

**Prof. dr hab. inż. Tadeusz BURCZYŃSKI, czł. koresp. PAN**  
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
ul. A. Pawińskiego 5B  
02-106 Warszawa  
e-mail: [tburczynski@ippt.pan.pl](mailto:tburczynski@ippt.pan.pl)  
[www.ippt.pan.pl](http://www.ippt.pan.pl)

---

Warszawa, 04.05.2015

**Recenzja**  
**rozprawy doktorskiej mgr Ewy Rejwer**  
**pt.**

**”Zastosowanie szybkiej wielobiegunowej metody elementów brzegowych zmiennej zespolonej w mechanice ośrodków ciągłych  
□ silnie niejednorodnych”**

**1. Uwagi ogólne**

Głównym celem recenzowanej rozprawy doktorskiej jest opracowanie nowej wersji metody elementów brzegowych (MEB), tzw. szybkiej wielobiegunowej (SW) MEB w wersji zespolonej (SWMEB-ZZ) oraz jej implementacja numeryczna, służąca do analizy układów zawierających niejednorodności geometryczne lub materiałowe.

Promotorem rozprawy doktorskiej, która powstała w Politechnice Rzeszowskiej, jest prof. dr hab. Aleksandr Linkov, a promotorem pomocniczym dr Liliana Rybarska-Rusinek.

Klasyczny wariant MEB, oparty na kolokacyjnym podejściu do numerycznego rozwiązywania brzegowych równań całkowych, równoważnych rozpatrywanemu zagadnieniu brzegowemu, mimo względnej prostoty, okazuje się niezbyt efektywny w przypadku dużych zagadnień obliczeniowych, zwłaszcza gdy rozpatrywane ciało zawiera wiele niejednorodności. Poszukiwania nowych wariantów MEB, które byłyby bardziej efektywne, jest jednym z istotnych kierunków rozwoju tej metody. Spośród nowych podejść, w ramach efektywnych wersji MEB, w ostatnim czasie rozwijana jest tzw. szybka metoda wielobiegunowa (SWMEB), która zdobyła już różne zastosowania w analizie zagadnień teorii sprężystości (por. np. prace Fedelińskiego i Ptasznego)

Doktorantka postawiła sobie cel opracowanie zespolonej wersji tej metody, która byłaby wyjątkowo efektywna obliczeniowo i skuteczna w rozwiązywaniu zagadnień płaskich teorii potencjału, przy występowaniu silnych niejednorodności.

## **2. Zakres i treść rozprawy**

Praca jest obszerna, zajmuje 132. stronice i składa się ze spisu rysunków, tabel, wykazu skrótów i oznaczeń, sześciu rozdziałów, czterech dodatków, bibliografii oraz streszczeń w j. polskim i angielskim.

W rozdziale 1. Doktorantka przedstawiła motywacje podjęcia tematyki badawczej związanej z SWMEB-ZZ, scharakteryzowała stan wiedzy związany z powstaniem i rozwojem SWMEB oraz SWMEB-ZZ, a także sformułowała cel, zakres rozprawy oraz przedstawiła przegląd rozprawy.

Rozdział 2. zawiera opis potencjałów równania Laplace'a, zarys teorii rzeczywistych oraz zespolonych brzegowych równań całkowych teorii potencjału. W rozdziale tym przedstawiono metody aproksymacji brzegu i funkcji gęstości oraz analityczne formuły rekurencyjne do obliczania współczynników wpływu brzegowych równań całkowych w wersji zespolonej.

Najważniejszym i oryginalnym wkładem Doktorantki są rozdziały 3., 4., 5. i 6.

Rozdział 3. zawiera szczegółowy opis metody SWMEB-ZZ, jej algorytm numeryczny oraz jego analizę złożoności obliczeniowej.

Testy numeryczne metody, polegające na doborze parametrów wejściowych oraz rozwiązaniu przykładu wzorcowego zagadnienia przepływu ciepła w rurze grubościenniej, przedstawiono w rozdziale 4.

W rozdziale 5. przedstawiono przykłady zastosowań SWMEB-ZZ w analizie przepływu ciepła układu z barierami, skręcania pręta oraz analizie lokalnej koncentracji naprężeń w ośrodku z pęknięciami.

Obszerne podsumowanie rozprawy oraz wnioski przedstawione są w rozdziale 6.

W załączniku A Doktorantka przedstawiła formuły rekurencyjne dla momentów wielobiegunowych, przy aproksymacji brzegu osobliwymi i nieosobliwymi, prostymi i kołowymi elementami brzegowymi oraz aproksymacji wyższych rzędów funkcji gęstości pól. Załącznik B zawiera schemat programu komputerowego SWMEB-ZZ oraz krótki opis jego procedur numerycznych. Formuły dla sztywności przy skręcaniu pręta aproksymowanej prostymi i kołowymi elementami brzegowymi przedstawione są w załączniku C. Załącznik D

zawiera definicję miary uwarunkowania macierzy głównej układu równań liniowych.

Bibliografia zawiera 122. pozycje literaturowe związane z MEB, SWMEB oraz mechaniką, z czego 2. pozycji jest współautorstwa Doktorantki.

### **3. Ocena merytoryczna pracy**

W pracy podjęto trudne i ambitne zadanie rozwiązywania dwuwymiarowych zagadnień brzegowych teorii potencjału z wykorzystaniem nowej, szybkiej wielobiegunowej metody elementów brzegowych w ujęciu zmiennych zespolonych.

Okazuje się, że takie podejście, bazujące na zmiennych zespolonych, jest zdecydowanie bardziej efektywne numerycznie, niż podejście oparte na rzeczywistym wariancie szybkiej wielobiegunowej metodzie elementów brzegowych. Ma to szczególne znaczenie w analizie zagadnień brzegowych w skali mikro, gdzie można spodziewać się silnych niejednorodności materiałowych i geometrycznych oraz zagadnieniach homogenizacji obliczeniowej, w której należy przeprowadzić wielokrotnie operacje rozwiązywania zagadnienia brzegowego dla reprezentatywnego elementu objętościowego (RVE) w skali mikro.

Doktorantka postawiła sobie za cel opracowanie metodologii, algorytmów i programu komputerowego SWMEB-ZZ, przy zastosowaniu elementów kołowych i wieloklinowych wyższych rzędów.

Bardzo cennym, z punktu widzenia informatycznego, jest przeprowadzenie analizy złożoności obliczeniowej uwzględniającej ocenę czasu oraz wymaganej pamięci przy realizacji komputerowej metody.

Implementacja procedur pozwalających na zwiększenie efektywności metody wymagała zbudowania od podstaw algorytmu SWMEB zmiennej zespolonej (SWMEB-ZZ). Algorytm ten zawiera, m.in. procedury obliczania zespolonych całek brzegowych oraz budowy hierarchicznej struktury drzewa ze specjalną lokalną renumeracją elementów.

Doktorantka opracowała oryginalną metodykę badań, na która składają się:

- (i) przygotowania formuł brzegowych równań całkowych zmiennych zespolonych dla struktur blokowych z niejednorodnościami, licznymi punktami osobliwymi oraz skomplikowanymi warunkami kontaktu;
- (ii) wyprowadzenia analitycznych formuł rekurencyjnych w zmiennych zespolonych dla współczynników wpływu w ramach zespolonej metody elementów brzegowych oraz momentów wielobiegunowych w ramach szybkiej wersji tej

- metody;
- (iii) aproksymacja brzegu nieosobliwymi, prostymi oraz kołowymi elementami brzegowymi, a także elementami specjalnymi, tj. osobliwymi elementami prostymi, kołowymi i wieloklinowymi,
  - (iv) aproksymacja wyższego rzędu funkcji gęstości, uwzględniająca asymptotykę zachowania się pól w pobliżu punktów osobliwych;
  - (v) opracowanie oraz implementacja procedur rozwinięcia wielobiegunowego dla wszystkich standardowych całek, występujących w osobliwych oraz hiperosobliwych zespolonych brzegowych równaniach całkowych;
  - (vi) opracowanie procedur niezbędnych do rozwiązywania układów o setkach tysięcy stopni swobody;
  - (vii) optymalizacja otrzymanych procedur SWMEB-ZZ oraz doboru kluczowych parametrów metody (maksymalnej liczby elementów w liściu drzewa, maksymalnej liczby składników szeregu rozwinięcia wielobiegunowego, stosownej tolerancji metody iteracyjnej, itp.), poprzez wykonanie szeregu testów numerycznych.

Doktorantka rozwiązała za pomocą SWMEB-ZZ wiele ciekawych i nietypowych zadań inżynierskich, m.in.:

- (i) badała przepływu ciepła w rurze grubościennej, przy aproksymacji brzegu obszaru nieosobliwymi, prostymi i kołowymi elementami brzegowymi;
- (ii) wyznaczyła efektywną przepuszczalność ciepła w materiale niejednorodnym o licznych, losowo rozmieszczonych, nieprzepuszczalnych barierach;
- (iii) obliczyła sztywność przy skręcaniu cylindra o przekroju kołowym z niejednorodnościami;
- (iv) wyznaczyła dla blisko położonych, równoległych pęknięć wartości tzw. „*condition numer*” pozwalających na ocenę wiarygodności otrzymanych rozwiązań;
- (v) przeprowadziła analizę statystycznej wartości współczynnika intensywności naprężeń, na gruncie nowoczesnej teorii wartości ekstremalnych, dla ośrodków z wieloma, losowo rozmieszczonymi, nieprzecinającymi i przecinającymi się pęknięciami oraz obliczyła wartości współczynnika bezpieczeństwa, wskazującego na ryzyko powstawania i propagacji pęknięć.

Zwraca uwagę bardzo duża staranność w doborze testów i przykładów, ich różnorodność a także dokładności uzyskanych wyników.

Doktorantka opracowała własny autorski program komputerowy. Oprogramowanie tej nowej zespolonej wersji MEB, z uwagi na skomplikowany algorytm metody, jest trudne i wymaga dużej wiedzy i biegłości w programowaniu.

Struktura pracy jest logiczna i praca napisana jest jasno i przejrzysto. Strona edytorska nie budzi zastrzeżeń.

Opracowana metoda numeryczna oraz jej implementacja komputerowa mają wiele zalet, ale wydaje się, że otwartym problemem jest ich zastosowanie w przypadku występowania nieliniowości, rozwiązywania zagadnień niestacjonarnego przepływu ciepła, a także rozszerzenie metody na zagadnienia 3D oraz zagadnienia brzegowe opisywane równaniami wektorowymi.

#### **4. Wniosek końcowy**

Problematyka badawcza ocenianej pracy doktorskiej Ewy Rejwer poświęcona jest zbudowaniu podstaw oraz rozwinięciu i zastosowaniu nowej wersji metody elementów brzegowych, tzw. szybkiej wielobiegunowej wersji MEB zmiennej zespolonej w zagadnieniach analizy układów silnie niejednorodnych.

Praca jest na wysokim poziomie naukowym, zwłaszcza strona matematyczna budzi wysokie uznanie i reprezentuje szeroki wachlarz zagadnień z zakresu szybkiej metody wielobiegunowej w wersji zespolonej w rozwiązywaniu zagadnień brzegowych mechaniki.

Doktorantka wykazała się dużą umiejętnością samodzielnego prowadzenia badań naukowych, a osiągnięte oryginalne wyniki są istotnym wkładem do zastosowania nowych efektywnych wersji metod komputerowych w rozwiązywaniu zagadnieniach brzegowych.

Praca spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim przez obowiązującą ustawę o stopniach i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule naukowym w zakresie sztuki i dlatego proponuje przyjęcie jej przez Radę Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej i dopuszczenie jej do publicznej obrony.

