mathematical model was confirmed by experimental research.*

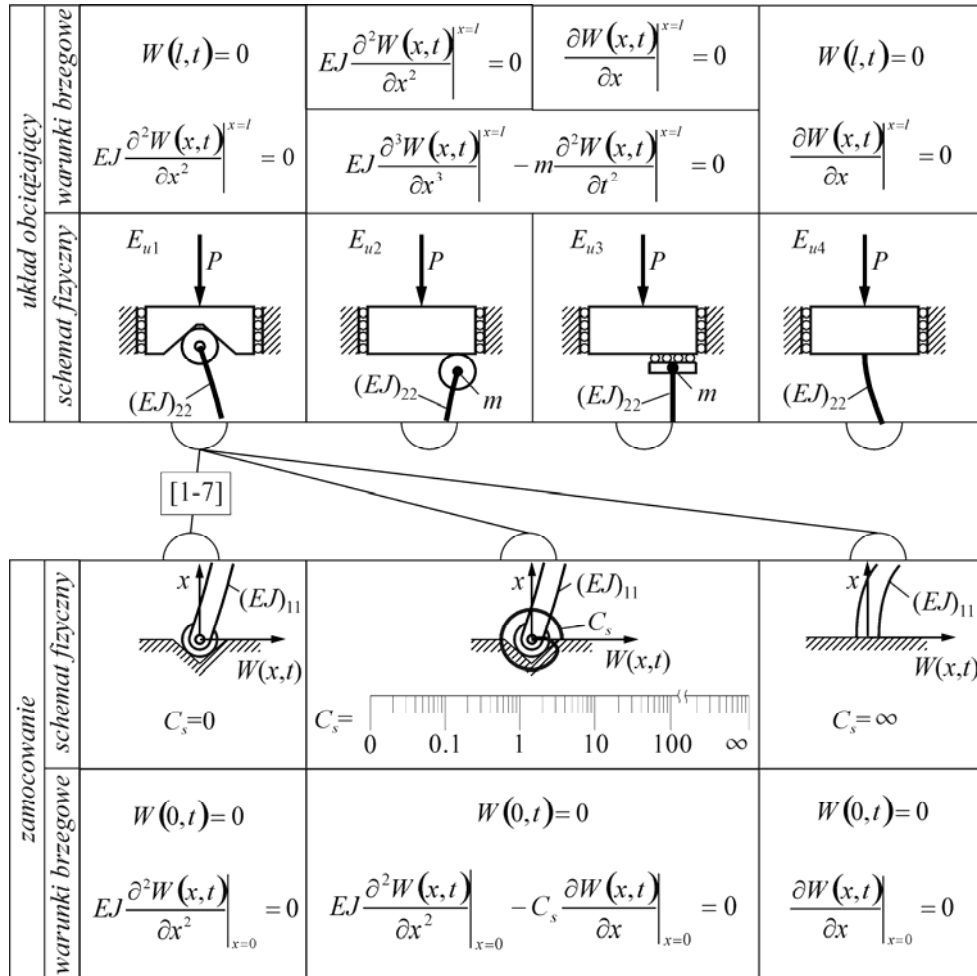
---

### **1. WPROWADZENIE**

W niniejszej pracy bierze się pod uwagę model siłownika hydraulicznego przedstawiony przez L. Tomskiego (por. [5]), który został zastosowany do opisanie swobodnych drgań poprzecznych i stateczności. Model ten zastosowano w powyższym zakresie w pracach [1, 6, 7] oraz w publikacjach [2-4] – zastosowano do badań parametrycznych drgań swobodnych i stateczności dynamicznej.

W pracach [1, 7] rozważano siłownik hydrauliczny jako układ geometrycznie nieliniowy, którego tłocznisko zbudowane jest z dwóch współosiowych rur połączonych ze sobą na końcach. Rura wewnętrzna tłoczniska wypełniona jest cieczą. W pracy [1] wyznaczono obciążenie krytyczne siłownika przy różnych jego parametrach geometrycznych. Stojak hydrauliczny obudów wyrobisk ściennych jest tematem publikacji [5]. W modelu matematycznym stojaka uwzględniono współpracę stojaka ze spągnicą i osłoną odzawałową lub ze stropnicą, współdziałanie pomiędzy poszczególnymi elementami stojaka oraz oddziaływanie na niego ciekłego medium. W pracy tej przeanalizowano stateczność stojaka jako układu idealnego i nieidealnego. Publikacja [3] dotyczy drgań swobodnych oraz stateczności dynamicznej siłownika hydraulicznego, w którego modelu uwzględniono inercję podłużną tłoczniska a sformułowane zagadnienie brzegowe rozwiązano wykorzystując funkcje własne. Badania stateczności dynamicznej i drgań swobodnych siłownika hydraulicznego z uwzględnieniem właściwości charakteryzujących współpracę poszczególnych elementów siłownika oraz oddziaływanie cieczy w siłowniku rozważano w pracy [4]. Do sformułowania zagadnienia brzegowego zastosowano teorię nieliniową. Jako wyniki dotyczące zagadnienia drgań swobodnych przedstawiono zmiany częstości drgań układu w zależności od zmian siły obciążającej oraz geometrii układu. W przypadku zagadnienia stateczności dynamicznej wy-

znaczono obszary występowania rezonansów parametrycznych w zależności od warunków geometrycznych i obciążenia. W pracy [4] badano również wpływ sprężystości podparcia na stateczność dynamiczną rozważanego siłownika.

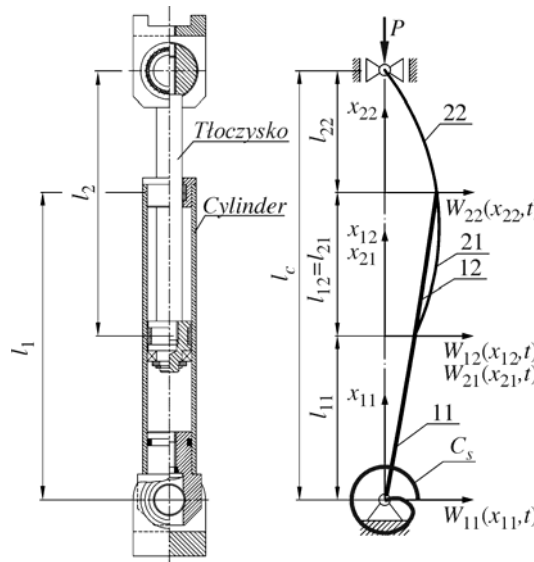


Rysunek 1: Diagram uwzględniający różne przypadki obciążenia Eulera oraz różne przypadki zamocowania

Na Rys. 1 uwzględniono cztery przypadki obciążenia Eulera oraz trzy sposoby zamocowania siłownika wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi. W niniejszej pracy rozważa się siłownik przegubowo zamocowany na obciążonym końcu oraz przegubowo, sprężysto oraz sztywno zamocowany na nieobciążonym końcu.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO SIŁOWNIKA HYDRAULICZNEGO

Model fizyczny rozważanego siłownika (por. [5]) przedstawiony został na Rys. 2. Składa się on z dwóch podstawowych elementów, a mianowicie z tłoczyska (o całkowitej długości  $l_2$  (wielkości dotyczące tłoczyska będą miały w dolnym indeksie pierwszą cyfrę 2)) i cylindra (o całkowitej długości  $l_1$  (wielkości dotyczące cylindra będą miały w dolnym indeksie pierwszą cyfrę 1)). W celu matematycznego opisu zagadnienia stateczności i drgań własnych w cylindrze jak i tłoczysku wyróżnia się po dwie długości oznaczane odpowiednio  $l_{11}$ ,  $l_{12}$  (w przypadku cylindra) oraz  $l_{21}$ ,  $l_{22}$  (w przypadku tłoczyska). Przy czym długości  $l_{12}$  i  $l_{21}$  są równe a ich wartość odzwierciedla stopień pokrycia siłownika.



Rysunek 2: Schemat fizyczny rozważanego siłownika hydraulicznego

Zagadnienie brzegowe prezentowanego siłownika formułuje się na podstawie zasady Hamiltona, która w przypadku układów konserwatywnych wyrażona jest następującą zależnością:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $T$  – energia kinetyczna,  $V$  – energia potencjalna.

Energia kinetyczna siłownika jest sumą energii kinetycznych poszczególnych elementów cylindra i tłoczyska:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\rho A)_{ij} \int_0^{l_{ij}} \left( \frac{\partial W_{ij}(x_{ij}, t)}{\partial t} \right)^2 dx_{ij} \quad i, j = 1, 2, \quad (2)$$

gdzie:  $(\rho A)_{ij}$ , – masa przypadająca na jednostkę długości poszczególnych członów cylindra i tłoczyska (przy czym  $(\rho A)_{11} = (\rho A)_{12}$  oraz  $(\rho A)_{21} = (\rho A)_{22}$ ).

Energia potencjalna siłownika jest sumą energii sprężystości poprzecznej poszczególnych członów tłoczyska i cylindra, energii sprężystości sprężyny rotacyjnej oraz energii potencjalnej siły obciążającej siłownik:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (EJ)_{ij} \int_0^{l_{ij}} \left( \frac{\partial^2 W_{ij}(x_{ij}, t)}{\partial x_{ij}^2} \right)^2 dx_{ij} + \frac{1}{2} C_s \left( \frac{\partial W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}} \Big|_{x_{11}=0} \right)^2 - \frac{1}{2} P \left( \int_0^{l_{11}} \left( \frac{\partial W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}} \right)^2 dx_{11} + \int_0^{l_{21}} \left( \frac{\partial W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}} \right)^2 dx_{21} + \int_0^{l_{22}} \left( \frac{\partial W_{22}(x_{22}, t)}{\partial x_{22}} \right)^2 dx_{22} \right) \quad (3)$$

gdzie:  $(EJ)_{ij}$  – sztywność na zginanie poszczególnych członów odpowiednio cylindra i tłoczyska (przy czym  $(EJ)_{11} = (EJ)_{12}$  oraz  $(EJ)_{21} = (EJ)_{22}$ ).

Geometryczne warunki brzegowe rozważanego siłownika są następujące:

$$W_{11}(0, t) = 0, \quad W_{22}(l_{22}, t) = 0, \quad \frac{\partial W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}} \Big|_{x_{11}=l_{11}} = \frac{\partial W_{12}(x_{12}, t)}{\partial x_{12}} \Big|_{x_{12}=0} \quad (4a-c)$$

$$\frac{\partial W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}} \Big|_{x_{21}=l_{21}} = \frac{\partial W_{22}(x_{22}, t)}{\partial x_{22}} \Big|_{x_{22}=0} \quad (4d)$$

$$W_{11}(l_{11}, t) = W_{12}(0, t) = W_{21}(0, t), \quad W_{12}(l_{12}, t) = W_{21}(l_{21}, t) = W_{22}(0, t) \quad (4e-h)$$

Uwzględniając warunki brzegowe (4) w zasadzie Hamiltona (1) otrzymuje się równania różniczkowe ruchu:

$$(EJ)_{ij} \frac{\partial^4 W_{ij}(x_{ij}, t)}{\partial x_{ij}^4} + P_{ij} \frac{\partial^2 W_{ij}(x_{ij}, t)}{\partial x_{ij}^2} + (\rho A)_{ij} \frac{\partial^2 W_{ij}(x_{ij}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5a,b)$$

oraz naturalne warunki brzegowe:

$$(EJ)_{11} \frac{\partial^2 W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}^2} \Big|_{x_{11}=0} - C_s \frac{\partial W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}} \Big|_{x_{11}=0} = 0, \quad (EJ)_{21} \frac{\partial^2 W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}^2} \Big|_{x_{21}=0} = 0 \quad (6a,b)$$

$$(EJ)_{12} \frac{\partial^2 W_{12}(x_{12}, t)}{\partial x_{12}^2} \Big|_{x_{12}=l_{12}} = 0, \quad (EJ)_{22} \frac{\partial^2 W_{22}(x_{22}, t)}{\partial x_{22}^2} \Big|_{x_{22}=l_{22}} = 0 \quad (6c,d)$$

$$-(EJ)_{11} \frac{\partial^2 W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}^2} \Big|_{x_{11}=l_{11}} + (EJ)_{12} \frac{\partial^2 W_{12}(x_{12}, t)}{\partial x_{12}^2} \Big|_{x_{12}=0} = 0 \quad (6e)$$

$$-(EJ)_{21} \frac{\partial^2 W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}^2} \Big|_{x_{21}=l_{21}} + (EJ)_{22} \frac{\partial^2 W_{22}(x_{22}, t)}{\partial x_{22}^2} \Big|_{x_{22}=0} = 0 \quad (6f)$$

$$(EJ)_{11} \frac{\partial^3 W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}^3} \Big|_{x_{11}=l_{11}} - (EJ)_{12} \frac{\partial^3 W_{12}(x_{12}, t)}{\partial x_{12}^3} \Big|_{x_{12}=0} - \quad (6g)$$

$$-(EJ)_{21} \frac{\partial^3 W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}^3} \Big|_{x_{21}=0} + P \frac{\partial W_{11}(x_{11}, t)}{\partial x_{11}} \Big|_{x_{11}=l_{11}} - P \frac{\partial W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}} \Big|_{x_{21}=0} = 0$$

$$(EJ)_{12} \frac{\partial^3 W_{12}(x_{12}, t)}{\partial x_{12}^3} \Big|_{x_{12}=l_{12}} + (EJ)_{21} \frac{\partial^3 W_{21}(x_{21}, t)}{\partial x_{21}^3} \Big|_{x_{21}=l_{21}} - \quad (6h)$$

$$-(EJ)_{22} \frac{\partial^3 W_{22}(x_{22}, t)}{\partial x_{22}^3} \Big|_{x_{22}=0} = 0$$

Wartości sił wewnętrznych w prętach modelujących cylinder i tłoczysko, które występują w równaniach ruchu (5), są następujące:  $P_{11} = P$ ,  $P_{12} = 0$ ,  $P_{21} = P$  oraz  $P_{22} = P$ . Uwzględniając w równaniach (5) rozdzielanie zmiennych względem współrzędnych przestrzennych  $x_{ij}$  oraz czasu  $t$  w postaci:

$$W_{ij}(x_{ij}, t) = y_{ij}(x_{ij}) \cos(\omega t), \quad (7)$$

gdzie:  $\omega$  jest częstością drgań własnych, otrzymuje się równania różniczkowe ruchu, które muszą być spełnione w każdej chwili czasu  $t$ :

$$(EJ)_{ij} y_{ij}^{IV}(x_{ij}) + P_{ij} y_{ij}''(x_{ij}) + (\rho A)_{ij} \omega^2 y_{ij}(x_{ij}) = 0. \quad (8)$$

Liczby rzymskie odpowiadają rzędowi pochodnych względem współrzędnych przestrzennych.

W warunkach brzegowych (4) i (6) również rozdziela się zmienne wykorzystując zależności (7).

Rozważany siłownik poddany obciążeniu eulerowskiemu jest układem konserwatywnym, dlatego obciążenie krytyczne wyznaczyć można na podstawie zasady minimum energii potencjalnej (statyczne kryterium stateczności):

$$\delta V = 0. \quad (9)$$

W przypadku rozważania zagadnienia statycznego funkcje określające przemieszczenie poprzeczne poszczególnych członów siłownika zależne są jedynie od odpowiednich współrzędnych przestrzennych  $x_{ij}$  ( $W_{ij}(x_{ij}, t) \equiv y_{ij}(x_{ij})$ ).

Uwzględniając energię potencjalną wyrażoną wzorem (3) w równaniu (9) otrzymuje się następujące równania różniczkowe równowagi statycznej ( $P_{11} = P, P_{12} = 0, P_{21} = P, P_{22} = P$ ):

$$(EJ)_{ij} y_{sij}^{IV}(x_{ij}) + P_{ij} y_{sij}''(x_{ij}) = 0 \quad (10)$$

Warunki brzegowe modyfikują się w taki sposób, że zamiast przemieszczenia kinetycznego  $W_{ij}(x_{ij}, t)$  stosuje się przemieszczenie statyczne  $y_{sij}(x_{ij})$ .

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA STATYKI

Rozwiązania równań różniczkowych (10) są następujące:

$$y_{s11}(x_{11}) = A_{s11} \sin(k_{11}x_{11}) + B_{s11} \cos(k_{11}x_{11}) + C_{s11}x_{11} + D_{s11} \quad (11a)$$

$$y_{s12}(x_{12}) = A_{s12}x_{12}^3 + B_{s12}x_{12}^2 + C_{s12}x_{12} + D_{s12} \quad (11b)$$

$$y_{s2i}(x_{2i}) = A_{s2i} \sin(k_{2i}x_{2i}) + B_{s2i} \cos(k_{2i}x_{2i}) + C_{s2i}x_{2i} + D_{s2i} \quad (11c,d)$$

gdzie: 
$$k_{11} = \sqrt{\frac{P}{(EJ)_{11}}}, k_{21} = \sqrt{\frac{P}{(EJ)_{21}}}, k_{22} = \sqrt{\frac{P}{(EJ)_{22}}} \quad (12a-c)$$

Wielkości  $A_{sij}, B_{sij}, C_{sij}, D_{sij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) są stałymi całkowania.

Podstawiając rozwiązania (11) do warunków brzegowych związanych z przemieszczeniami statycznymi otrzymuje się układ równań:

$$[a_{kl}] \text{col}\{A_{sij}, B_{sij}, C_{sij}, D_{sij}\} = 0 \quad k, l = 1, 2, \dots, 16 \quad (13)$$

Wyznacznik macierzy współczynników tego układu przyrównany do zera to równanie przestępne, z którego wyznacza się siły krytyczne rozważanego siłownika:

$$|a_{kl}| = 0. \quad (14)$$

### 4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA DRGAŃ SWOBODNYCH

Rozwiązania równań różniczkowych (8) są następujące:

$$y_{ij}(x_{ij}) = A_{ij} \cosh(\alpha_{ij}x_{ij}) + B_{ij} \sinh(\alpha_{ij}x_{ij}) + C_{ij} \cos(\beta_{ij}x_{ij}) + D_{ij} \sin(\beta_{ij}x_{ij}) \quad (15)$$

gdzie: 
$$\alpha_{11} = \sqrt{-\frac{k_{11}^2}{2} + \sqrt{\frac{k_{11}^2}{4} + \Omega_{11}^2}}, \beta_{11} = \sqrt{\frac{k_{11}^2}{2} + \sqrt{\frac{k_{11}^2}{4} + \Omega_{11}^2}}, \alpha_{12} = \beta_{12} = \sqrt[4]{\Omega_{12}^2} \quad (16a-d)$$

$$\alpha_{2i} = \sqrt{-\frac{k_{2i}^2}{2} + \sqrt{\frac{k_{2i}^2}{4} + \Omega_{2i}^2}}, \beta_{2i} = \sqrt{\frac{k_{2i}^2}{2} + \sqrt{\frac{k_{2i}^2}{4} + \Omega_{2i}^2}} \quad (16e-h)$$

$$\Omega_{ij} = \sqrt{\frac{(\rho A)_{ij} \omega^2}{(EJ)_{ij}}} \quad (16i-l)$$

Podstawiając rozwiązania (15) do warunków brzegowych (4) i (6) po rozdzielaniu zmiennych otrzymano układ równań:

$$[b_{kl}] \text{col}\{A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, D_{ij}\} = 0 \quad (17)$$

Wyznacznik macierzy współczynników układu równań (17) przyrównany do zera to równanie przestępne na częstości drgań własnych:

$$|b_{kl}| = 0. \quad (18)$$

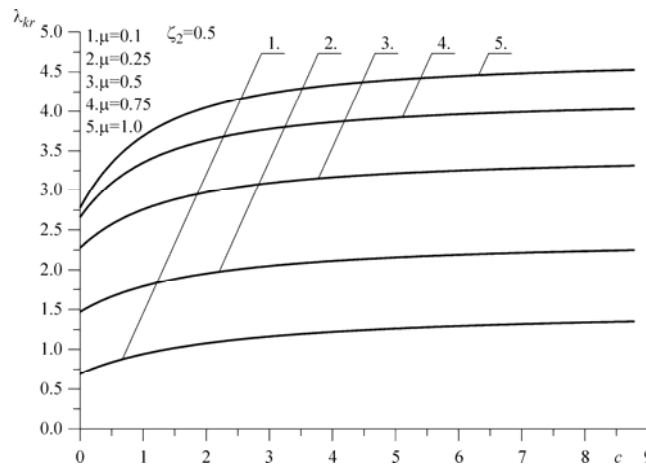
## 5. WYNIKI BADAŃ NUMERYCZNYCH – SIŁY KRYTYCZNE

W niniejszym punkcie pracy przedstawia się wyniki badań numerycznych odnośnie do sił krytycznych. Przy obliczaniu sił krytycznych uwzględniono stałą długość cylindra i tłoczyska ( $l_1 = l_2 = \text{const}$ ). Obliczenia wykonano przy różnych parametrach odpowiadających stopniowi pokrycia  $\zeta_2$  oraz przy różnych współczynnikach asymetrii sztywności na zginanie  $\mu$ . Wielkości  $\zeta_2$  oraz  $\mu$  zdefiniowano następująco:

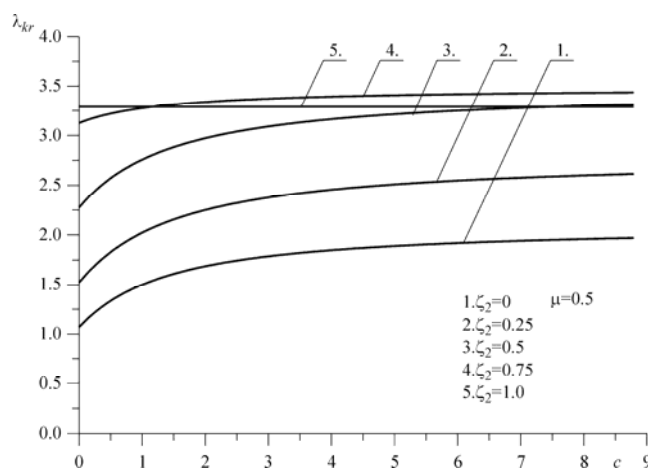
$$\zeta_2 = \frac{l_{12}}{l_1} = \frac{l_{21}}{l_2}, \quad \mu = \frac{(EJ)_{21}}{(EJ)_{11}} \quad (19a,b)$$

Obliczenia wykonano przy stałej łącznej sztywności na zginanie układu ( $(EJ)_{11} + (EJ)_{21} = \text{const}$ ). Prezentowane w niniejszym punkcie pracy obciążenie krytyczne oraz sztywność sprężyny rotacyjnej wyrażono odpowiednio za pomocą wielkości bezwymiarowych:

$$\lambda_{kr} = \frac{P_{kr} l_1^2}{(EJ)_{11} + (EJ)_{21}} = \frac{P_{kr} l_2^2}{(EJ)_{11} + (EJ)_{21}}, \quad c = \frac{C_s l_2}{(EJ)_{11} + (EJ)_{21}} \quad (20a,b)$$



Rysunek 3: Obciążenie krytyczne  $\lambda_{kr}$  w zależności od parametru sztywności sprężyny  $c$  przy różnych współczynnikach  $\mu$



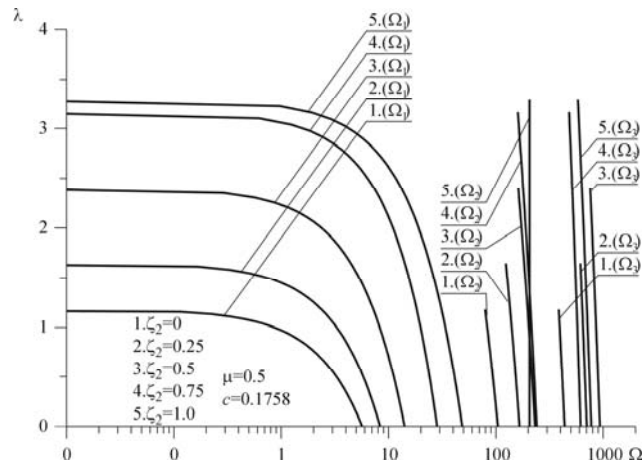
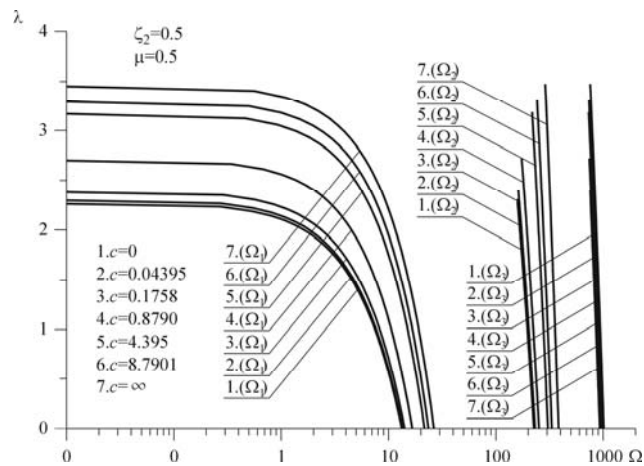
Rysunek 4: Obciążenie krytyczne  $\lambda_{kr}$  w zależności od parametru sztywności sprężyny  $c$  przy różnych współczynnikach  $\zeta_2$

Sprężyste zamocowanie większy wpływ na obciążenie krytyczne ma przy większych wartościach współczynnika asymetrii sztywności na zginanie (największy wzrost obciążenia krytycznego zauważalny jest przy współczynniku  $\mu = 1$ ) (Rys. 3). Z drugiej strony najbardziej dynamiczny wzrost rozważanego obciążenia występuje przy mniejszych wartościach sprężystości sprężyny zamocowania (parametr  $c$ ). W przypadku badania wpływu stopnia pokrycia (współczynnika  $\zeta_2$ ) na obciążenie krytyczne wywnioskowano, że nie zawsze rozważane obciążenie jest największe, gdy siłownik charakteryzuje się minimalnym poziomem cieczy (przy minimalnym poziomie cieczy siłownik odznacza się najmniejszą długością całkowitą). Wykazano, że obciążenie krytyczne siłownika o większej całkowitej długości może przenosić większe obciążenia przy zastosowaniu odpowiedniej sprężystości zamocowania (Rys. 4). Sprężystość zamocowania nie ma żadnego wpływu, gdy współczynnik pokrycia siłownika  $\zeta_2 = 1$ . W takim przypadku o obciążeniu krytycznym decyduje jedynie tłoczysko (cylinder jest całkowicie odciążony). Najmniej dynamiczny wzrost obciążenia krytycznego wraz ze wzrostem sztywności sprężyny  $c$  widoczny jest przy większych wartościach współczynnika  $\zeta_2$ .

## 6. WYNIKI BADAŃ NUMERYCZNYCH – DRGANIA SWOBODNE

Przedstawia się przykładowe wyniki dotyczące drgań własnych w postaci krzywych charakterystycznych na płaszczyźnie obciążenie – częstość drgań własnych.



Rysunek 5: Krzywe  $\lambda(\Omega)$  przy różnych współczynnikach  $\zeta_2$ Rysunek 6: Krzywe  $\lambda(\Omega)$  przy różnych współczynnikach sztywności sprężyny  $c$ 

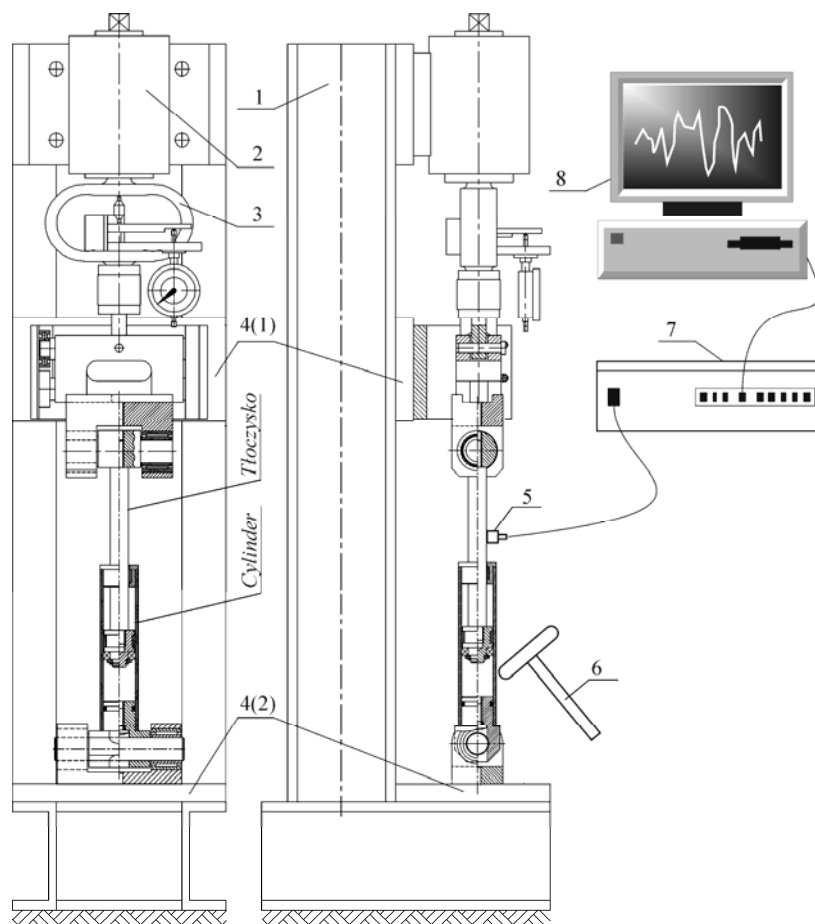
W tym przypadku stosuje się bezwymiarowe parametry obciążenia  $\lambda$  oraz częstości drgań swobodnych  $\Omega$ , które zapisuje się odpowiednio:

$$\lambda = \frac{Pl_1^2}{(EJ)_{11} + (EJ)_{21}} = \frac{Pl_2^2}{(EJ)_{11} + (EJ)_{21}}, \quad \Omega = \frac{\omega^2 l^4 [(\rho A)_{11} + (\rho A)_{21}]}{(EJ)_{11} + (EJ)_{21}} \quad (21a,b)$$

Częstość drgań własnych zwiększa się wraz ze wzrostem sztywności zamocowania (Rys. 5) oraz wraz ze wzrostem stopnia pokrycia  $\zeta_2$  (Rys. 6). Wyniki badań drgań własnych odnośnie do obciążenia krytycznego (kinetyczne kryterium stateczności) odpowiadają wynikom uzyskanym na podstawie statycznego kryterium stateczności.

## 7. BADANIA EKSPERYMENTALNE

W pracy prezentuje się wyniki badań eksperymentalnych, które potwierdzają poprawność przyjętego modelu matematycznego.



Rysunek 7: Stanowisko badawcze wraz z układem pomiarowym

Badania eksperymentalne wykonano na stanowisku badawczym, które zaprojektowano i wykonano w Instytucie Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Częstochowskiej. Stanowisko badawcze wraz ze schematem pomiarowym przedstawiono na Rys. 7.

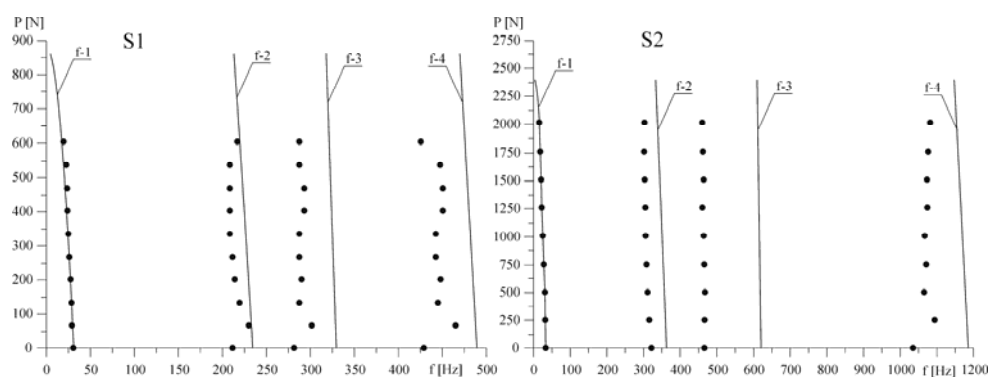
Stanowisko to składa się z ramy nośnej 1, do której zamontowano układ śrubowy 2 wywołujący poprzez dynamometr 3 siłę obciążającą układ. Odpowiednie warunki brzegowe rozważanego siłownika, składającego się z tłoczyśka i cylindra, uzyskuje się poprzez podpory mocowane do płyt 4(1) i 4(2). Rozważany układ pozwala badać siłowniki usytuowane pionowo.

Układ pomiarowy składa się akcelometru 5 (Brüel&Kjær – 4508 B), analizatora 7 (Brüel&Kjær – typ 3560C) oraz komputera 8, na którym zainstalowano oprogramowanie PULSE w wersji 7.0. Drgania siłownika hydraulicznego zamocowanego na stanowisku wzbudzano młotkiem 6 a następnie mierzono przyspieszenia poszczególnych punktów pomiarowych za pomocą czujnika 5. Sygnał z czujnika przekazywano do analizatora 7, gdzie został on odpowiednio przetworzony i wysłany do komputera. Wykorzystując specjalistyczne oprogramowanie (PULSE 7.0) odczytano częstotliwości drgań własnych.

Badania eksperymentalne (Rys. 8) wykonano w przypadku siłowników, których parametry geometryczne i fizyczne znajdują się w tablicy 1.

Tabela 1: Parametry geometryczne i fizyczne rozważanych siłowników

Siłownik (oznaczenie)	$(EJ)_C$ [Nm <sup>2</sup> ]	$(EJ)_T$ [Nm <sup>2</sup> ]	$(\rho A)_C$ [kg/m]	$(\rho A)_T$ [kg/m]	$l_{11}$ [m]	$l_{12} = l_{21}$ [m]	$l_{22}$ [m]	$\mu$ [ ]
S1	722.12	36.82	0.40	0.219	0.233	0.274	0.298	0.051
S2	4504.99	76.34	0.97	0.316	0.371	0.135	0.293	0.017



Rysunek 8: Wyniki badań numerycznych i eksperymentalnych siłownika S1, S2 przy  $c = 0$

Różnice między badaniami teoretycznymi a eksperymentalnymi spowodowane są następującymi czynnikami:

- nie uwzględnienie w modelu matematycznym oporów ruchu
- pewna niedokładność w wyznaczeniu modułu sprężystości podłużnej i gęstości materiału
- możliwość niedokładnego zamocowania akcelometru w płaszczyźnie drgań
- błąd w dokładnym określeniu siły obciążającej układ za pomocą dynamometru
- oddziaływanie stanowiska badawczego na badany układ
- nie uwzględnienie w modelu matematycznym oddziaływania pomiędzy cylindrem a tłokiem.

## 8. PODSUMOWANIE

W pracy rozważano układ smukły w postaci siłownika hydraulicznego, który poddano obciążeniu Eulera oraz zamocowano sprężysto. Zagadnienie brzegowe sformułowano na podstawie zasady Hamiltona (zagadnienie drgań swobodnych) oraz zasady minimum energii potencjalnej (zagadnienie stateczności). Przedstawiono rozwiązanie zagadnienia brzegowego oraz przykładowe wyniki badań numerycznych. Wyznaczono wartości obciążenia krytycznego w zależności od parametrów charakteryzujących rozważany siłownik, do których zalicza się sztywność zamocowania, współczynnik asymetrii sztywności na zginanie oraz stopień pokrycia siłownika. Badaniom numerycznym poddano również wpływ tych samych parametrów na relację pomiędzy obciążeniem a częstością drgań własnych.

W celu potwierdzenia poprawności przyjętego modelu matematycznego wykonano badania eksperymentalne.

*Praca wykonana w ramach pracy BS-1-101-302-99/P Politechniki Częstochowskiej oraz projektu badawczego KBN nr 4T07C04427.*

## LITERATURA

- [1] Przybylski J.: Drgania i stateczność dwuczłonowych układów prętowych wstępnie sprężonych przy obciążeniach niezachowawczych, Seria Monografie, Nr 92, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2002.
- [2] Sochacki W.: Drgania swobodne i parametryczne układu: wysięgnik teleskopowy – siłownik zmiany wysięgu, praca doktorska – promotor L. TOMSKI, Politechnika Częstochowska, Częstochowa, 1996.
- [3] Sochacki W., Tomski L.: Free Vibration and Dynamic Stability of a Hydraulic Cylinder Set. *Machine Dynamics Problems*, 1999, 23(4), 91-104.
- [4] Sochacki W., Tomski L.: Drgania swobodne i stateczność dynamiczna układu zmiany wysięgu żurawia samochodowego, rozdział 3, Modelowanie i badania zjawisk dynamicznych wysięgników teleskopowych i żurawi samojezdnych, Praca zbiorowa wykonana pod redakcją B. POSIADAŁY, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa 2000, 57-80.
- [5] Tomski L.: Elastic Carrying Capacity of a Hydraulic Prop, *Engineering Transactions*, 1977, 25(2), 27-263.
- [6] Tomski L.: Elastic Stability of Hydraulic Props of Longwall Supports, *Archives of Mining Science*, 1978, 23(3), 217-231.
- [7] Tomski L., Przybylski J., Posiadała B.: Static Instability of Eccentrically Loaded Hydraulic Cylinder with Piston Rod in the Form of Two Coaxial Tubes. *Akademiai Kiado, Publishing House of Hungarian Academy of Science*, Budapest, 1988, 1055-1062.

## WERYFIKACJA OBLICZENIOWA WZORÓW EMPIRYCZNYCH DLA OBLICZANIA PODSTAWOWYCH OKRESÓW DRGAŃ PEWNEGO TYPU BUDYNKÓW ŚCIANOWYCH

Jacek Wdowicki<sup>1</sup>, Antoni Filipowicz<sup>2</sup>, Elżbieta Wdowicka<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Politechnika Poznańska  
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań  
e-mail: jacek.wdowicki@put.poznan.pl

<sup>2</sup> FORBUD  
ul. 28 Czerwca 1956 r. 314 c, 61-469 Poznań  
e-mail: anth@o2.pl

---

**Abstract:** *The paper is concerned with the prediction of fundamental vibration periods of multistorey shear wall buildings. The determination of natural frequencies is the key issue in designing of tall buildings. The calculation of natural frequencies and mode shapes is the first step in evaluation of the dynamic response of the structure by the modal superposition technique. The values of natural frequencies are also required in the determination of equivalent static loadings due to wind actions.*

*The comparison of estimation of fundamental vibration period from the proposed in the literature formulae has been the main aim of the present paper. The empirical equations presented in the papers [1-4] have been considered.*

*Computations have been carried out by using the following specialised computer programs for shear wall structures: BW for Windows [5, 6] and ETABS [7].*

*The paper has provided the comparison of fundamental periods of shear wall dominant buildings constructed by using tunnel form techniques, the models of which were discussed in the papers [1, 2, 8].*

*For more than 15-storey high buildings the results of computations using the continuous model of shear wall structure agree well with finite element analysis results.*

---

### 1. WPROWADZENIE

W pracy zajęto się problemem szacowania okresów drgań własnych budynków wielokondygnacyjnych usztywnionych konstrukcjami ścianowymi z nadprożami, poddanych wymuszeniom sejsmicznym i parasejsmicznym. Ustalenie okresu drgań własnych jest kluczowym zagadnieniem w trakcie projektowania budynków wysokich. Wyznaczenie okresów i postaci drgań własnych jest pierwszym krokiem podczas określania dynamicznej odpowie-

dzi konstrukcji metodą superpozycji postaci drgań. Znajomość wartości okresu drgań własnych jest również wymagana przy określaniu zastępczych obciążeń statycznych od wiatru.

Do analiz wykorzystano 16 budynków, zaprojektowanych w technologii żelbetowej monolitycznej jako konstrukcje ścianowe, kształtowane z użyciem form przestawnych [1, 8]. Ocenie poddano wzory empiryczne, zaproponowane w pracach [1-4].

W pracy [9] wykazano, że równanie drgań własnych budynku opisanego przy wykorzystaniu modelu ciągłego jest równaniem różniczkowym Sturm – Liouville’a czwartego rzędu i zaproponowano metodę oszacowania podstawowego okresu drgań własnych budynku. Założono przy tym, że konstrukcja nie ulega skręcaniu.

Obliczenia porównawcze przeprowadzono przy wykorzystaniu specjalizowanych programów komputerowych przeznaczonych dla konstrukcji ścianowych: BW dla Windows [5, 10], w którym wykorzystano model ciągły budynku oraz ETABS [7], opartego na metodzie elementów skończonych.

## 2. BUDYNKI PODDANE ANALIZIE

W pracy poddano analizie budynki, które były badane podczas opracowywania empirycznego wzoru na podstawowy okres drgań własnych przez autorów prac [1, 2].

Są to żelbetowe, wielokondygnacyjne budowle ścianowe, kształtowane z użyciem form przestawnych. W budynkach tego typu nie występują belki ani słupy a w ich konstrukcji jako główne elementy przenoszące obciążenia wykorzystywane są całe ściany. W tej technologii budowlanej unika się stosowania elementów prefabrykowanych przenoszących obciążenia. Ściany i stropy, mające prawie tę samą grubość, są wykonywane w trakcie jednej operacji. Zmniejsza to nie tylko ilość połączeń ale także czas realizacji. W rezultacie, układanie betonu ścian i stropów dla każdej kondygnacji może być zakończone w ciągu jednego dnia. Jednoczesne wykonywanie ścian podłużnych, stropów i ścian poprzecznych daje monolityczną konstrukcję, która zapewnia wysoką odporność sejsmiczną i dzięki temu spełnia wymagania norm sejsmicznych wielu państw leżących w rejonach narażonych na trzęsienia ziemi.

Cała baza danych o analizowanych budynkach została podzielona na dwie części na podstawie stosunku wymiarów rzutów budynków. Jeżeli stosunek wymiarów dłuższego boku budynku do krótszego jest mniejszy niż 1,5, rzut ten zostaje zaliczony do grupy rzutów zbliżonych do kwadratu, a rzuty, dla których stosunek ten jest równy lub większy niż 1,5 są traktowane jako prostokątne.

Analizie poddano budynki o szesnastu różnych rzutach. Dla każdego rzutu wykonano obliczenia dla ośmiu wysokości budynku (2, 5, 10, 12, 15, 18, 20 i 25 kondygnacji).

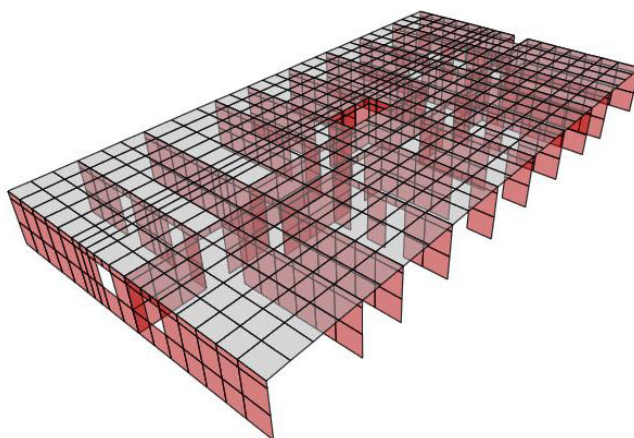
Przyjęto następujące grubości ścian: 12 cm dla budynków od 2 do 15 kondygnacji, 15 cm dla budynków o wysokości 18 kondygnacji oraz 20 cm dla budynków o wysokościach 20 i 25 kondygnacji. Grubość stropów wynosi 12 cm. Wysokość kondygnacji jest równa 2,80 m.

## 3. PRZYKŁADOWY BUDYNEK O RZUCIE ZBLIŻONYM DO PROSTOKĄTA (BUDYNEK NR 1)

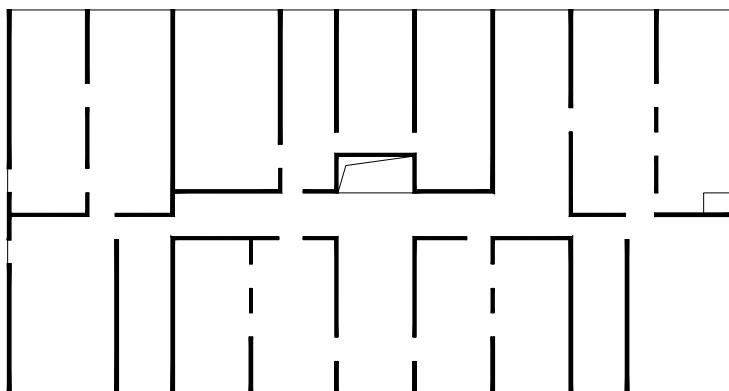
Budynek ma w rzucie następujące wymiary: długość 29,70 m, szerokość 15,70 m. Wysokość nadproży nad otworami drzwiowymi wynosi 0,34 m a nad otworami okiennymi 1,42 m.

Przyjęto następujące wartości stałych materiałowych: moduł Younga  $E = 36 \text{ GPa}$ , moduł sprężystości postaciowej  $G = 15,4 \text{ GPa}$ , ciężar objętościowy  $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ , masa objętościowa  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ .

Poniżej przedstawiono widok pojedynczej kondygnacji oraz dodatkowo rzut budynku nr 1. Na rysunku tym grube linie oznaczają występujące w rzucie ściany usztywniające.



Rysunek 1: Widok jednej kondygnacji budynku nr 1

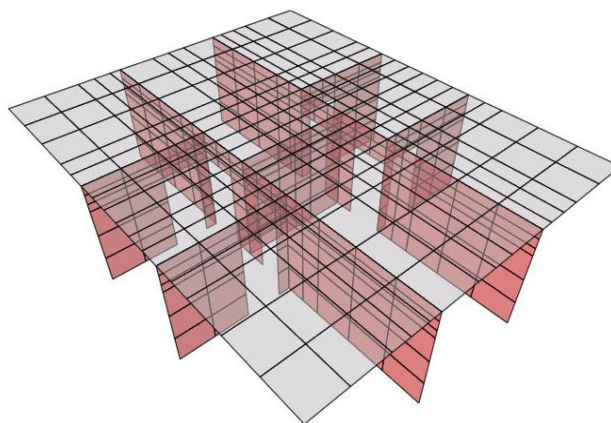


Rysunek 2: Rzut budynku nr 1

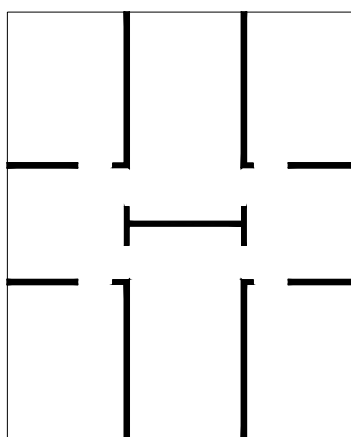
#### 4. PRZYKŁADOWY BUDYNEK O RZUCIE ZBLIŻONYM DO KWADRATU (BUDYNEK NR 11)

Budynek ma w rzucie następujące wymiary: długość 11,00 m, szerokość 9,00 m. Wysokość nadproży nad otworami drzwiowymi wynosi 0,70 m.

Stale materiałowe przyjęto jak dla budynku nr 1 (prostokątnego).



Rysunek 3: Widok jednej kondygnacji budynku nr 11



Rysunek 4: Rzut budynku nr 11

## 5. WZORY EMPIRYCZNE

Poniżej omówiono porównywane wzory empiryczne.

### 5.1. Wzór przedstawiony przez A. Kowalską w pracy [4]

W opracowaniu tym na podstawie analizy wyników pomiarów przeprowadzonych na 47 budynkach różniących się wysokością i konstrukcją (część z nich miała konstrukcję mурowaną, część były to budynki wielopłytowe, a część to szkieletowe budynki żelbetowe) wyznaczono zależności wiążące podstawowe charakterystyki dynamiczne z wysokością budynku oraz z zastosowanym rozwiązaniem materiałowo-konstrukcyjnym.



Dla budynków wielkopłytowych o wysokościach od 16,5 do 45,4 m otrzymano wzór na podstawowy okres drgań w postaci

$$T = \frac{H^{0,9174}}{55,629} \quad (1)$$

### 5.2. Wzór, który podał A. P. Jeary w pracy [3]

Autor opierając się na pracy [11] podaje następujący wzór na pierwszy okres drgań własnych budynków wysokich (włączając budynki o konstrukcji ścianowej)

$$T_1 = \frac{H}{46} = 0,02174 \cdot H \quad [s], \quad (2)$$

gdzie  $H$  jest wysokością budynku w metrach.

### 5.3. Wzory, które zaproponowali C. Balkaya i E. Kalkan w pracy [1]

W pracy [1] oceniono wzory, pochodzące z norm takich jak Uniform Building Code (1997) i Turkish Seismic Code (1998). Zaobserwowano, że podane w nich empiryczne wzory na podstawowy okres drgań własnych dają niewłaściwe wyniki dla konstrukcji ścianowych kształtowanych z użyciem form przestawnych. Z tego powodu przeanalizowano 16 budowli o różnych konfiguracjach i wysokościach od 2 do 15 kondygnacji, wykorzystując przestrzenne modelowanie metodą elementów skończonych, a następnie zaproponowano zestaw nowych wzorów empirycznych, wyprowadzonych przy wykorzystaniu metody analizy regresji. Równania te różnią się w zależności od kształtu rzutu budynku. Można zapisać je w postaci

$$T = Ch^{b_1} \beta^{b_2} \rho_{as}^{b_3} \rho_{al}^{b_4} \rho_{min}^{b_5} J^{b_6}, \quad (3)$$

gdzie:

$T$  - okres drgań [s]

$h$  - całkowita wysokość budynku [m],

$\beta$  - współczynnik określający stosunek długości dłuższego boku do krótszego,

$\rho_{as}$  - stosunek powierzchni ścian równoległych do krótszego boku do całkowitej powierzchni stropu,

$\rho_{al}$  - stosunek powierzchni ścian równoległych do dłuższego boku do całkowitej powierzchni stropu,

$\rho_{min}$  - stosunek minimalnej powierzchni ścian do całkowitej powierzchni stropu,

$J$  - biegunowy moment bezwładności rzutu.

Wartości liczbowe współczynników występujących we wzorze zebrano w Tabeli 1 [1].

Tabela 1: Wartości liczbowe współczynników występujących we wzorze (4.3)

Typ rzutu	$C$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
Kwadratowy	0,158	1,400	0,972	0,812	1,165	-0,719	0,130
Prostokątny	0,001	1,455	0,170	-0,485	-0,195	0,170	-0,094

#### 5.4. Wzór, który zaproponowali C. Balkaya i E. Kalkan w pracy [2]

W pracy tej autorzy kontynuowali badania nad szacowaniem okresu drgań budynków o konstrukcji ścianowej. Zaproponowano kolejny, prostszy wzór, który może być stosowany zarówno dla budynków o średniej jak i dużej wysokości (powyżej 15 kondygnacji). Wzór został opracowany na podstawie analizy 20 budynków o siedmiu wysokościach (tj. 5, 10, 12, 15, 18, 20 i 25 kondygnacji) przy wykorzystaniu metody elementów skończonych.

Otrzymane równanie dla oszacowania podstawowego okresu drgań własnych budynków kształtowanych przy użyciu form przestawnych ma następującą postać

$$T = C \cdot h \cdot \frac{\sqrt{R}}{\left(R_{length}^a + R_{width}^a\right)}, \quad (4)$$

gdzie:

$T$  jest okresem w s;

$h$  jest wysokością budynku w m;

$R$  jest stosunkiem wymiaru dłuższego boku budynku do krótszego;

$R_{length}$  jest stosunkiem powierzchni ścian usztywniających usytuowanych wzdłuż kierunku podłużnego do powierzchni typowej kondygnacji,

$R_{width}$  jest stosunkiem powierzchni ścian usztywniających wzdłuż kierunku poprzecznego do powierzchni typowej kondygnacji.

W równaniu tym  $C$  i  $a$  są parametrami oszacowania, otrzymanymi z analizy metodą regresji i równe są odpowiednio: 0,138 i -0,4.

## 6. WYNIKI ANALIZ

Poniżej zestawiono wyniki dla przykładowego budynku nr 1, o rzucie zbliżonym do prostokąta, opisanego w punkcie 3.

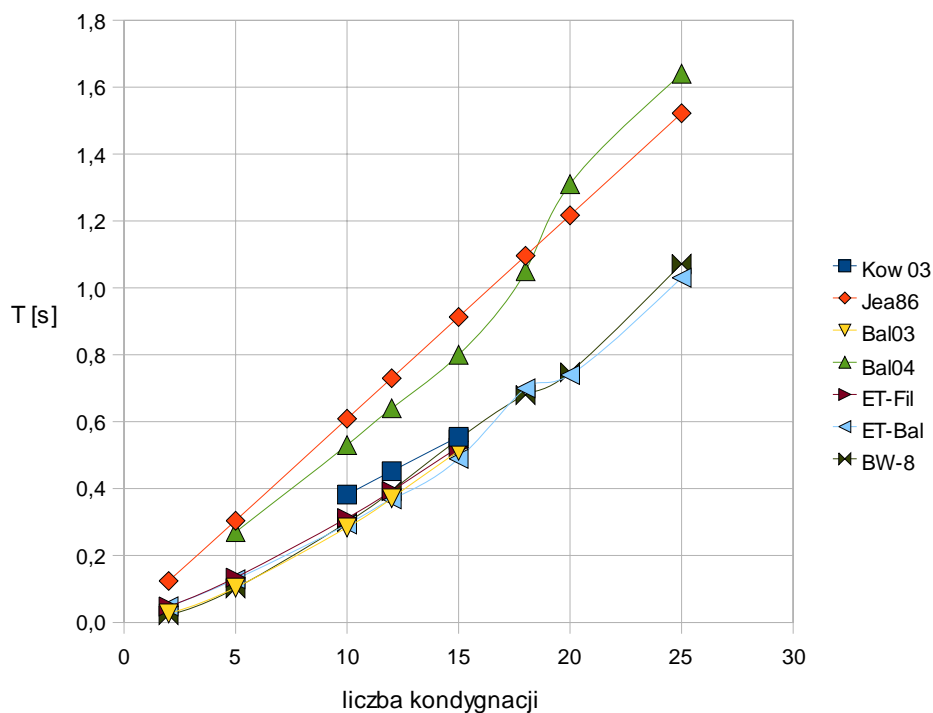
W tabeli 2 zestawiono wartości podstawowych okresów drgań własnych dla budynku nr 1 o wysokości odpowiednio 2, 5, 10, 12, 15, 18, 20 i 25 kondygnacji. Pierwsze cztery wiersze zawierają wartości obliczone na podstawie podanych wyżej wzorów empirycznych. W kolejnych dwóch wierszach podano wartości uzyskane przy użyciu programu ETABS przez A. Filipowicza (ET-Fil) oraz podane w pracach [1, 2] (ET-Bal). Ostatni wiersz zawiera wyniki otrzymane z obliczeń programem BW dla Windows, opracowanym na podstawie modelu ciągłego konstrukcji (BW-8).

Rysunek 5 przedstawia dla budynku nr 1 graficzną reprezentację wyników podanych w Tabeli 2, w postaci wykresów funkcji podstawowego okresu drgań w zależności od liczby kondygnacji budynku.

Dla analizowanego budynku nr 1 wzór zaproponowany dla budynków o wysokości do 15 kondygnacji w pracy [1] (Bal03) daje oszacowania podstawowego okresu drgań własnych, dla których maksymalna różnica w stosunku do wyników uzyskanych metodą elementów skończonych (ET-Bal) wynosi 15 %. Prostszym

Tabela 2: Zestawienie wartości podstawowego okresu drgań własnych budynku nr 1

Sposób obliczania:	T [s]							
	2 kond.	5 kond.	10 kond.	12 kond.	15 kond.	18 kond.	20 kond.	25 kond.
Kow03	-	-	0,382	0,452	0,555	-	-	-
Jea86	0,124	0,304	0,609	0,730	0,913	1,096	1,217	1,522
Bal03	0,027	0,104	0,284	0,371	0,513	-	-	-
Bal04	-	0,27	0,53	0,64	0,80	1,05	1,31	1,64
ET-Fil	0,048	0,134	0,312	0,393	0,523	-	-	-
ET-Bal	0,048	0,129	0,293	0,368	0,489	0,70	0,74	1,03
BW-8	0,022	0,102	0,299	0,393	0,548	0,680	0,748	1,072



Rysunek 5: Podstawowy okres drgań własnych (budynek nr 1)

wzór, zaproponowany dla budynków do wysokości 25 kondygnacji w pracy [2] (Bal04) daje w tym wypadku oszacowania, wyższe od wyników MES maksymalnie o 77 %.

Dla budynków o liczbie kondygnacji od 18 do 25 widoczna jest dobra zgodność wyników programu BW dla Windows, uzyskanych przy wykorzystaniu modelu ciągłego (BW-8), z wynikami programu ETABS (różnice nie przekraczają 5 %).

W dalszym ciągu zestawiono wyniki dla budynku nr 11, o rzucie zbliżonym do kwadratu, opisanego w punkcie 4. Budynek ten ma mało ścian usztywniających. Ponadto ściany te są usytuowane w pobliżu osi symetrii budynku. Suma tych czynników sprawia, że budynek ten reprezentuje klasę budynków o małej sztywności na skręcanie. Jego podstawowy okres drgań jest okresem drgań skrętnych.

W Tabeli 3 zestawiono wartości podstawowych okresów drgań własnych dla budynku nr 11, przy wysokości odpowiednio 2, 5, 10, 12, 15, 18, 20 i 25 kondygnacji.

Tabela 3: Zestawienie wartości podstawowego okresu drgań własnych budynku nr 11

Sposób obliczania:	T [s]							
	2 kond.	5 kond.	10 kond.	12 kond.	15 kond.	18 kond.	20 kond.	25 kond.
Kow03	-	-	0,382	0,452	0,555	-	-	-
Jea86	0,124	0,304	0,609	0,730	0,913	1,096	1,217	1,522
Bal03	0,057	0,205	0,540	0,697	0,953	-	-	-
Bal04	-	0,231	0,463	0,555	0,694	0,911	1,136	1,419
ET-Fil	0,073	0,235	0,631	0,819	1,123	-	-	-
ET-Bal	0,073	0,231	0,630	0,819	0,830	1,35	1,44	1,94
BW-8	0,051	0,185	0,520	0,683	0,949	1,217	1,406	1,956

Dla budynku nr 11 wzór zaproponowany w pracy [1] (Bal03) daje oszacowania niższe o 15 % od wyników MES (ET-Fil). Z kolei wzór, podany w pracy [2] (Bal04), daje dla budynków o wysokości powyżej 15 kondygnacji oszacowania o ok. 30 % niższe od wyników MES. Podstawowy okres drgań własnych, obliczony przy wykorzystaniu modelu ciągłego, dla budynków o liczbie kondygnacji od 18 do 25 różni się maksymalnie o 10 % w stosunku do wyników programu ETABS.

Rysunek 6 przedstawia dla budynku nr 11 graficzną reprezentację wyników zgromadzonych w Tabeli 3, w postaci wykresów funkcji podstawowego okresu drgań w zależności od liczby kondygnacji budynku.

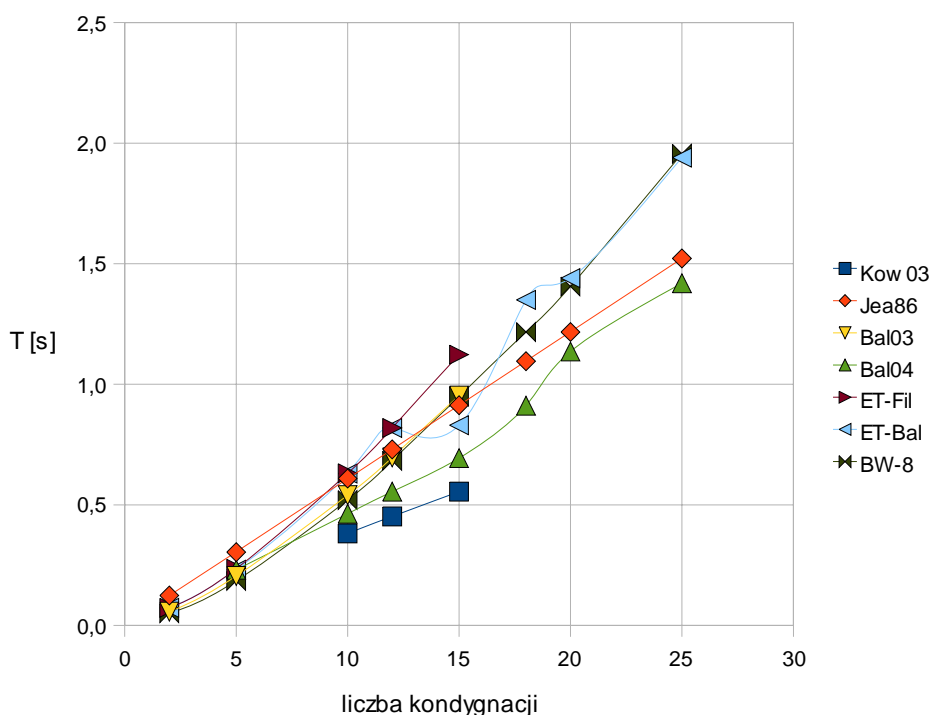
Na rysunku zauważyć można wpływ zmiany grubości ścian (do 15 kondygnacji: 12 cm, dla 18 kondygnacji: 15 cm oraz dla budynków wyższych 20 cm) na przebieg wykresów.

Na tym samym rysunku na wykresie „ET-Bal”, sporządzonym na podstawie wyników zamieszczonych w pracach [1, 2], budzi wątpliwości wartość okresu T dla budynku o wysokości 15 kondygnacji.

## 7. WNIOSKI

W pracy porównano oszacowania podstawowych okresów drgań własnych wielokondygnacyjnych budynków o żelbetowej konstrukcji ścianowej, uzyskane przy wykorzystaniu wzorów empirycznych, zaproponowanych w pracach [1-4], z wynikami obliczeń metodą elementów skończonych (program ETABS) oraz przy wykorzystaniu modelu ciągłego (program BW dla Windows).

Analizie poddano budynki kształtowane z użyciem form przestawnych, opisane w pracach [1,2]. Stwierdzono, że wzór, podany w pracy [1] dla budynków o wysokości do 15 kondygnacji daje dla większości budynków oszacowania, których różnice względne, obliczone w stosunku do wyników MES, nie przekraczają 15 %.



Rysunek 6: Podstawowy okres drgań własnych (budynek nr 11)

Prostszy wzór, zaproponowany w pracy [2] dla budynków o wysokości do 25 kondygnacji, daje dla niektórych budynków oszacowania, dla których maksymalne różnice w stosunku do wyników MES są rzędu 80%. Zaobserwowano przy tym, że wzór ten daje dla budynków o rzucie zbliżonym do prostokątnego oszacowania zaniżone, a dla budynków o rzucie zbliżonym do kwadratu – zawyżone w stosunku do wyników MES.

Jednocześnie, na podstawie przeprowadzonych dla 16 analizowanych budynków obliczeń, stwierdzono dla budynków o liczbie kondygnacji od 18 do 25 dobrą zgodność podstawowych okresów drgań własnych, obliczonych przy wykorzystaniu modelu ciągłego z wynikami, uzyskanymi przy zastosowaniu metody elementów skończonych (maksymalne różnice nie przekraczały 10%). Można zauważyć, że dla budynków o wysokości powyżej 15 kondygnacji celowe byłoby zastosowanie modelu ciągłego zamiast wzorów empirycznych, zaproponowanych w pracy [2].

## LITERATURA

- [1] C. Balkaya, E. Kalkan, Estimation of fundamental periods of shear-wall dominant building structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **32**, 7, 985-998, 2003.

- 
- [2] C. Balkaya, E. Kalkan, Seismic vulnerability, behavior and design of tunnel form building structures, *Engineering Structures*, **26**, 14, 2081-2099, 2004.
- [3] A.P. Jeary, Damping in tall buildings - a mechanism and a predictor, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **14**, 733-750, 1986.
- [4] A. Kowalska, Prognozowanie podstawowej częstotliwości drgań własnych i współczynnika tłumienia budynków, *Inż. i Bud.*, **6**, 331-334, 2003.
- [5] J. Wdowicki, E. Wdowicka, Integrated system for analysis of three-dimensional shear wall structures, *Comp. Meth. in Civil Eng.*, **1**, 3-4, 53-60, 1991.
- [6] E.M. Wdowicka, J.A. Wdowicki, T.Z. Błaszczyński, Seismic analysis of the "South Gate" tall building according to Eurocode 8, *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, **14**, 1, 59-67, 2005.
- [7] A. Habibullah, ETABS, *A User's Manual*, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, USA, 1992.
- [8] C. Balkaya, E. Kalkan, Nonlinear seismic response evaluation of tunnel form building structures, *Computers and Structures*, **81**, 3, 153-165, 2003.
- [9] L.Y. Wang, Q. Wang, A method for estimating fundamental periods of tall buildings, *Proc. Instn Civ. Engrs: Structs & Bldgs*, **160**, SB6, 327-337, 2007.
- [10] J. Wdowicki., E. Wdowicka, T. Błaszczyński, Integrated system for analysis of shear wall tall buildings, in: *Proc. of the Fifth World Congress "Habitat and High-Rise: Tradition and Innovation"*, Council on Tall Buildings and Urban Habitat, Amsterdam, May 14-19, 1309-1324, 1995.
- [11] B.R. Ellis, An assessment of the accuracy of predicting the fundamental natural frequencies of buildings and the implications concerning the dynamic analysis of structures, *Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2*, **69**, Sept., 763-776, 1980.

## OCENA STANU NAPRĘŻENIA W ELEMENTACH BĘBNA PĘDNEGO GÓRNICZEJ MASZYNY WYCIĄGOWEJ

Stanisław Wolny<sup>1</sup>, Zbigniew Łowkis<sup>2</sup>, Stanisław Dzik<sup>1</sup>, Sławomir Badura<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica w Krakowie  
al. Mickiewicza 30, 31-059 Kraków  
e-mail: {stwolny, stdzik, sbadura}@agh.edu.pl

<sup>2</sup> Zakłady Górnicze Rudna  
ul. Henryka Dąbrowskiego 50, 59-100 Polkowice  
e-mail: Z.lowkis@kghm.pl

---

**Abstract:** *Dimensioning rules of a mining hoist drive wheel that are actually in use, do not give a possibility to determine properly the stress and strain condition in the most afforded area of the structure, and the estimation of its fatigue life on that base is not possible. It seems necessary to undertake the effort aimed at development of the method to estimate the driving wheel elements technological condition regarding the fatigue phenomena. The results of dynamic analysis, strength analysis, and measurements verifying calculations that were made in actual object can make up a basis for further work on the revisal of relevant regulations. This elaborations may be considered as a step toward this enterprise continuation.*

---

### 1. WPROWADZENIE

Celem podjętej analizy wytrzymałościowej bębnow pędnych maszyn wyciągowych było uzyskanie pełnej informacji o stanie naprężeń jaki powstaje w jego elementach składowych pod wpływem obciążeń eksploatacyjnych. Znajomość ekstremalnych wartości składowych stanu naprężenia w konkretnym elemencie jest podstawą do oceny jego wytrzymałości i trwałości (dopuszczalnego okresu eksploatacji). Natomiast informacje o wartości i rozkładzie naprężeń umożliwiają wytypowanie tych obszarów konstrukcji, które z uwagi na poziom naprężeń powinny podlegać odpowiednim okresowym badaniom nieniszczącym.

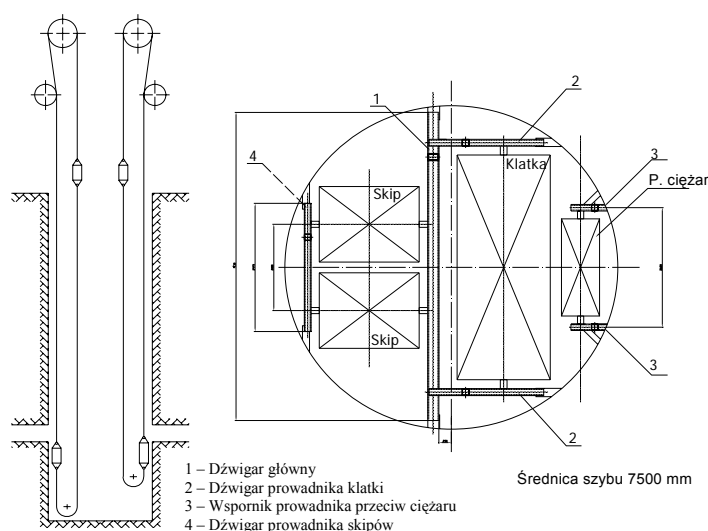
W polskich kopalniach węgla kamiennego oraz rud około 80 % konstrukcji kół pędnych zostało zaprojektowanych i wykonanych w latach 70 i 80 ubiegłego wieku. W obliczeniach projektowych tych konstrukcji uwzględniono głównie obliczenia statyczne i podstawowe schematy obliczeniowe elementów koła pędnego takie jak między innymi belki swobodnie podparte nie mające odzwierciedlenia w rzeczywistych elementach układu. Wobec faktu że mija 30 lat pracy konstrukcji i zgodnie z obowiązującymi przepisami górnictwa [3] powin-

ny być wyłączone z eksploatacji, autorzy opracowania podjęli próbę oceny ich stanu technicznego.

Po wykonaniu analizy dynamicznej pracy elementów konstrukcji koła pędnego [2], przeprowadzono analizę wytrzymałościową tych elementów i zweryfikowano pomiarami odkształceń (naprężeń) na obiekcie rzeczywistym w warunkach normalnej eksploatacji układu w jednej z polskich kopalń co stanowi temat niniejszego opracowania.

## 2. ANALIZA WYTRZYMAŁOŚCIOWA BĘBNA PĘDNEGO MASZYNY WYCIĄGOWEJ

Numerycznej analizie wytrzymałościowej poddano koło pędne urządzenia wyciągowego, którego schemat przedstawiono na Rys. 1.



Rysunek 1: Schemat urządzenia wyciągowego

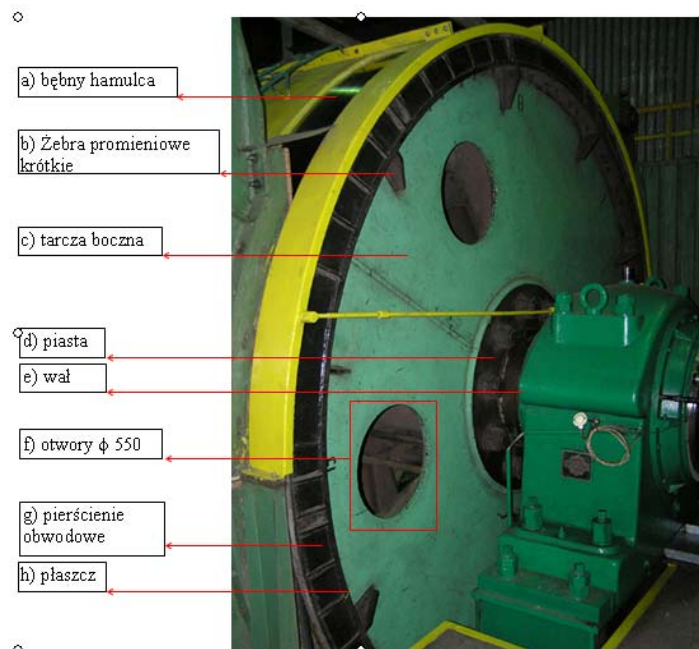
Główne parametry eksploatacyjne tego urządzenia zestawiono w Tabeli 1.

Tabela 1: Główne parametry urządzenia wyciągowego na którym wykonano eksperyment.

Typ maszyny	4L-4000/2900
Napęd, silnik prądu stałego	2900 [kW]
Obroty znamionowe silnika	77 [obr./min.]
Prędkość maksymalna skipu	$v = 16$ [m/s]
Masa kompletnego, pustego naczynia z zawieszeniem	$m_{ku} = 16500$ [kg]
Masa użyteczna	$m_u = 17000$ [kg]

Bęben pędny urządzenia wyciągowego jest konstrukcją spawaną wykonaną w całości ze stali St3S (Rys. 2). W konstrukcji koła pędnego można wyróżnić podstawowe elementy nośne (Rys. 2):





Rysunek 2: Konstrukcja bębna pędnego

1. Płaszcz nośny (h)	- 1 szt.
2. Tarcze Boczne (c)	- 2 szt.
3. Piasty (d)	- 2 szt.
4. Żebra obwodowe o przekroju teowym (b)	- 2 szt.
5. Żebra promieniowe (a)	- 10 szt.
6. Bębny hamulcowe (a)	- 2 szt.

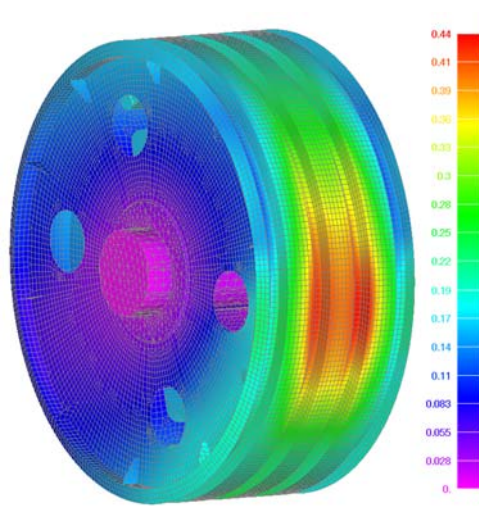
Obciążenie konstrukcji koła pędnego stanowiły siły w linach nośnych w miejscu ich wejścia i zejścia z koła pędnego, dla normalnego cyklu pracy urządzenia, jak również w warunkach hamowania bezpieczeństwa, uzyskane w wyniku przeprowadzonej analizy dynamicznej [2] zweryfikowanej pomiarami sił na obiekcie rzeczywistym [4]. Zbudowany model numeryczny z odwzorowaniem geometrii koła pędnego [4] pokazano na Rys. 3. Model został wykonany przy użyciu programu „Femap”, a analizę przeprowadzono z wykorzystaniem pakietu „NEiNastran for Windows”. Do wykonania modelu numerycznego zostały użyte elementy typu płytowego i bryłowego.

Uzyskane rezultaty numerycznej analizy wytrzymałościowej przedstawiono w formie graficznej, za pomocą planów warstwowych. Przykładowo na Rys. 4 przedstawiono odkształcenia płaszcza bębna koła pędnego (wymiary w milimetrach). Największe odkształcenie płaszcza wynosiło 0.448 mm. W wyniku zmieniającego się obciążenia i ruchu obrotowego koła pędnego, płaszcz będzie cyklicznie poddawany deformacji, co może powodować efekt tzw. „maszyny zmęczeniowej” i być przyczyną pojawienia się pęknięć o charakterze zmęczeniowym [1]. Natomiast na Rys. 5 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowa-

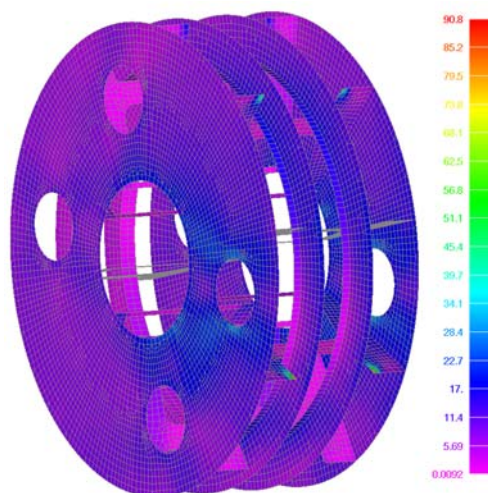


Rysunek 3: Model numeryczny konstrukcji koła pędnego.

nych wg hipotezy HMM w żebrach promieniowych i obwodowych konstrukcji koła pędnego. Maksymalne naprężenia wynoszą tam około 65,5 [MPa].



Rysunek 4: Obraz odkształceń elementów konstrukcyjnych koła pędnego

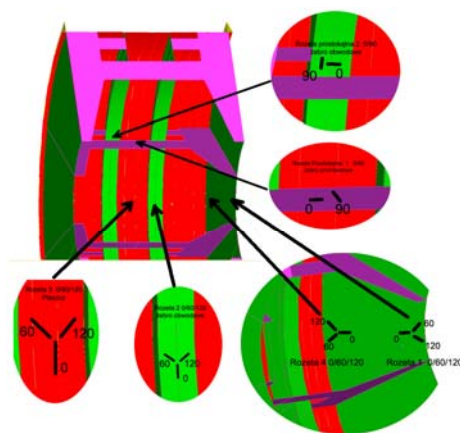


Rysunek 5: Rozkład naprężeń wg Hubera-Misesa na żebrach promieniowych i obwodowych [MPa]

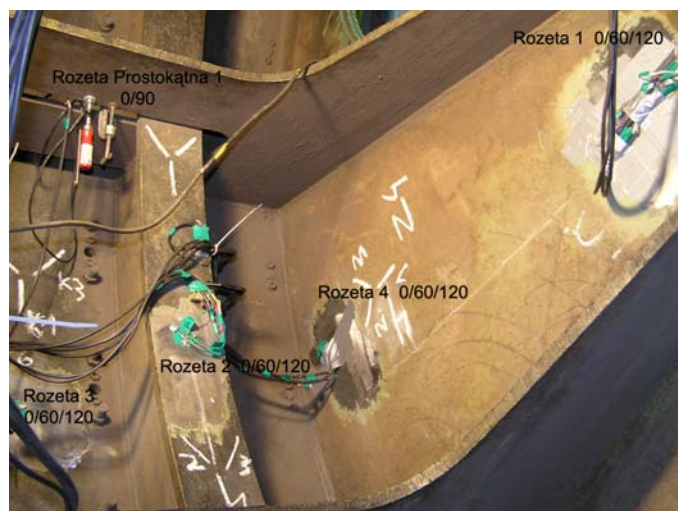
### 3. POMIARY ODKSZTAŁCEŃ (TENSOMETRYCZNE) W WYBRANYCH PUNKTACH KONSTRUKCJI BĘBNA PĘDNEGO

Na podstawie wykonanej analizy wytrzymałościowej konstrukcji koła pędnego wytypowano miejsca w elementach konstrukcji o największej koncentracji naprężeń. W miejscach tych wykonano pomiary odkształceń (naprężeń) na obiekcie rzeczywistym.

Rozmieszczenie punktów pomiarowych na konstrukcji koła pędnego pokazano na Rys. 6. Na wyznaczone i przygotowane punkty pomiarowe wewnątrz konstrukcji koła pędnego naклеиło rozety tensometryczne typu TFxy-4/120 oraz rozety tensometryczne TFr-8/120 co pokazano na Rys. 7.



Rysunek 6: Rozmieszczenie punktów pomiarowych na konstrukcji koła pędnego (szkic)



Rysunek 7: Rozmieszczenie czujników tensometrów na konstrukcji koła pędnego (zdjęcie)

### 3.1. Opis przeprowadzonych pomiarów

Do pomiarów wykorzystano 6 rozet tensometrycznych. Dwie rozety tensometryczne typu **TFxy-4/120** oraz 4 **TFR-8/120**. Rozeta **TFxy-4/120** posiada dwie czynne bazy pomiarowe ułożone względem siebie pod kątem prostym ( $0^{\circ}, 90^{\circ}$ ). Tensometry pomiarowe czynne były kompensowane temperaturowo przez tensometry kompensacyjne identyczne jak pomiarowe.

Tensometry rozmieszczono w następujących punktach konstrukcji:

- **rozeta prostokątna nr 1** żebro obwodowe w odległości 5 cm od żebra promieniowego,
- **rozeta prostokątna nr 2** środek żebra promieniowego.

Łącznie z rozet **TFxy-4/120** rejestrowane były 4 sygnały danych pomiarowych.

Drugą partię czujników stanowiły cztery rozety tensometryczne **TFR-8/120** których bazy pomiarowe ułożone są względem siebie pod kątami  $0^{\circ}, 60^{\circ}, 120^{\circ}$ . Każdy tensometr był odpowiednio kompensowany temperaturowo. Czujniki naklejono na następujące punkty konstrukcji:

- **rozeta nr 1** na tarczy bocznej w odległości 10 cm od piasty.
- **rozeta nr 2** na żebro obwodowe pomiędzy żebrami promieniowymi (czujnik ułożono bazą pomiarową  $\epsilon_0$  wzdłuż żebra),
- **rozeta nr 3** na płaszczu pomiędzy żebrami obwodowymi,
- **rozeta nr 4** na tarczy bocznej w odległości 10 cm od płaszcz bębna.

Łącznie z rozet **TFR-8/120** rejestrowane było 12 sygnałów pomiarowych.

Wszystkich kanałów pomiarowych z czujników tensometrycznych było 16. Pomiary wykonano w trakcie pełnego cyklu eksploatacyjnego pracy urządzenia wyciągowego z prędko-

ścią  $V_0=16$  [m/s] oraz w przypadku hamowania bezpieczeństwa przy prędkości jazdy ustalonej  $V=10$  [m/s] dla dwóch położań pełnego naczynia wydobywczego w szybu :

- w połowie głębokości szybu,
- w dolnej części szybu.

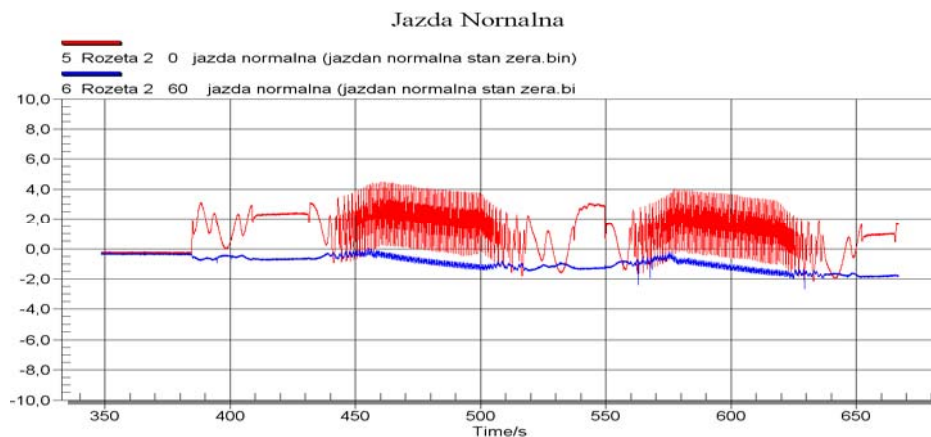
Aparatura pomiarowa została odpowiednio zamocowana wewnątrz bębna do tulei kołnierzonej w specjalnej kuwecie, blisko osi wału aby w jak największym stopniu wyeliminować działanie siły odśrodkowej. Pomiedzy poszczególnymi cyklami pomiarowymi były dokonywane zapisy zarejestrowanych danych oraz ocena stanu technicznego podłączeń jak i aparatury.

### 3.2. Opracowanie wyników pomiarów

Do opracowania pomiarów wykorzystano program firmy HBM „Catman” który służył także do rejestracji danych pomiarowych. W trakcie pomiarów zarejestrowane zostały zmiany odkształceń podczas ruchu obrotowego bębna. Przykładowo na Rys. 8 przedstawiono wybrane przebiegi odkształceń zarejestrowanych przez rozetę nr 2 podczas jednego pełnego cyklu pracy urządzenia wyciągowego (zjazd i wyjazd skipu) z prędkością jazdy ustalonej  $v_0=16$  [m/s]. Natomiast na Rys. 9 przedstawiono zmianę odkształceń zarejestrowanych również przez rozetę nr 2 w trakcie hamowania bezpieczeństwa urządzenia wyciągowego przy prędkości jazdy ustalonej  $v_0=10$  [m/s].

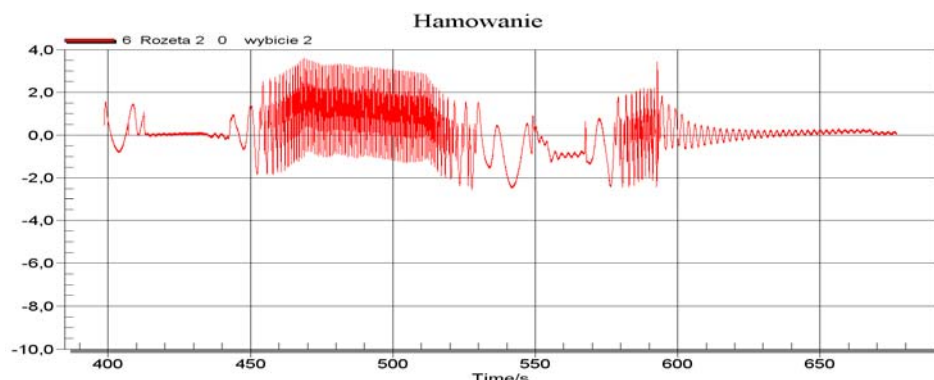
Pomierzone wartości naprężeń w wybranych punktach konstrukcji koła pędnego, dotyczą w rzeczywistości zmiany amplitudy naprężeń w tych punktach ( $\sigma_a$ ). Pomiaru zostały wykonane na czynnym urządzeniu wydobywczym, co oznacza że mierzono zmianę naprężenia spowodowaną między innymi zmianą masy transportowanego naczynia (naczynie pełne ciągnięte do góry, naczynie puste opuszczane do dolnego poziomu załadowniczego) zmianą prędkości jazdy oraz w wyniku hamowania bezpieczeństwa.

Maksymalne wartości zmiany amplitudy naprężeń cyklu ( $\sigma_a$ ) (w analizowanych punktach pomiarowych) w skrajnych przypadkach nie przekraczają ( $\sigma_a$ )<sub>max</sub> ≤ 24 [MPa].



Rysunek 8: Rozkład odkształceń  $\epsilon$  zarejestrowanych podczas jednego pełnego cyklu pracy (zjazd i wyjazd  $v=16$ [m/s]) przez **rozetę nr 2** na kierunkach  $\epsilon_0$  ,  $\epsilon_{60}$ .





Rysunek 9: Rozkład odkształceń  $\varepsilon$  zarejestrowanych podczas hamowania manewrowego (wyjazd  $v=10$ [m/s]) przez **rozetę nr2** na kierunku  $\varepsilon_0$ .

#### 4. WNIOSKI

Przeprowadzone pomiary naprężeń (odkształceń) w wybranych punktach konstrukcji koła pędnego pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- wyniki pomiarów naprężeń w wybranych punktach konstrukcji koła pędnego wykazały, że maksymalne zmiany wartości amplitudy naprężania cyklu  $\sigma_a$  w skrajnych przypadkach nie przekroczyły  $(\sigma_a)_{\max} \leq 24$  [MPa].
- hamowanie manewrowe powodujące znaczny wzrost wartości sił w linach urządzenia wyciągowego, nie wywołuje tak gwałtownych zmian naprężeń w badanych punktach konstrukcji koła pędnego. Dla analizowanych przypadków hamowania bezpieczeństwa, maksymalne zmiany wartości amplitudy naprężenia  $\sigma_a$ , nie przekroczyły maksymalnej wartości jaką uzyskano dla normowego cyklu pracy urządzenia.

#### LITERATURA

- [1] N.E. Dowling, *Mechanical behavior of materials. Engineering Methods for deformation, fracture and fatigue*. Prentice Hall. Englewood Cliffs New Jersey 1993.
- [2] S. Wolny, Wybrane problemy wytrzymałościowe w eksploatacji górniczych urządzeń wyciągowych. Seria: Monografie nr 20 *Problemy Inżynierii Mechanicznej i Robotyki*, Wyd. Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki, AGH, Kraków 2003.
- [3] Załącznik nr 17 do Rozporządzenia Ministra Przemysłu i Handlu z dnia 14 kwietnia 1995r. Wymagania w zakresie budowy i obsługi górniczych wyciągów szybowych.
- [4] S. Wolny, S. Dzik, S. Badura i in. Praca naukowo-badawcza. *Opracowanie metody oceny stanu technicznego bębnow maszyn wyciągowych z uwzględnieniem efektów zmęczeniowych*, AGH, Kraków 2007

## **WSPÓŁCZYNNIK DYNAMICZNY DLA SZKIELETU GRUNTU W MODELU DWUFAZOWYM**

**Bogumił Wrana, Jacek Świągoda**

Instytut Mechaniki Budowli  
Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Krakowska  
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków  
e-mail: bwrana@pro.onet.pl, j.swiegoda@op.pl

---

***Abstract:** This paper deals with a description of the behavior of the two-phase soil layer (column) under periodic load. The soil layer (column) is fully saturated with single pore fluid and treated by the methods of continuum mechanics. Description of motion and deformation of soil is introduced as a system of equations consisting of governing dynamic consolidation equations based on Biot theory, selected constitutive and kinematic relations for small strains and rotation. The solution and results of simple one dimensional numerical analysis of the fully saturated layer under cyclic load are included. Also the so-called dynamic coefficient which shows amplification or attenuation of dynamic response is considered.*

---

### **1. WSTĘP**

W pracy rozważano zagadnienie współczynnika dynamicznego dla szkieletu gruntu w ośrodku dwufazowym gruntu składającym się ze szkieletu i wody w porach w zagadnieniach drgań harmonicznym (cyklicznym). W pracy rozważano model dynamicznej konsolidacji Biota opisujący zachowanie się dwufazowego ośrodka gruntowego pod obciążeniem dynamicznym. Na przykładzie zadania jednowymiarowego przedstawiono wykresy rozwiązań wartości współczynnika dynamicznego przemieszczeń szkieletu gruntu, który określa powiększenie lub pomniejszenie wartości amplitud przemieszczeń w stosunku do obciążeń statycznych.

Przedstawione w pracy rozważania bazują na literaturze mechaniki dwufazowego ośrodka gruntowego [1-5].

### **2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU**

#### **2.1. OGÓLNY OPIS**

OGólny opis zagadnienia dynamiki gruntu obejmuje przestrzeń trzech zmiennych [1, 2]:

$\mathbf{u}^T = \{u_x, u_y, u_z\}$  – wektor przemieszczenia szkieletu,

$\mathbf{v}^T = \{v_x, v_y, v_z\}$  – wektor przemieszczenia całkowitego cieczy,

$p$  – efektywne ciśnienie (skalar).

oraz zamiennie z wektorem  $\mathbf{v}$ :

$\mathbf{w} = n(\mathbf{v} - \mathbf{u})$  - przemieszczenie cieczy względem szkieletu.

Opis stanu naprężenia w gruncie opisany jest równaniem Terzagiego – Biota, które wyraża zasadę efektywnych naprężeń [1, 3]:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \alpha \mathbf{m} p, \quad (1)$$

gdzie:

$$\mathbf{m} = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$$

$\boldsymbol{\sigma}'$  – naprężenia efektywne w szkielecie,

$\boldsymbol{\sigma}$  – naprężenia całkowite w gruncie,

$\alpha$  – współczynnik udziału ciśnienia w równaniu Terzagiego.

Opis odkształceń szkieletu gruntowego można założyć zgodnie z prawem Hooke'a:

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}(d\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\varepsilon}^0), \quad (2)$$

gdzie:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{zx}\}^T$$

$D$  – macierz styczna - liniowa,

$d\boldsymbol{\varepsilon}^0$  – wstępne odkształcenia (np. termiczne)

Dynamika obszaru gruntu jako ośrodka dwufazowego opisana jest przez trzy równania [1, 4]. Pierwsze równanie ruchu otrzymuje się z zapisania zasady pędu dla szkieletu gruntowego i cieczy traktowanych jako mieszanina.

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} - \rho \mathbf{u} - \rho_f (\ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}}) + \rho \mathbf{b} = 0, \quad (3)$$

gdzie:

$n$  - porowatość,

$\rho_s$  - gęstość szkieletu gruntowego,

$\rho_f$  - gęstość cieczy,

$\rho$  - gęstość "mieszaniny".



Z zasady pędu dla fazy ciekłej otrzymujemy równania ruchu:

$$-\nabla p - \mathbf{R} - \rho_f \ddot{\mathbf{u}} - \rho_f (\ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}}) / n + \rho_f \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

gdzie  $\mathbf{R}$  są siłami wiskotycznego tłumienia zgodnie z prawem Darcy:  $\mathbf{kR} = \dot{\mathbf{w}}$ .

Równanie przepływu:

$$\nabla^T \dot{\mathbf{w}} + \alpha \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{Q} \dot{p} + n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f} + \dot{\mathbf{s}}_0 = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$\frac{1}{Q} = \frac{n}{D_f} + \frac{\alpha - n}{D_s} \cong \frac{n}{D_f} + \frac{1 - n}{D_s},$$

$D_f$  - moduł odkształcenia objętościowego cieczy,

$D_s$  - moduł odkształcenia objętościowego szkieletu,

$D_T$  - moduł ściśliwości „mieszany”,

$n \frac{\dot{\rho}_f}{\rho_f}$  - reprezentuje zmianę gęstości oraz  $\dot{\mathbf{s}}_0$  prędkość zmiany objętości przy

zmianach temperatury.

Powyższe równania są równaniami ogólnymi opisujących dynamikę w trójwymiarowej przestrzeni obszaru gruntu. W dalszych rozważaniach przyjęto uproszczenia w powyższych równaniach. Pominięto człony konwekcji  $\dot{\mathbf{w}} \nabla^T \dot{\mathbf{w}} \approx 0$ , siły masowe  $\rho \mathbf{b} \approx 0$  oraz zmiany gęstości cieczy i źródła w czasie  $\dot{\rho}_f = \dot{\mathbf{s}}_0 \approx 0$ . W Tabeli 1 zestawiono dwie wybrane koncepcje przyjmowania stałych Biota Q oraz  $\alpha$ .

Tabela 1: Parametry Q oraz  $\alpha$

Parametr	Wg Zienkiewicza [4]	Wg Bardeta [5]
$\alpha$ ( $n \leq \alpha \leq 1$ )	$1 - \frac{D_T}{D_s}$ ;	1
Q	$\frac{D_s D_f}{n D_s + (1 - n) D_f}$	$\frac{D_f}{n}$

## 2.2. OPIS ZADANIA JEDNOWYMIAROWEGO Z OBCIĄŻENIEM HARMONICZNYM.

Rozważane jest zadanie jednowymiarowe w kierunku osi z (tzw. kolumna Biota) przy następujących założeniach:

- Przemieszczenia  $u_z = u$ ,  $u_x = u_y = 0$  oraz  $v_z = v$ ,  $v_x = v_y = 0$ .
- Brak sił masowych, czyli pominięcie wpływu ciężaru własnego mieszaniny.
- Odkształcenia szkieletu gruntowego opisane są prawem Hooke'a.

- d) Ośrodek jest dwufazowy, w pełni nasycony.  
 e) Moduł objętościowy szkieletu gruntowego jest „duży” w stosunku do modułu cieczy, czyli odkształcenie objętościowe próbki zależy w większym stopniu od ściśliwości cieczy a nie szkieletu.  
 f) Przepływ cieczy opisany jest prawem Darcy.

Zasada naprężeń efektywnych (1) przyjmuje postać:

$$\sigma = \sigma' - \alpha p = D\varepsilon - \alpha p = Du_{,z} + \alpha Q(w_{,z} + u_{,z}) \quad (6)$$

Parametry Q oraz  $\alpha$  przyjęto za Bardetem [5]:

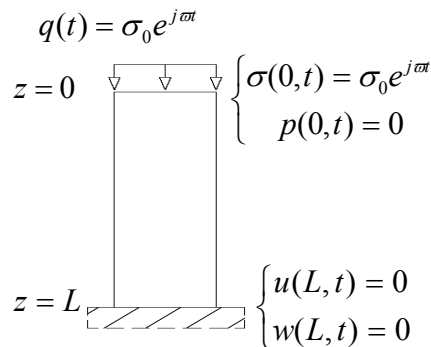
$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad Q = \frac{D_f}{n}; \quad \alpha = 1. \quad (7)$$

Uwzględniając powyższe założenia, układ równań (3)-(5) upraszcza się do dwóch równań różniczkowych cząstkowych postaci:

$$(D + Q)u_{,zz} + Qw_{,zz} = \rho\ddot{u} + \rho_f\ddot{w}, \quad (8)$$

$$Q(u_{,zz} + w_{,zz}) = \rho_f\left(\ddot{u} + \frac{1}{n}\ddot{w} + \frac{g}{k_o}\dot{w}\right). \quad (9)$$

Powyższy układ równań uzupełniają warunki brzegowo-początkowe przedstawione na Rys. 1



Rysunek 1: Warstwa gruntu przy wymuszeniu harmonicznym (warunkami brzegowo – początkowe)

### 2.3. ROZWIĄZANIE DLA ZADANIA JEDNOWYMIAROWEGO.

Wprowadzając oznaczenia:

$$\chi = \frac{D}{D_f} = \frac{nD}{Q} \text{ - stosunek sztywności szkieletu do sztywności wody napowietrzonej,}$$

$\beta = \frac{\rho_f}{\rho}$  - stosunek gęstości cieczy do gęstości właściwej szkieletu,

$c_w = \sqrt{\frac{D_f}{\rho_f}}$  - prędkość rozchodzenia się fali ciśnieniowej w wodzie napowietrzanej.

W ramach w/w oznaczeń równania (8)(9) zapiszemy:

$$c_w^2 \left( \left( \frac{1}{n} + \chi \right) u_{,zz} + \frac{1}{n} w_{,zz} \right) = \frac{1}{\beta} \ddot{u} + \ddot{w}, \quad (10)$$

$$c_w^2 \left( \frac{1}{n} u_{,zz} + \frac{1}{n} w_{,zz} \right) = \ddot{u} + \frac{1}{n} \ddot{w} + \frac{g}{k_o} \dot{w}. \quad (11)$$

Przyjęto rozwiązanie w ramach równań falowych:

$$u(z, t) = U e^{j(\omega t - \lambda z)}, \quad (12)$$

$$w(z, t) = W e^{j(\omega t - \lambda z)}, \quad (13)$$

gdzie:  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  - częstość kołowa,  $\lambda$  - liczba falowa,

$U$  - amplituda drgań harmonicznym szkieletu,

$W$  - amplituda drgań harmonicznym cieczy.

Wprowadzono zmienną:

$$\psi = \frac{c_w \lambda}{\omega}. \quad (14)$$

Podstawiając (12)-(14) do (10) oraz (11) otrzymamy dwa równania liniowe z uwagi na stałe  $U$  i  $W$ :

$$U \left( \psi^2 \left( \chi + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{\beta} \right) + W \left( \frac{\psi^2}{n} + 1 \right) = 0, \quad (15)$$

$$U \left( \frac{\psi^2}{n} + 1 \right) + W \left( \frac{\psi^2}{n} + \frac{1}{n} - j \frac{g}{k_o \omega} \right) = 0, \quad (16)$$

czyli:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \left( \psi^2 \left( \chi + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{\beta} \right) & \left( \frac{\psi^2}{n} + 1 \right) \\ \left( \frac{\psi^2}{n} + 1 \right) & \left( \frac{\psi^2}{n} + \frac{1}{n} - j \frac{g}{k_o \omega} \right) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_\psi} \begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Nietrywialnie rozwiązanie otrzymujemy, gdy:

$$\det \mathbf{A}_\psi = 0, \quad (18)$$

co prowadzi do równania charakterystycznego:

$$\frac{\chi}{n} \psi^4 + a \psi^2 + b = 0. \quad (19)$$

Parametry  $a$  oraz  $b$  określone są poprzez:

$$a = \left(\chi + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + \frac{1}{n\beta} - \frac{2}{n} - j \frac{g}{k_0 \omega} \left(\chi + \frac{1}{n}\right), \quad (20)$$

$$b = \frac{1}{n\beta} - 1 - j \frac{g}{k_0 \omega} \frac{1}{\beta}.$$

Równania (19) ma dwa rozwiązania zespolone sprzężone:

$$\psi_{1,3} = \pm \sqrt{\frac{-an - \sqrt{n^2 a^2 - 4bn\chi}}{2\chi}}, \quad (21)$$

$$\psi_{2,4} = \pm \sqrt{\frac{-an + \sqrt{n^2 a^2 - 4bn\chi}}{2\chi}}. \quad (22)$$

Zgodnie z założeniem (12) oczekujemy rozwiązania układu równań różniczkowych ze względu na zmienną przestrzenną:

$$u(z,t) = U(z)e^{j\omega t} = (U_1 e^{\lambda_1 z} + U_2 e^{\lambda_2 z} + U_3 e^{-\lambda_1 z} + U_4 e^{-\lambda_2 z}) e^{j\omega t}, \quad (23)$$

$$w(z,t) = W(z)e^{j\omega t} = (W_1 e^{\lambda_1 z} + W_2 e^{\lambda_2 z} + W_3 e^{-\lambda_1 z} + W_4 e^{-\lambda_2 z}) e^{j\omega t}. \quad (24)$$

Stałe  $W_1, W_2, W_3, W_4$  możemy przedstawić jako kombinację [1]:

$$W_1 = K_1 U_1, \quad W_2 = K_2 U_2, \quad W_3 = K_1 U_3, \quad W_4 = K_2 U_4. \quad (25)$$

Nieznane stałe  $U$  oraz  $K$  wyznacza się wykorzystując warunki brzegowe (Rys. 1) oraz układ równań (17). Podstawiając stałe oraz pierwiastki równania charakterystycznego (21) i (22) do rozwiązania (23), (24) otrzymujemy rozkład amplitud po głębokości  $z$ :

$$U(z) = \frac{L\sigma_0}{D} \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \frac{(K_2 + 1) \sinh[\lambda_1(z-L)]}{\lambda_1 L \cosh[\lambda_1 L]} - \frac{(K_1 + 1) \sinh[\lambda_2(z-L)]}{\lambda_2 L \cosh[\lambda_2 L]} \right), \quad (26)$$

$$W(z) = \frac{L\sigma_0}{D} \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \frac{K_1(K_2 + 1) \sinh[\lambda_1(z-L)]}{\lambda_1 L \cosh[\lambda_1 L]} - \frac{K_2(K_1 + 1) \sinh[\lambda_2(z-L)]}{\lambda_2 L \cosh[\lambda_2 L]} \right). \quad (27)$$

## 2.4. PRZYKŁADOWE WYNIKI OBLICZEŃ.

Przedstawiając przykładowe wyniki obliczeń wprowadzono dodatkowy parametr związany z częstością kołową:

$$\Omega = \frac{\omega L}{c_0}, \quad (28)$$

gdzie:

$$c_0 = \sqrt{\frac{D+Q}{\rho_f}} \quad \text{- prędkość rozchodzenia się fali ciśnieniowej w ośrodku dwufazowym.}$$

Współczynnik dynamiczny dla szkieletu gruntowego zdefiniowano jako stosunek amplitudy dynamicznej (26) do przemieszczenia statycznego ( $U_{stat} = L\sigma_0/D$ ) podany w decybelach:

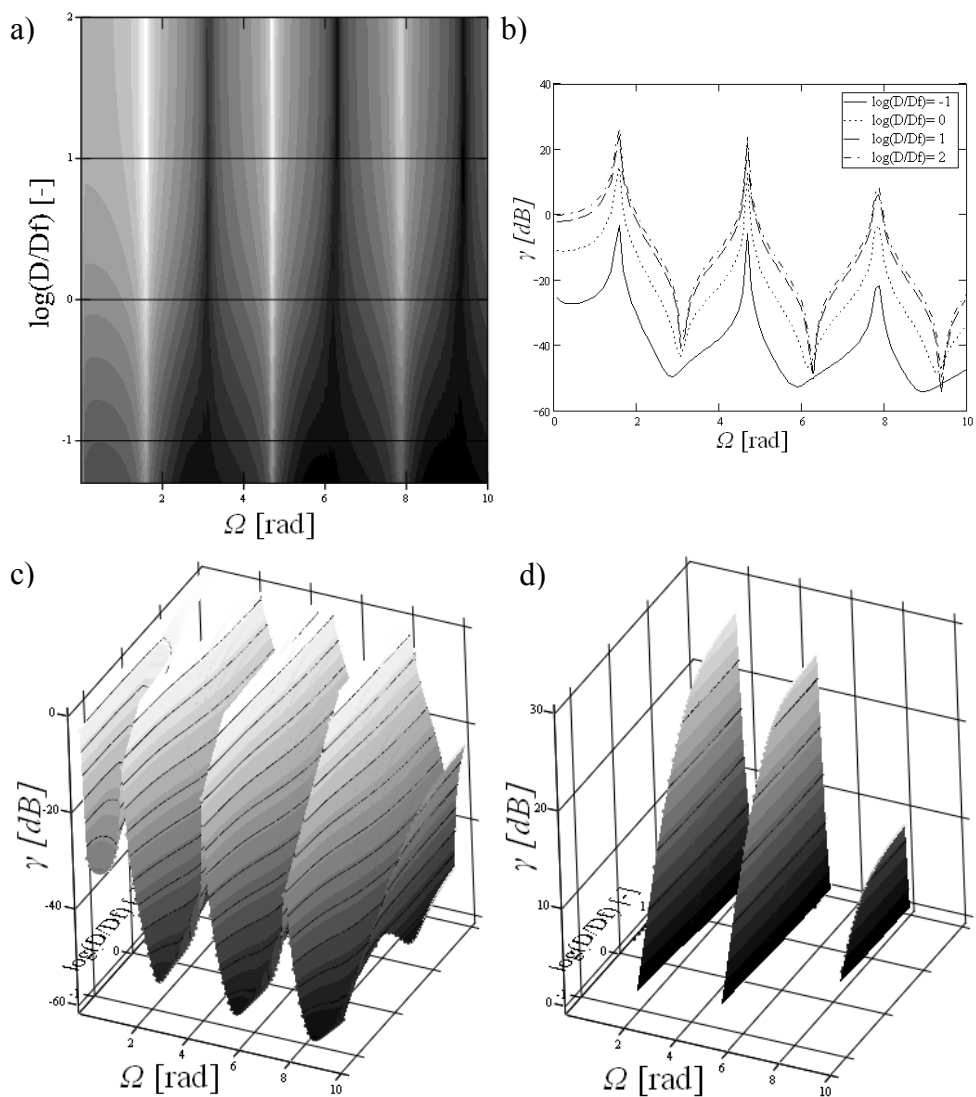
$$\begin{aligned} \gamma &= 20 \log_{10} \frac{U_{dyn}}{U_{stat}} = \\ &= 20 \log_{10} \left| \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \frac{(K_2 + 1) \sinh[\lambda_1(z-L)]}{\lambda_1 L \cosh[\lambda_1 L]} - \frac{(K_1 + 1) \sinh[\lambda_2(z-L)]}{\lambda_2 L \cosh[\lambda_2 L]} \right) \right| \end{aligned} \quad (29)$$

Dla  $\gamma > 0$  następuje wzmocnienie amplitud drgań w stosunku do przemieszczenia statycznego. W analogii układu dynamicznego o jednym stopniu swobody mówimy o pracy układu w przedziale okołorezonansowym. W przypadku  $\gamma < 0$  amplitudy drgań wymuszonych są mniejsze niż wynikające z rozwiązania dla statyki (obszar pozarezonansowy).

W przykładzie rozważano warstwę piasku średniozagęszczonego o miąższości  $L=10\text{m}$ . Parametry przyjęte do obliczeń pokazano w Tabeli 2. Odpowiedź kolumny przedstawiono dla głębokości  $z=0\text{m}$ . Na Rys. 2a,b pokazano wartości współczynnika dynamicznego dla szkieletu gruntowego w zależności od stosunku sztywności objętościowej szkieletu do sztywności cieczy oraz parametru częstości  $\Omega$ . Rys. 2c,d przedstawia obszary wzmocnienia ( $\gamma > 0$ ) oraz tłumienia ( $\gamma < 0$ ) amplitud przemieszczeń szkieletu  $U(z)$ .

Tabela 2: Wartości parametrów

Parametr	Wartość
$\rho_s; \rho_f$	26.5; 10.0 [ $kN/m^3$ ]
$k_0$	0.05 [ $m/s$ ]
$\frac{D_f}{D}$	0.1 ÷ 100 [-]
$\Omega$	0.05 – 100 [ $rad$ ]
$\sigma_0$	100 [ $kPa$ ]
$n$	0.33 [-]
$L$	10 [ $m$ ]



Rysunek 2: Wartości współczynnika dynamicznego w zależności od stosunku sztywności  $D/D_f$  oraz parametru częstości  $\Omega$ : a) współczynnik dynamiczny; b) przekroje powierzchni dla ustalonych  $D/D_f$ ; c) współczynnik dynamiczny  $< 0$ ; d) współczynnik dynamiczny  $> 0$

### 3. WNIOSKI

Poniższe wnioski odnoszą się do przykładu przedstawionego w p. 2.4:

- Z Rys. 2-a,b,c wynika, że szkielet gruntowy jest w rezonansie dla wartości parametru  $\Omega$  równych  $\pi/2$ ,  $3/2\pi$ ,  $5/2\pi$  itd.
- Tłumienie amplitud rezonansowych spada wraz z wzrostem  $\Omega$ . Największa wartość amplitudy występuje dla  $\Omega$  równego  $\pi/2$ , co pokazano na Rys. 2d i rośnie wraz ze stosunkiem  $D/D_f$ .
- W strefach między  $\Omega = \pi/2$ ,  $3/2\pi$ ,  $5/2\pi$  itd. występuje redukcja amplitud przemieszczeń szkieletu. Najmniejsze wartości występują dla parametru  $\Omega$  równego  $\pi$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$  itd.

### LITERATURA

- [1] O.C. Zienkiewicz, A.H.C. Chan, M. Pastor, B.A. Schrefler, T. Shiomi, *Computational Geomechanics with Special Reference to Earthquake Engineering*, John Willey & Sons, 2000.
- [2] M. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous soil*, J. Acoust. Soc. Amer. 28(4), 168-191, 1956.
- [3] I. Kisiel, *Mechanika skal i gruntów*, PWN, 1982.
- [4] O.C. Zienkiewicz, C.T. Chang, P. Bettés, *Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils*, Geotechnique 30(4), 385-395, 1980.
- [5] Bardet J.P., *The Damping of Saturated Poroelastic Soils during Steady State Vibration*, Applied Mathematic and Computation, 67, 3-31, 1995.





## **GENERATOR ZADANEJ TRAJEKTORII RUCHU OBIEKTU DYNAMICZNEGO**

**Wiesław Żylski, Piotr Gierlak**

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza  
ul. Wincentego Pola 2, 35-959 Rzeszów  
e-mail: {wzylski, pgierlak}@prz.edu.pl

---

**Abstract:** *The fundamental problem of robots' dynamics and control is the computation of desired trajectory for dynamical object. In order to do that, inverse kinematic problem should be solved. A singular inverse kinematics problem for the SCORBOT manipulator has been solved using the model with variable structure. Feedforward multilayered neural networks and genetic algorithm has been utilized in this model. The backpropagation algorithm has been utilized for training network. The neural networks have been used outside the singularity. In the singularity the genetic algorithm has been used for computation of the angular velocities. Results of the simulation have been presented.*

---

### **1. WPROWADZENIE**

Jednym z podstawowych zagadnień w dynamice i sterowaniu robotów jest wyznaczenie zadanej trajektorii ruchu dla układu sterowania robota. Tak rozumianą trajektorię stanowią współrzędne, prędkości i przyspieszenia konfiguracyjne. Wielkości te są wykorzystywane w różnorodnych technikach sterowania ruchem nadążnym manipulatorów. Tak więc zagadnienia dynamiki są nierozdzielnie połączone z zagadnieniami kinematyki. Aby wyznaczyć trajektorię zadaną, należy rozwiązać zadanie odwrotne kinematyki (ZOK). W ogólnym przypadku jest ono bardziej złożone matematycznie niż zadanie proste kinematyki (ZPK). ZPK manipulatora polega na wyznaczeniu parametrów ruchu jego wybranego punktu w przestrzeni roboczej dla znanych parametrów ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej. ZOK manipulatora polega na wyznaczeniu parametrów ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej dla zadanych parametrów ruchu wybranego punktu w przestrzeni roboczej. Podstawowe trudności ZOK to: niejednoznaczności, nieciągłości oraz osobliwości rozwiązania. Istnieje wiele metod rozwiązywania ZOK, jak np. metody algebraiczne [5], geometryczne [5], iteracyjne bazujące na jakobianie manipulatora [2, 3]. Rozwijane są metody rozwiązywania osobliwego ZOK bazujące na zmianie współrzędnych w otoczeniu osobliwości i wykorzystaniu tzw. kinematyki równoważnej [2, 10]. Wiele spośród wymienionych metod jest nieskutecznych w przypadku osobliwego ZOK. Inne z kolei są stosunkowo skomplikowane. Nowatorskie podejścia do problemu bazują na sieciach neuronowych [1, 6], logice rozmytej [4, 8] oraz algorytmach

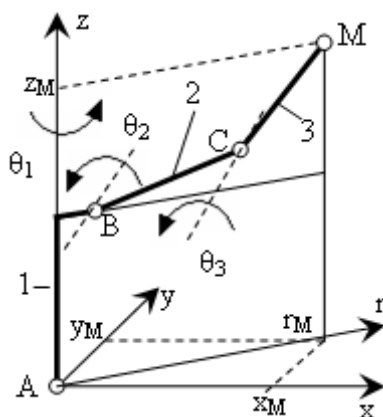
genetycznych. Jednak w większości opracowań dotyczących metod sztucznej inteligencji w ZOK, autorzy poświęcają uwagę jedynie wyznaczeniu współrzędnych konfiguracyjnych dla nieosobliwego zadania odwrotnego, nie wskazują natomiast sposobu rozwiązania osobliwego zadania odwrotnego oraz wyznaczenia prędkości i przyspieszeń konfiguracyjnych. Z uwagi na istniejące problemy przy rozwiązywaniu ZOK ciągle poszukiwane są nowe podejścia do problemu.

Pracę poświęcono zagadnieniu osobliwego ZOK trzech pierwszych członów manipulatora SCORBOT. Zadanie zdekomponowano na ZOK pozycji oraz ZOK prędkości. Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano modele o zmiennej strukturze. Idea stosowania modeli o zmiennej strukturze wynika z istnienia niejednoznacznych rozwiązań ZOK. Jako elementy składowe modelu o zmiennej strukturze użyto modele neuronowe uczone na wzorach generowanych z ZPK. W ZOK prędkości w konfiguracji osobliwej i jej otoczeniu zastosowano algorytm genetyczny (AG). W efekcie wyznaczono współrzędne i prędkości konfiguracyjne dla zadanego toru i zadanej prędkości ruchu wybranego punktu manipulatora.

Układ pracy jest następujący. W rozdziale 2 przedstawiono informacje dotyczące kinematyki manipulatora SCORBOT oraz dokonano analizy osobliwości. Rozdział 3 poświęcono opisowi modeli o zmiennej strukturze zastosowanych w generowaniu zadanej trajektorii ruchu manipulatora. Rozdział 4 zawiera wyniki symulacji. W rozdziale 5 podsumowano pracę.

## 2. KINEMATYKA MANIPULATORA SCORBOT

Przedmiotem pracy jest kinematyka trzech pierwszych członów manipulatora SCORBOT, tworzących konfigurację RRR. Manipulator posiada człony ze zdalnym napędem z przekładniami. Strukturę kinematyczną manipulatora przedstawiono na Rys. 1.



Rysunek 1: Struktura kinematyczna manipulatora SCORBOT

Osie obrotu członu 2 i 3 przechodzące odpowiednio przez punkty B i C są do siebie równoległe i jednocześnie prostopadłe do osi obrotu członu 1 tożsamej z osią z. Kąt obrotu członu 1  $\theta_1$  mierzony jest od osi x w płaszczyźnie xy, kąt obrotu członu 2  $\theta_2$  oraz kąt obrotu członu 3  $\theta_3$  mierzony jest od osi r w płaszczyźnie rz. Za punkt charakterystyczny manipulatora obrano

punkt M, którego pozycję w przestrzeni roboczej wyraża wektor  $p=[x_M, y_M, z_M]^T$ . Kinematykę pozycji manipulatora opisuje zależność

$$p = k(\theta), \quad (1)$$

gdzie  $p \in \mathbb{R}^3$ ,  $\theta \in \Theta^3$ , ( $\mathbb{R}^3$  to przestrzeń robocza manipulatora,  $\Theta^3$  to rozmierność wewnętrzna manipulatora). Położenie  $p$  punktu M w układzie  $xyz$  określa wyrażenie

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \cos \theta_1 \\ (e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \sin \theta_1 \\ l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie  $l_i$  to długość  $i$ -tego członu ( $i=1,2,3$ ),  $e$  to odległość osi obrotu członu 2 od osi  $z$ .

Kinematykę prędkości manipulatora opisuje zależność

$$\begin{bmatrix} V_{Mx} \\ V_{My} \\ V_{Mz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & -l_2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 & -l_3 \sin \theta_3 \cos \theta_1 \\ J_{21} & -l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 & -l_3 \sin \theta_3 \sin \theta_1 \\ 0 & l_2 \cos \theta_2 & l_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} J_{11} &= -(e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \sin \theta_1 \\ J_{21} &= (e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) \cos \theta_1 \end{aligned} \quad (4)$$

We wzorze (3)  $V_{Mx}$ ,  $V_{My}$ ,  $V_{Mz}$  to rzuty prędkości punktu M na osie układu  $xyz$ ,  $\omega_1$  to prędkość kątowna członu 1,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  to prędkości kątowne ruchu względnego członów 2 i 3.

Kąty obrotu należą do przedziałów:  $\theta_1 \in [-150^\circ, 150^\circ]$ ,  $\theta_2 \in [-35^\circ, 130^\circ]$ ,  $\theta_3 \in [-135^\circ, 218^\circ]$ , dodatkowo  $(\theta_3 - \theta_2) \in [-160^\circ, 88^\circ]$ . Pewne kombinacje kątów obrotu są niedopuszczalne, gdyż należy zabezpieczyć manipulator przed kolizją członów z otoczeniem i nawzajem ze sobą. Prędkości kątowne członów należą do przedziałów:  $\omega_1 \in [-0.7, 0.7]$ (rad/s),  $\omega_2 \in [-0.75, 0.75]$ (rad/s),  $\omega_3 \in [-0.82, 0.82]$ (rad/s). Ponadto  $l_1=0.35$ (m),  $l_2=0.22$ (m),  $l_3=0.22$ (m),  $e=0.026$ (m).

Konfiguracja  $\theta$  jest osobliwa, jeżeli [7]

$$\det \left( \frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta) \right) = l_2 l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3) (e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3) = 0. \quad (5)$$

Na podstawie (5) zbiór konfiguracji osobliwych  $S=S_1 \cup S_2$ , przy czym

$$\begin{aligned} S_1 &= \{ \theta \in T^3 \mid \sin(\theta_2 - \theta_3) = 0 \} \\ S_2 &= \{ \theta \in T^3 \mid e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 = 0 \} \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $T^3$  to trójwymiarowy torus. Interpretacja geometryczna osobliwości jest następująca: konfiguracja osobliwa  $S_1$  występuje, gdy osie członów 2 i 3 są równoległe, natomiast konfiguracja osobliwa  $S_2$  występuje, gdy punkt M manipulatora znajduje się na osi obrotu członu 1. W dalszej części pracy założono, że rzut punktu M będzie znajdował się na dodatniej części osi  $r$  w płaszczyźnie  $rz$ , a wszelkie rozważania będą dotyczyć konfiguracji osobliwej  $S_1$ .

### 3. MODELE O ZMIENNYCH STRUKTURACH W GENEROWANIU ZADANEJ TRAJEKTORII RUCHU MANIPULATORA SCORBOT

Generowanie zadanej trajektorii ruchu polega na rozwiązaniu ZOK. Dla manipulatora SCORBOT zostało ono rozdzielone na dwa etapy. Pierwszy polega na wyznaczeniu kątów obrotu członów dla zadanych pozycji punktu M. Drugi etap polega na wyznaczeniu prędkości kątowych członów dla zadanych pozycji oraz prędkości punktu M.

Należy zauważyć, że człony 2 i 3 leżą w jednej płaszczyźnie i tworzą tzw. strukturę szkieletową [5], czyli kąty  $\theta_2$  i  $\theta_3$  są ze sobą związane zależnościami geometrycznymi, natomiast kąt  $\theta_1$  można wyznaczyć niezależnie od pozostałych kątów z zależności

$$\theta_1 = \arctg(y_M, x_X). \quad (7)$$

Prędkość kątową  $\omega_1$  można wyznaczyć z zależności

$$\omega_1 = \frac{d}{dt} \theta_1. \quad (8)$$

Problem wyznaczenia kątów  $\theta_2$  i  $\theta_3$  oraz prędkości kątowych  $\omega_2$  i  $\omega_3$  rozwiązano przy pomocy modeli o zmiennej strukturze opisanych w dalszej części pracy.

#### 3.1. Model o zmiennej strukturze w zadaniu odwrotnym kinematyki pozycji

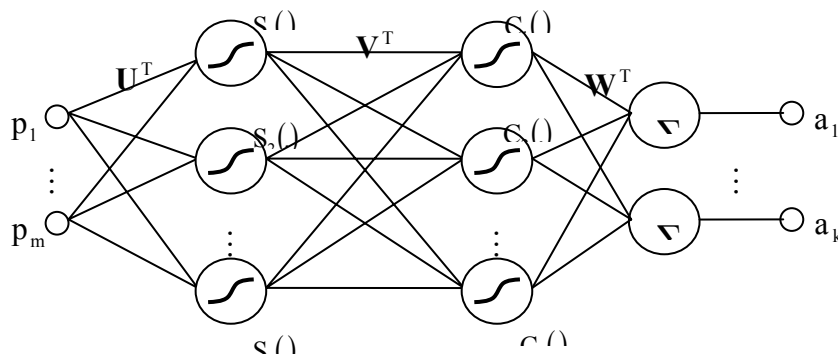
Do rozwiązania ZOK dla kątów  $\theta_2$  i  $\theta_3$  zastosowano model neuronowy o zmiennej strukturze. Idea stosowania modelu neuronowego polega na tym, aby model uczony z wykorzystaniem wzorców generowanych z ZPK, które jest stosunkowo łatwe do sformułowania, wykorzystać do rozwiązywania ZOK. Nauczony model neuronowy opisuje relację pomiędzy pozycją punktu M w płaszczyźnie  $rz$  a kątami obrotu  $\theta_2$  i  $\theta_3$ . Relacja ta nie jest jednoznaczna, dlatego każde z dwóch rozwiązań ZOK pozycji jest reprezentowane przez inny podmodel. Poszczególne podmodele składają się na całościowy model ZOK pozycji manipulatora.

Jako neuronowe podmodele zostały wykorzystane sieci neuronowe wielowarstwowe uczone z wykorzystaniem algorytmu wstecznej propagacji błędów. Ogólna struktura zastosowanych sieci została przedstawiona na Rys. 2. Sieć neuronowa posiada dwie warstwy neuronów oraz trzy warstwy wag. Pierwsza warstwa neuronów zawiera  $I$  neuronów, druga warstwa zawiera  $J$  neuronów. Ilości neuronów  $I$  oraz  $J$  zostały przyjęte *a priori*. W podmodelu I liczba neuronów  $I=25$  oraz  $J=25$ , natomiast w podmodelu II liczba neuronów  $I=15$  oraz  $J=15$ . Liczby neuronów w podmodelach zależą od wielkości i złożoności powierzchni odwzorowania. Neurony pierwszej i drugiej warstwy posiadają sigmoidalne funkcje aktywacji opisane wzorami:

$$S(a) = \frac{2}{1 + e^{-2a}} - 1, \quad (9)$$

$$C(a) = \frac{2}{1 + e^{-2a}} - 1$$

gdzie  $a$  to wejście neuronu.



Rysunek 2: Ogólna struktura sztucznej sieci neuronowej

Pierwsza warstwa neuronów jest połączona z sygnałami wejściowymi przy pomocy warstwy wag  $U$ . Z kolei pierwsza i druga warstwa neuronów są połączone przy pomocy warstwy wag  $V$ . Sygnały wyjściowe z drugiej warstwy są sumowane z wagami  $W$  i jest to wyjście z sieci neuronowej. Wyjście sieci jest wyznaczane następująco

$$a = \mathbf{W}^T C(\mathbf{V}^T S(\mathbf{U}^T \mathbf{p})), \quad (10)$$

gdzie  $W$ ,  $V$ ,  $U$  to macierze wag,  $S$  i  $C$  to sigmoidalne funkcje aktywacji neuronów. Sieć neuronowa posiada dwa wejścia i dwa wyjścia. Wyjścia sieci interpretowane są jako kąty obrotu członów manipulatora.

Zbiór danych uczących wykorzystanych do uczenia podmodeli wygenerowano z ZPK dla wspomnianej struktury szkieletowej w płaszczyźnie  $rz$ , (Rys. 1). Współrzędne  $r_M$  i  $z_M$  są opisane zależnością

$$\begin{aligned} r_M &= e + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 \\ z_M &= l_1 + l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 \end{aligned} \quad (11)$$

Każdy wzorec uczący składa się z wektora  $[r_M, z_M]^T$  i odpowiadającego mu wektora  $[\theta_2, \theta_3]^T$ , przy czym tak rozdzielono wzorce uczące na dwa podzbiory, aby w danym podzbiore odwzorowanie  $[r_M, z_M]^T \rightarrow [\theta_2, \theta_3]^T$  było jednoznaczne. W przestrzeni konfiguracyjnej - dla struktury szkieletowej jest ona dwuwymiarowa - podział przebiega przez prostą  $\theta_2 = \theta_3$ . W ten sposób dokonano oddzielenia wzorców uczących dla tzw. konfiguracji „łokiec u góry” ( $\theta_2 \geq \theta_3$ )

od wzorców uczących dla tzw. konfiguracji „łokiec u dołu” ( $\theta_2 \leq \theta_3$ ). Wzorce uczące generowano z zakresu szerszego niż rzeczywisty zakres pracy manipulatora w celu poprawy odwzorowania na brzegach rzeczywistego obszaru pracy. Podmodel I został nauczony reprezentacji rozwiązania takiego, że  $\theta_2 \geq \theta_3$ , podmodel II został nauczony reprezentacji rozwiązania takiego, że  $\theta_2 \leq \theta_3$ . Nauczony model neuronowy można wykorzystać do odwzorowania pozycji punktu M (w płaszczyźnie rz) we współrzędne konfiguracyjne członu 2 i 3.

### 3.2. Model o zmiennej strukturze w zadaniu odwrotnym kinematyki prędkości

Do rozwiązania ZOK dla prędkości kątowych  $\omega_2$  i  $\omega_3$  zastosowano model neuronowy o zmiennej strukturze wspomagany przez AG działający w otoczeniu konfiguracji osobliwej. Nauczony model neuronowy opisuje relację pomiędzy pozycją punktu M w płaszczyźnie rz oraz rzutami prędkości na osie układu rz a prędkościami kątowymi  $\omega_2$  i  $\omega_3$ . Relacja ta nie jest jednoznaczna, dlatego każde rozwiązanie ZOK prędkości jest reprezentowane przez osobny podmodel. Poszczególne podmodele wraz z AG składają się na całościowy model ZOK prędkości manipulatora. Jako neuronowe podmodele wykorzystano sieci neuronowe wielowarstwowe. Struktury sieci są podobne do struktury sieci zastosowanej w ZOK pozycji. Różnica dotyczy jedynie liczby wejść sieci i liczby neuronów w warstwach. Sieci zastosowane w ZOK prędkości posiadają cztery wejścia. W podmodelu I liczba neuronów  $I=30$  oraz  $J=30$ , natomiast w podmodelu II liczba neuronów  $I=25$  oraz  $J=25$ . Sieć posiada dwa wyjścia interpretowane jako prędkości kątowe członów.

Wzorce uczące wygenerowano z ZPK. Rzuty prędkości na osie układu rz opisuje wzór

$$\begin{aligned} V_{Mr} &= -l_2 \omega_2 \sin \theta_2 - l_3 \omega_3 \sin \theta_3 \\ V_{Mz} &= l_2 \omega_2 \cos \theta_2 + l_3 \omega_3 \cos \theta_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Z zależności (12) wynika, że prędkości kątowe  $\omega_2$  i  $\omega_3$  zależą od rzutów prędkości  $V_{Mr}$  i  $V_{Mz}$  oraz kątów obrotu  $\theta_2$  i  $\theta_3$ . Z kolei kąty obrotu zależą od współrzędnych  $r_M$  i  $z_M$  (11). Dlatego też wzorce uczące składają się z wektora wyjściowego  $[r_M, z_M, V_{Mr}, V_{Mz}]^T$  i odpowiadającego mu wektora wyjściowego  $[\omega_2, \omega_3]^T$ , przy czym tak rozdzielono wzorce uczące na dwa podzbiory, aby w danym podzbiore odwzorowanie  $[r_M, z_M, V_{Mr}, V_{Mz}]^T \rightarrow [\omega_2, \omega_3]^T$  było jednoznaczne. W ten sposób dokonano oddzielenia wzorców uczących dla tzw. konfiguracji „łokiec u góry” od wzorców uczących dla tzw. konfiguracji „łokiec u dołu”. Ponadto z procesu uczenia wyeliminowano wzorce z konfiguracji osobliwej  $S_I$  i jej otoczenia. Jest to podyktowane faktem, iż w osobliwości wektorowi wyjściowemu odpowiada nieskończenie wiele wektorów wyjściowych. Natomiast w otoczeniu osobliwości bardzo podobnym wektorom wyjściowym odpowiadają bardzo różne wektory wyjściowe i uczenie modelu neuronowego w tym obszarze nie jest możliwe. Wzorce uczące generowano z zakresu szerszego niż rzeczywisty zakres pracy manipulatora w celu poprawy odwzorowania na brzegach obszaru pracy. Podmodel I został nauczony reprezentacji rozwiązania dla przypadku gdy  $\theta_2 \geq \theta_3$ , podmodel II został nauczony reprezentacji rozwiązania dla przypadku gdy  $\theta_2 \leq \theta_3$ . Nauczony model neuronowy można wykorzystać do odwzorowania rzutów prędkości i pozycji punktu M (w płaszczyźnie rz) w prędkości kątowe członu 2 i 3 poza otoczeniem osobliwości.

Poprawne rozwiązanie osobliwego ZOK prędkości polega nie tylko na znalezieniu prędkości kątowych spełniających zależność (12), gdyż w osobliwości jest ona spełniona dla dowolnego wektora  $[\omega_2, \omega_3]^T$ . Rozwiązanie ZOK prędkości powinno być ciągłe. Dlatego

spośród wszystkich możliwych rozwiązań należy wybrać takie, które będzie ową ciągłość zapewniało w jak największym stopniu. Inaczej mówiąc, należy znaleźć rozwiązanie optymalne ze względu na ciągłość rozwiązania. W świetle pozycji literaturowych np. [9] należy stwierdzić, że skutecznym narzędziem do poszukiwania rozwiązań optymalnych są AG.

W pracy wykorzystano AG nie tylko w konfiguracji osobliwej, lecz także w pewnym jej otoczeniu, jako że uczenie sieci neuronowej w tym obszarze nie dało zadowalających efektów. AG zostaje wykorzystany w przypadku spełnienia warunku

$$|\theta_3 - \theta_2| \leq \delta \quad (13)$$

gdzie  $\delta=0.087266$  [rad] odpowiada granicy założonego otoczenia konfiguracji osobliwej  $S_l$ . Zadaniem AG jest minimalizacja pewnej funkcji przystosowania [9], która daje możliwość oceny w jakim stopniu wygenerowane rozwiązanie spełnia zadane kryterium. Funkcja przystosowania została zdefiniowana następująco

$$\begin{aligned} f_P = & b_1 \left[ (\omega_2^k - \omega_2^{k-1})^2 + (\omega_3^k - \omega_3^{k-1})^2 \right] + \\ & + b_2 \left( V_{Mr}^k - (-l_2 \omega_2^k \sin \theta_2^k - l_3 \omega_3^k \sin \theta_3^k) \right)^2 + \\ & + b_2 \left( V_{Mz}^k - (l_2 \omega_2^k \cos \theta_2^k + l_3 \omega_3^k \cos \theta_3^k) \right)^2, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie  $b_1, b_2$  to pewne wagi,  $\theta_i^k$  to kąt obrotu  $i$ -tego członu dla  $k$ -tej dyskretnej chwili czasu (wartość znana wygenerowana z ZOK pozycji),  $\omega_i^k, \omega_i^{k-1}$  to prędkość kątowna  $i$ -tego członu odpowiednio w aktualnej  $k$ -tej i poprzedniej  $k-1$  dyskretnej chwili czasu,  $V_{Mr}^k, V_{Mz}^k$  to zadane rzuty prędkości punktu M na osie układu  $rz$  dla  $k$ -tej dyskretnej chwili czasu. Zmiennymi niezależnymi we wzorze (14) są  $\omega_i^k$ , zatem problem ZOK prędkości został sformułowany jako problem optymalizacji ze względu na  $\omega_i^k$ . Funkcja przystosowania składa się z dwóch członów. Pierwszy odpowiada za zapewnienie ciągłości rozwiązania poprzez minimalizację różnicy pomiędzy rozwiązaniami w kolejnych dyskretnych chwilach czasu. Drugi odpowiada za zapewnienie minimalizacji błędu rozwiązania poprzez minimalizację różnicy pomiędzy zadanymi wartościami  $V_{Mr}^k$  i  $V_{Mz}^k$ , a rzutami prędkości wynikającymi z otrzymanego rozwiązania. Te dwa żądania niekiedy mogą stać w sprzeczności, np. nadmierna minimalizacja różnicy między rozwiązaniami w kolejnych chwilach czasu może prowadzić do dużego błędu rozwiązania. Z kolei sama minimalizacja błędu rozwiązania nie zapewnia ciągłości rozwiązania. Wprowadzono zatem kompromis pomiędzy ciągłością a dokładnością rozwiązania poprzez odpowiedni dobór wag  $b_1$  i  $b_2$ . Próby autorów wykazały, że waga  $b_1$  powinna być znacznie mniejsza od wagi  $b_2$ . Ponadto w samej osobliwości kryterium dokładności rozwiązania nie ma w ogóle znaczenia, gdyż każde rozwiązanie daje teoretycznie taką samą dokładność. Zatem im bliżej osobliwości, tym znaczenie kryterium ciągłości powinno rosnąć kosztem kryterium dokładności rozwiązania. Wartości wag powinny być więc zmienne i zależne od odległości rozwiązania ZOK pozycji od osobliwości. Wagi opisano funkcjami

$$b_1 = 0.0001 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{|\theta_3^k - \theta_2^k|}{\delta} \right)^{1/3} \right],$$

$$b_2 = \left( \frac{|\theta_3^k - \theta_2^k|}{\delta} \right)^{1/3},$$
(15)

gdzie wartości kątów powinny być podane w [rad].

W pracy zastosowano AG o populacji liczącej 200 chromosomów. Każdy chromosom zawiera 22 geny, przy czym w genach od 1 do 11 są zakodowane dyskretne rozwiązania dla prędkości kątowej  $\omega_2$ , natomiast w genach od 12 do 22 - dla prędkości kątowej  $\omega_3$ . Zastosowano tzw. selekcję turniejową [9] do wyboru chromosomów które podlegają krzyżowaniu. Zastosowano krzyżowanie jednopunktowe [9] występujące z prawdopodobieństwem 1. W AG zastosowano mutację [9], występującą z prawdopodobieństwem 0,05. AG działa do momentu, aż funkcja przystosowania dla pewnego chromosomu osiągnie założony *a priori* próg. Jeżeli przez odpowiednio długi czas próg nie zostanie osiągnięty, ulegnie on zwiększeniu, a prawdopodobieństwo mutacji chwilowo wzrośnie. Ułatwia to znalezienie globalnego minimum optymalizowanej funkcji.

#### 4. SYMULACJA

Aby zdefiniować ruch punktu M manipulatora w przestrzeni roboczej, narzucono tor  $f_M$  oraz prędkość ruchu  $V_M$  tegoż punktu. Tor ruchu opisano zależnością

$$f_M : (x_M - x_0)^2 + (y_M - y_0)^2 - R^2 = 0,$$

$$z_M = z_0 = \text{const},$$
(16)

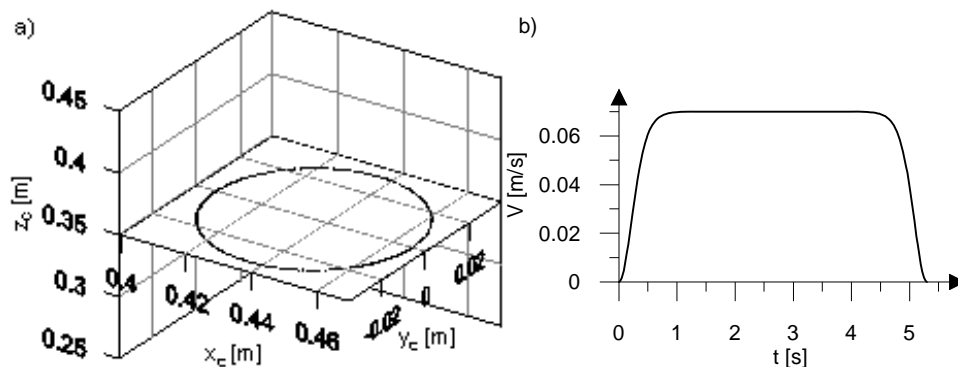
gdzie  $x_0=0.436$  [m],  $y_0=0.03$  [m],  $z_0=0.35$  [m] to współrzędne środka okręgu,  $R=0.03$  [m] to promień okręgu w płaszczyźnie równoległej do  $xy$ . Prędkość punktu M zapisano jako

$$V_M = \frac{1 - \cos(\pi \operatorname{tgh}(c_r t))}{2} V_m \quad t < \frac{t_k}{2},$$

$$V_M = \frac{1 - \cos(\pi \operatorname{tgh}(c_h(t - t_k)))}{2} V_m \quad t \geq \frac{t_k}{2},$$
(17)

gdzie  $V_m=0.07$  [m/s] to maksymalna prędkość ruchu punktu M,  $t_k=5.3$  [s] to czas zakończenia ruchu,  $c_r=2$ ,  $c_h=2$  to stałe odpowiedzialne za przebieg prędkości odpowiednio w okresie rozruchu i hamowania. Tor oraz prędkość ruchu przedstawiono na Rys. 3.

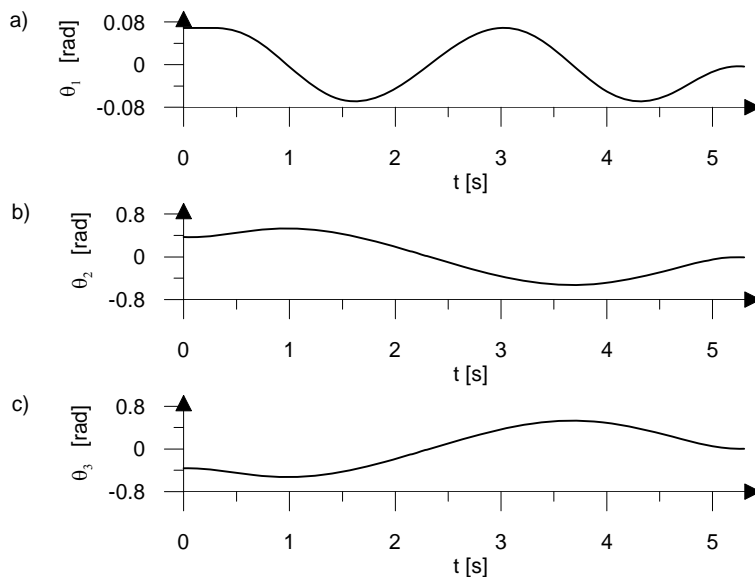




Rysunek 3: a) zadany tor ruchu punktu M, b) zadana prędkość ruchu punktu M

Tor ruchu jest okręgiem równoległym do płaszczyzny  $xy$  (Rys. 3a). Na przebiegu prędkości (Rys. 3b) można wyróżnić trzy fazy ruchu: rozruch, ruch ze stałą prędkością oraz hamowanie. Przejścia z jednego okresu ruchu do innego są płynne. Dla zadanego toru i zadanej prędkości ruchu wyznaczono przebieg rzutów prędkości punktu M ( $V_{Mz}$ ,  $V_{Mr}$ ) oraz przebieg współrzędnych punktu M ( $x_M$ ,  $y_M$ ,  $z_M$ ,  $r_M$ ) w czasie.

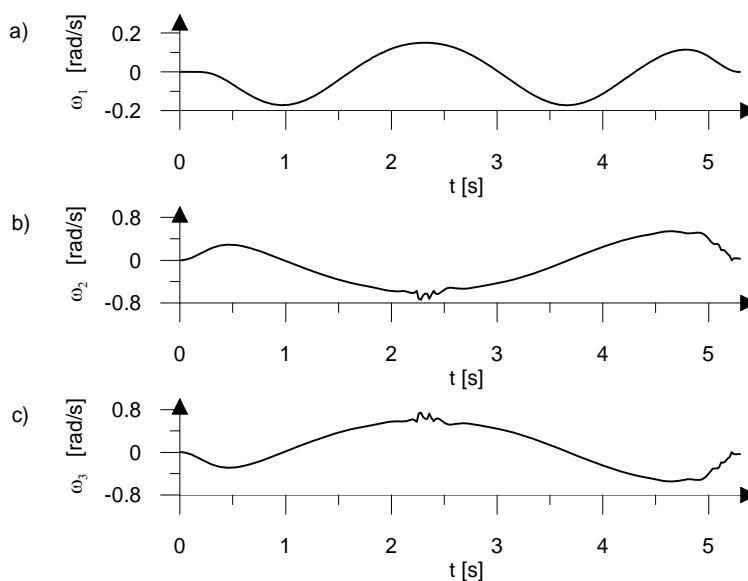
Następnie na podstawie (7) obliczono kąt  $\theta_1$ . Do wyznaczenia kątów obrotu  $\theta_2$  i  $\theta_3$  zastosowano model o zmiennej strukturze opisany w paragrafie 3.1. Uzyskane przebiegi kątów obrotu przedstawiono na rys. 4.



Rysunek 4: Przebiegi kątów obrotu: a)  $\theta_1$ , b)  $\theta_2$ , c)  $\theta_3$

Kąty  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  i  $\theta_3$  wydają się mieć gładkie i idealnie ciągłe przebiegi, pomimo że w czasie  $t=2.32$  [s] wygenerowane rozwiązanie przechodzi przez otoczenie osobliwości. Również w końcowej fazie wygenerowane rozwiązanie znajduje się w otoczeniu osobliwości. Jednak podczas przejścia przez konfigurację osobliwą występują niewielkie nieciągłości kątów  $\theta_2$  i  $\theta_3$  wynikające z faktu, iż rozwiązania dla konfiguracji „łokiec u góry” są generowane przez inny podmodel niż dla konfiguracji „łokiec u dołu”. Niewielka niezgodność pomiędzy podmodelami na ich „granicach” skutkuje nieciągłością kątów przy pokonywaniu konfiguracji osobliwej. Nieciągłości, mimo iż stosunkowo niewielkie, mają jednak bardzo duże skutki w praktyce, gdyż nie można zastosować numerycznego różniczkowania kątów względem czasu w celu otrzymania prędkości kątowych ze względu na bardzo duże oscylacje pochodnych. Dlatego w pracy zaprezentowano model o zmiennej strukturze zastosowany do wyznaczenia prędkości kątowych  $\omega_2$  i  $\omega_3$  w celu wyeliminowania różniczkowania numerycznego.

Prędkość kątową  $\omega_1$  obliczono na podstawie (8). Prędkości kątowe  $\omega_2$  i  $\omega_3$  wyznaczono przy pomocy modelu o zmiennej strukturze opisanego w paragrafie 3.2. Na Rys. 5 przedstawiono wygenerowane przebiegi prędkości kątowych.



Rysunek 5: Przebiegi prędkości kątowych: a),  $\omega_1$ , b),  $\omega_2$ , c)  $\omega_3$

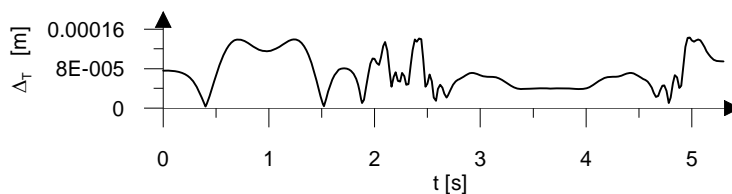
Prędkość kątową  $\omega_1$  zmienia się w sposób ciągły i gładki. Prędkości kątowe  $\omega_2$  i  $\omega_3$  poza otoczeniem osobliwości zostały wygenerowane przez neuronowe podmodele, przy czym dla konfiguracji „łokiec u góry” wykorzystano inny podmodel niż dla konfiguracji „łokiec u dołu”. W konfiguracji osobliwej i jej otoczeniu rozwiązanie ZOK prędkości zostało wygenerowane przez AG. Przy przejściu przez konfigurację osobliwą dla  $t=2.32$  [s] prędkości  $\omega_2$  i  $\omega_3$  oscylują. Jednak ich wartości są ograniczone i nie przekraczają wartości dopuszczalnych dla manipulatora. W końcowej fazie ruchu w otoczeniu osobliwości prędkości  $\omega_2$  i  $\omega_3$  zmie-

rzają do zera. Liczne symulacje wykazały, że szczególnie w otoczeniu konfiguracji osobliwej rozwiązanie ZOK prędkości silnie zależy od dokładności wyznaczenia kątów  $\theta_2$  i  $\theta_3$ .

W celu oceny jakości rozwiązania sprawdzono dokładność realizacji zadanego toru i zadanej prędkości punktu M. Błąd realizacji toru ruchu punktu M wyznaczono z zależności

$$\Delta^T = \sqrt{(x_M - x_M^S)^2 + (y_M - y_M^S)^2 + (z_M - z_M^S)^2} \quad (18)$$

gdzie  $x_M^S, y_M^S, z_M^S$  to współrzędne punktu M uzyskane w wyniku rozwiązania ZPK pozycji dla kątów wygenerowanych z ZOK pozycji. Błąd realizacji toru przedstawiono na Rys 6.



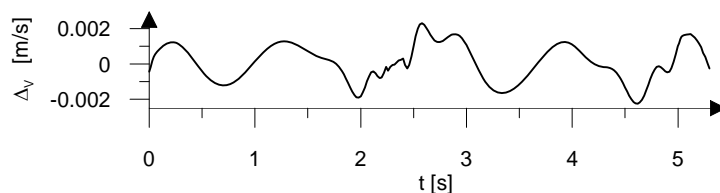
Rysunek 6: Przebieg błędów realizacji toru  $\Delta^T$  w czasie

Maksymalna wartość błędów realizacji toru  $\Delta^T_{MAX}=1.433 \cdot 10^{-4}$  [m], natomiast średnia wartość błędów realizacji toru  $\Delta^T_S=7.219 \cdot 10^{-5}$  [m].

Błąd realizacji prędkości punktu M wyznaczono z zależności

$$\Delta^V = V_M - V_M^S, \quad (19)$$

gdzie  $V_M^S$  to prędkość ruchu punktu M odpowiadająca kątowym parametrom ruchu wygenerowanym z ZOK. Na rys. 7 zamieszczono błąd realizacji prędkości punktu M.



Rysunek 7: Przebieg błędów realizacji prędkości  $\Delta^V$  w czasie

Maksymalna wartość błędów bezwzględnych realizacji prędkości  $\Delta^V_{MAX}=2.308 \cdot 10^{-3}$  [m/s], natomiast średnia wartość błędów bezwzględnych realizacji prędkości  $\Delta^V_S=8.949 \cdot 10^{-5}$  [m/s].

## 5. WNIOSKI

Do generowania zadanej trajektorii ruchu manipulatora zastosowano modele o zmiennej strukturze bazujące na sieciach neuronowych oraz algorytmie genetycznym. Otrzymano przebiegi współrzędnych i prędkości konfiguracyjnych dla trzech pierwszych członów manipulatora SCORBOT. Otrzymana dokładność rozwiązania jest zadowalająca. Przebiegi prę-

kości kątowych  $\omega_2$  i  $\omega_3$  wykazują oscylacje przy pokonywaniu konfiguracji osobliwej. Oscylacje te można zmniejszyć poprzez dokładniejsze wyznaczenie kątów  $\theta_2$  i  $\theta_3$ . Zastosowana metoda pozwala na uniknięcie różniczkowania numerycznego.

*Niniejsza praca badawcza została zrealizowana w ramach projektu badawczego Nr 4 T07A 030 29*

#### LITERATURA

- [1] E. Dermatas, A. Nearchou, N. Aspragathos, Error-back-propagation solution to the inverse kinematic problem of redundant manipulators, *Robotics & Computer-Integrated Manufacturing*, Vol. 12, No. 4, pp. 303-310, 1996.
- [2] I. Dulęba, R. Hossa, A. Mazur, R. Muszyński, K. Tchoń, *Manipulatory i roboty mobilne. Modele, planowanie ruchu, sterowanie*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 2000.
- [3] I. Dulęba, *Metody i algorytmy planowania ruchu robotów mobilnych i manipulacyjnych*, Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa 2001.
- [4] M.-G. Her, C.-Y. Chen, Y.-C. Hung, M. Karkoub, Approximating a Robot Inverse Kinematics Solution Using Fuzzy Logic Tuned by Genetic Algorithms, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 20, pp. 375-380, 2002.
- [5] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, W. Wróblewski, *Modelowanie i sterowanie robotów*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.
- [6] R. Köker, C. Öz, T. Çakar, H. Ekiz, A study of neural network based inverse kinematics solution for a three-joint robot, *Robotics and Autonomous System*, 49 (2004) 227-234.
- [7] R. Muszyński, K. Tchoń, *Postacie normalne nieredundantnych kinematyk osobliwych o trzech stopniach swobody*, V Krajowa konferencja robotyki T.1, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 1996.
- [8] V. Ranković, I. Nikolić, Application of the Takagi-Sugeno fuzzy controller for solving the robots' inverse kinematics problem, *Mechanics, Automatic Control and Robotics*, Vol. 3, No.15, pp. 1039-1054, 2003.
- [9] D. Rutkowska, M. Piliński, L. Rutkowski, *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte*, Wydawnictwo Naukowe PWM, Warszawa-Łódź 1997.
- [10] K. Tchoń, R. Muszyński, *Śledzenie z osobliwościami kinematyki: Metoda postaci normalnych*, V Krajowa konferencja robotyki T.1, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 1996.